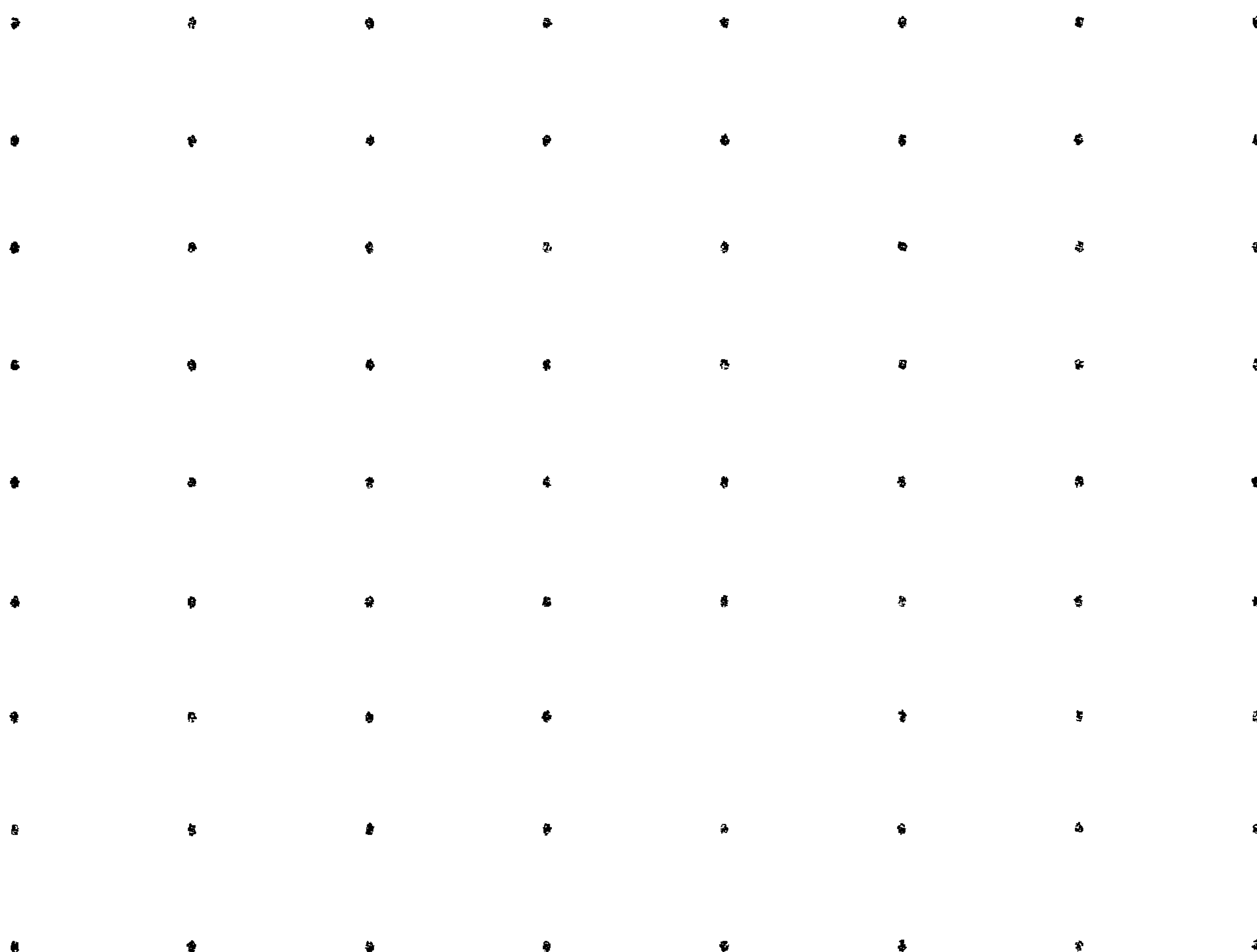
现代数学基础

31 多复变函数论

■ 萧荫堂　陈志华　钟家庆





高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

图书在版编目（CIP）数据

多复变函数论/萧荫堂，陈志华，钟家庆著. --北京:高等教育出版社，2013.1
ISBN 978-7-04-036268-8

Ⅰ.①多… Ⅱ.①萧… ②陈… ③钟… Ⅲ.①多复变函数 Ⅳ.①O174.56

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 233818 号

策划编辑 王丽萍　　责任编辑 李华英　　封面设计 张 楠　　版式设计 范晓红
责任校对 殷 然　　责任印制 张福涛

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京天来印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	19.25	版　　次	2013 年 1 月第 1 版
字　　数	340 千字	印　　次	2013 年 1 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	59.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 36268-00

前 言

本书源于 1979 年夏天萧荫堂教授在中国科学院数学研究所的关于多复变函数的系统讲学, 主要内容是 $\bar{\partial}$ 方程、层论方法与复几何. 当时, 钟家庆君与我将我们的听讲笔记整理后, 由厦门大学数学系油印成 10 万字左右的 "多复变函数论讲义" 的油印本, 并分送有关学者. 此油印讲义当时广为流传, 深受欢迎.

这些年有不少学者建议将此讲义充实整理成书并在国内出版. 高等教育出版社近年来十分重视与支持优秀科技书籍的出版. 他们积极筹划并推动了本书的出版.

由于钟家庆教授英年早逝, 因而这个任务就只能由我个人来负责完成. 我个人亦认为用中文出版本书是很有益的. 因为本书对从事多复变函数及其他相关学科研究的人是本不可多得的参考书, 而对从事基础数学学习的研究生更是一本值得读的好书. 相对于国内外其他专门介绍多复变函数论的书, 本书的内容更为广泛.

本书中可以读到多复变函数与很多其他数学分支诸如方程、泛函分析、几何、拓扑的关联以及这些分支的方法在研究多复变函数中的应用. 本书体现了多复变这一学科在数学统一性上的特征.

囿于作者的水平, 本书不可避免会有错误和失当之处, 这些当然是本人的责任.

本书的顺利出版得到了同济大学数学系周朝晖副教授与博士生王煦和董欣的大力相助. 作者还要感谢国家自然科学基金会对我的教学与科研工作的长期支持.

陈志华

2012 年 3 月于上海

目　录

第一章　全纯域与全纯凸域

在这一章, 我们将从解析延拓的观点引出全纯域和全纯凸域.

§1.1　全　纯　域

首先回忆单复变量的全纯函数的性质. 设 $f(z)$ 是 $\mathbf{C}$ 上的全纯函数, 它的定义有下面两种方法:

(1) $f(z)$ 在局部可写成收敛的幂级数, 即

$$f(z) = \sum_{v=0}^{+\infty} a_v (z - z_0)^v.$$

(2) $f(z) = u(x, y) + \sqrt{-1} v(x, y)$, 这里 $z = x + iy, u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 是定义在 $\mathbf{R}^2$ 上的实值函数. f 称为是全纯的, 若它满足方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases} \tag{1.1}$$

(1.1) 就是 Cauchy–Riemann 方程.

Cauchy–Riemann 方程亦可用下述方式表述:

我们引入常系数的偏微分算子

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+\sqrt{-1}v) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\end{aligned} \tag{1.3}$$

故 $f(z)$ 满足 Cauchy–Riemann 方程当且仅当 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=0$. (1.2) 中 $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ 的系数 $\dfrac{1}{2}$ 是有用的, 这在后面将会看到.

对于多复变量的情形, 一样可以按照这两种方法来定义全纯函数.

(1) $f(z)$ 在局部可写成收敛的幂级数, 即

$$f(z)=\sum a_{v_1\cdots v_n}(z_1-a_1)^{v_1}\cdots(z_n-a_n)^{v_n}.$$

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}^v}=0, \quad \forall 1\leqslant v\leqslant n.$

这里 (2) 就等价于 n 对 Cauchy–Riemann 方程.

当 $n=1$ 时, 古典的复变函数论中有一个重要的概念就是解析延拓. 设 $f(z)$ 是定义在开集 $G\subset \mathbf{C}$ 上的全纯函数, 则 f 可以延拓到最大的一个定义域 D_f, 这个 D_f 就称为 f 的**自然定义域**. 一般来讲, $D_f \subsetneqq \mathbf{C}$, 因为由单值性的问题, D_f 常常是铺开在 $\mathbf{C}$ 上的区域.

例如, 设 $f(z)=\sqrt{1-z}=1+\dfrac{1}{2}(-z)+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)(-z)^2+\cdots$, 它的自然定义域就是 $\mathbf{C}\backslash\{1\}$ 上的两叶铺开的区域.

在多复变函数理论中, 亦有解析延拓的问题. 若 $f(z)$ 为定义在 $G\subset\mathbf{C}^n$ 上的一个全纯函数, 且总可以解析延拓至更大的定义域上, 则这个最大的定义域 D_f 就称为 f 的自然定义域. 这个 D_f 通常亦不包含在 $\mathbf{C}^n$ 中, 但它一定是铺开在 $\mathbf{C}^n$ 上的区域.

设 $F=\{f\}$ 是一族 $G\subset\mathbf{C}^n$ 上的全纯函数, 定义 $D_F=\bigcap\limits_{f\in F} D_f$. 若我们取 F 为 G 上所有全纯函数的全体, 对 $n=1$ 与 $n>1$ 两种情形 D_F 的定义都是一样的, 但当 $n=1$ 时 $D_F=G$. 这是很显然的: 因为对 $\forall a\notin G$, 函数 $(z-a)^{-1}$ 是 G 内的全纯函数, 而 $a\notin D_{(z-a)^{-1}}$, 即 $a\notin D_F$, 故 $D_F=G$. 但对于 $n>1$ 的情形, 这就未必: 例如 $n=2$ 时, 通常不能像 $n=1$ 的情形那样构造出类似于 $(z-a)^{-1}$ 的函数 f 使得对 $a\notin G$ 时, 推出 $a\notin D_f$. 例如对 $G=\mathbf{C}^2\backslash\{0\}$, 这里 $\{0\}$ 表示 $\mathbf{C}^2$ 中原点所成的集, 一般无法找到一个在 $\mathbf{C}^2\backslash\{0\}$ 全纯, 而在 $\{0\}$ 这一个单点所成的集上具有奇性的全纯函数, 因为在 $\mathbf{C}^2$ 上一个区域定义的全纯函数的零点不是孤立点. 类似于 $n=1$ 时的函数 $(z-a)^{-1}$, 我们自然会想到函数 $f(z_1,z_2)=(z_1z_2)^{-1}$. 但 z_1z_2 的零点集是 $(\mathbf{C}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbf{C})$, 因此

$f(z_1,z_2)=(z_1z_2)^{-1}$ 只在 $\mathbf{C}^2\backslash\{(\mathbf{C}\times\{0\})\cup(\{0\}\times\mathbf{C})\}$ 上全纯, 而不在 $\mathbf{C}^2\backslash\{0\}$ 上全纯. 另外函数 $f(z_1,z_2)=\dfrac{1}{|z_1|^2+|z_2|^2}$ 作为可微函数, 只在 $\mathbf{C}^2$ 中的原点具有奇性, 但它不是全纯函数. 在 1906 年, Hartogs 发现 $\mathbf{C}^n$ 中存在区域 G, 对任何全纯函数均可以解析延拓到更大的区域上去, 亦即如果我们用 F 表示 G 上全纯函数全体, 则对 $\mathbf{C}^n$ 中的某些区域 G, 必有 $G\subset D_F$, 但 $G\neq D_F$, 这种现象后来就被人们称为 Hartogs 现象.

现在我们举一个具体的例子来说明 Hartogs 现象的存在. 设

$$G=\{(z,w)\in\mathbf{C}^2\big||z|<1,\beta<1,\beta<|w|<1\}\cup\{(z,w)\in\mathbf{C}^2\big||z|<\alpha<1,|w|<1\},$$

则 G 上的每个全纯函数都可以解析延拓至双圆柱 $\{(z,w)\in\mathbf{C}^2\big||z|<1,|w|<1\}$.

下面我们看一个示意图. 图 1.1 中 $\mathbf{R}^2$ 中的阴影部分记为 S. 作映射

$$\varphi:\mathbf{C}^2\longrightarrow\mathbf{R}^2,$$
$$(z,w)\longmapsto(|z|,|w|),$$

则 $G=\varphi^{-1}(S)$. 现在我们来证明上述论断.

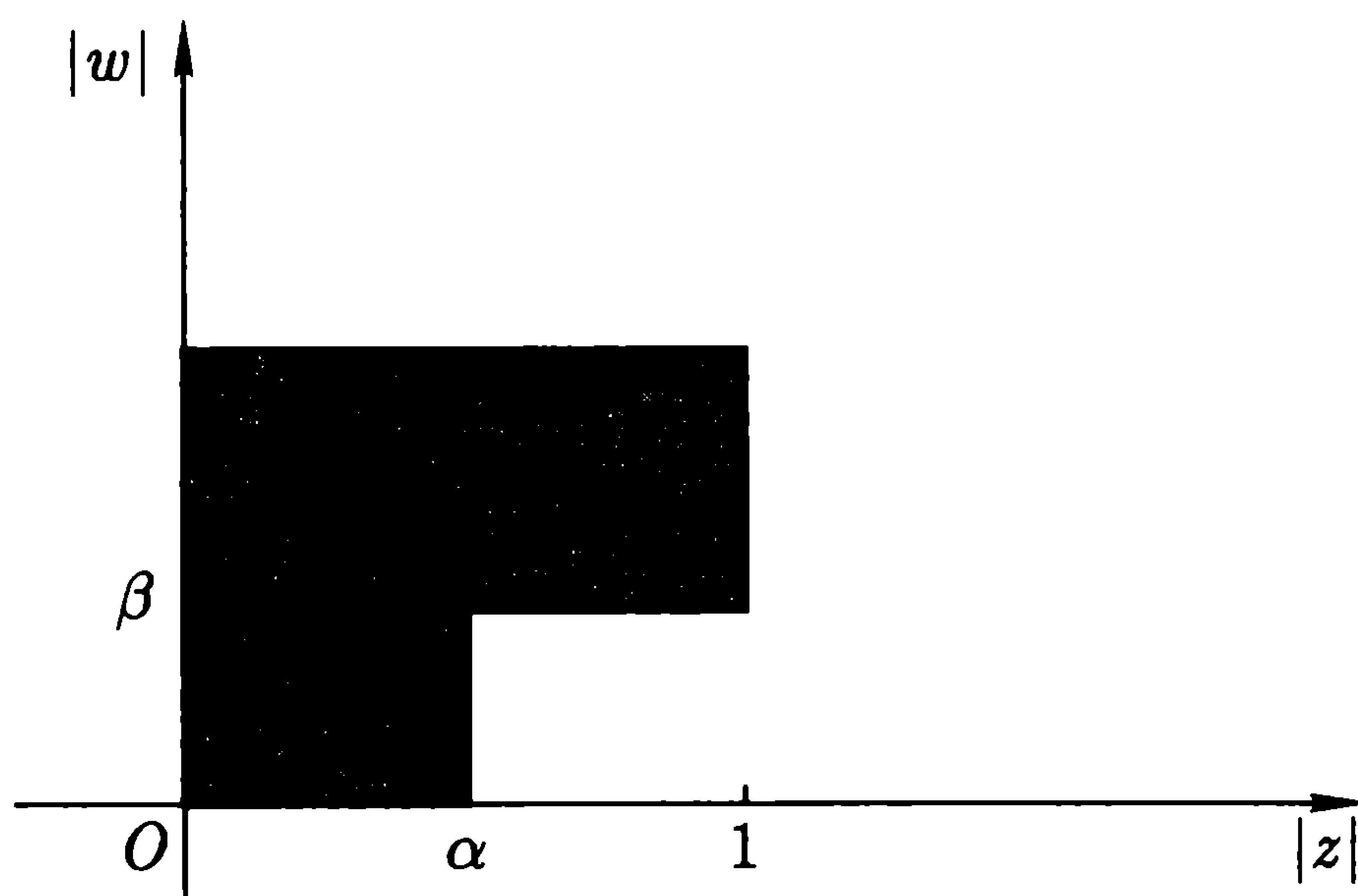


图 1.1

第一步是利用 Laurent 级数展开. 对每一个给定的 $|z|<1, f(z,w)$ 都可表示成 Laurent 级数

$$f(z,w)=\sum_{v=-\infty}^{+\infty}a_v(z)w^v, \tag{1.4}$$

这里 $a_v(z)$ 是 $\{z\in\mathbf{C}\big||z|<1\}$ 的全纯函数. 当 $|z|<\alpha$ 时, (1.4) 中的 Laurent 展开式中不出现负的幂次项, 即 $a_v(z)=0,\forall v<0$. 因为 $a_v(z)$ 为 $\{z\in\mathbf{C}\big||z|<1\}$ 中之全纯函数, 在其中之一开集上为 0, 所以 $a_v(z)$ 在 $\{z\in\mathbf{C}\big||z|<1\}$ 上恒等于 0. 因此 $f(z,w)$ 是双圆柱 $\{(z,w)\in\mathbf{C}^2\big||z|<1,|w|<1\}$ 上的全纯函数.

第二步是利用 Cauchy 积分. 今取 β', 满足 $\beta < \beta' < 1$, 定义全纯函数

$$\tilde{f}(z,w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=\beta'} \frac{f(z,\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi - w}. \tag{1.5}$$

这样定义的 $\tilde{f}(z,w)$ 是双圆柱 $\{(z,w)\in \mathbf{C}^2 \big| |z|<1, |w|<\beta'\}$ 中的全纯函数; 而在 $\{(z,w)\in \mathbf{C}^2 \big| |z|<\alpha, |w|<1\}$ 中, $\tilde{f}(z,w) = f(z,w)$. 因为此时它们可以用同一个 Cauchy 积分式表示, 所以这样定义的 $\tilde{f}(z,w)$ 就是原来的 $f(z,w)$ 的解析延拓. 也证明了 $f(z,w)$ 是双圆柱 $\{(z,w)\in \mathbf{C}^2 \big| |z|<1, |w|<1\}$ 上的全纯函数.

下面给出 Hartogs 所给出的全纯域 (正则域) 的定义.

定义 1.1 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个开集 (或是铺在 $\mathbf{C}^n$ 上的一个开集), G 称为**全纯域**, 如果不存在更大的 $\tilde{G}, \tilde{G}\supset G$ 且 $\tilde{G}\neq G$ 能使 $\forall f\in \mathcal{O}(G)$ 都可以延拓到 $\tilde{G}$ 上.

这里 $\mathcal{O}(G)$ 表示 G 上全纯函数全体.

前面已经说明 $\mathbf{C}$ 中任一开集都是全纯域, 这主要是由于 $(z-a)^{-1}$ 这类全纯函数的存在, 而对 $\mathbf{C}^n$ 中的开集, 有的可能不是全纯域. 但是有的具有特殊条件的域可以证明它是全纯域.

定理 1.2 设 $G\subset \mathbf{C}^n$ 是一个开集, 如果 G 是欧氏凸的, 则 G 是全纯域.

证明: 用 ∂G 表示 G 的边界集. 对 $\forall x\in \partial G$, 由于 G 是欧氏凸的, 因此存在一个过 x 点的实超平面 H, H 与 $G\cup \partial G$ 只相交于点 x. 不失一般性, 我们可以认为 x 就是 $\mathbf{C}^n$ 中的坐标原点. 现在 $H: \sum\limits_v (a_v z_v + \overline{a}_v \overline{z}_v) = 0$ 是实超平面, $\sqrt{-1}H: \sum\limits_v (\sqrt{-1}a_v z_v + \sqrt{-1}\overline{a}_v\overline{z}_v) = 0$ 亦是实超平面. $H\cap \sqrt{-1}H$ 是一个经过原点的复超平面, $H\cap\sqrt{-1}H: l(z) = \sum\limits_v a_v z_v = 0$. 由于 H 与 $G\cup\partial G$ 只相交于原点, 因此 $f(z) = \dfrac{1}{l(z)}$ 在 G 内是全纯的, 但是它不能通过原点延拓出去. 此结论对 ∂G 内任一个点都成立. 故 G 是全纯域. □

§1.2 全 纯 凸 域

定理 1.2 之逆是不成立的, 这在 $n=1$ 时就有大量的反例. 这表明全纯域的概念比欧氏凸要广得多. 另外, 从全纯域的定义知道对于全纯坐标变换, 全纯域是不变的; 但是对于欧氏凸则不然, 除非是复线性变换. 下面我们要引入全纯凸的定义, 这种凸性正好刻画了全纯域.

如果 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开集, K 为 G 中的一个紧集,

$$\tilde{K} := \{x \in G| \ \text{对所有实值线性函数}\ l, l(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_K l\},$$

这个 $\tilde{K}$ 就称为 K 的**凸包**. 如果 G 是欧氏凸的, 则不难看出在 G 中每个紧集 K 的凸包 $\tilde{K}$ 都一定是紧的, 而且 $\tilde{K}$ 本身都是欧氏凸的. 此时则有 $G = \cup K_v$, 每个 K_v 都是紧凸的且 $K_v \subset K_{v+1}$. 在上面这个凸包的定义中, 如果我们用比所有线性函数集更大的集合来代替线性函数的集合, 而且要求这个更大的集合是在全纯坐标变换下不变的, 那么这样所类似定义的 "凸包" 的性质亦是在全纯坐标变换下不变, 这自然就想到了下面全纯凸的概念.

定义 1.3 令 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开集, K 是 G 中的一个紧集, K 的**全纯凸包** $\hat{K}$ 为

$$\hat{K} := \{x \in G| |f(x)| \leqslant \operatorname*{Sup}_K |f|, \quad \forall f \in \mathcal{O}(G)\}.$$

如果对 G 的任意紧集 K, 它的全纯凸包 $\hat{K}$ 都是紧的, 就称 G 是**全纯凸**的.

这个定义完全是前面用线性函数定义的凸性的极其简单的推广, 这里用绝对值取代以前的 $l(x)$ 是自然的, 因为

$$l(x) \leqslant \operatorname*{Sup}_K l \Longleftrightarrow e^{l(x)} \leqslant \operatorname*{Sup}_K e^l.$$

这里 $l = \text{Re } L, L$ 是一个复值线性函数, 所以有

$$e^{l(x)} = e^{\text{Re } L(x)} = |e^{L(x)}| \leqslant \operatorname*{Sup}_K |e^L|.$$

下面给出 1932 年证明的 **Cartan-Thullen 定理**.

定理 1.4 (Cartan-Thullen) 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的开集, 则如下条件等价:

(1) G 是全纯域;

(2) G 是全纯凸的;

(3) 存在 G 上的一个全纯函数 f, 它的自然定义域就是 G.

证明: 我们仅证明 G 是有界的简单情形, 其他情形无本质困难.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 是显然的.

(1) $\Longrightarrow$ (2) 我们引入 n 个记号. $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 n 个非负整数, 今后我们记

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!,$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial^{\alpha_1} z_1 \cdots \partial^{\alpha_n} z_n},$$

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}.$$

设 F 是 G 中的任一集合, 定义 $d(F) = \inf\limits_{x\in F, y\in \mathbf{C}^n\setminus G} \operatorname{dist}(x,y)$, 这里 $\operatorname{dist}(x,y)$ 是 x 与 y 之间的欧氏距离. 如果 K 是 G 中的紧集, 自然 $d(K) > 0$. 按照 $\hat{K}$ 的定义, $\hat{K}$ 是 G 中的闭集. 如果能证明 $d(\hat{K}) > 0$, 则 $\hat{K}$ 是紧的. 事实上有 $d(\hat{K}) = d(K)$.

对任意的满足 $d(K) > \varepsilon > 0$ 的 ε, 作

$$K_\varepsilon = \{x \in G | \operatorname{dist}(x, K) \leqslant \varepsilon\} \subset G.$$

由多圆柱的 Cauchy 积分公式, 我们有

$$|D^\alpha f(x)| \leqslant \frac{\sqrt{n}^{|\alpha|}\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}} \operatorname*{Sup}_{K_\varepsilon}|f|, \quad \forall x \in K. \tag{1.6}$$

而由 $\hat{K}$ 的定义与 (1.6),

$$|D^\alpha f(x)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{K}|D^\alpha f| \leqslant \frac{\sqrt{n}^{|\alpha|}\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}} \operatorname*{Sup}_{K_\varepsilon}|f|, \quad \forall x \in \hat{K}. \tag{1.7}$$

因此对 $\forall x_0 \in \hat{K}$, $f(z) = \sum\limits_{\alpha} \dfrac{D^\alpha f(x_0)}{\alpha!}(z - x_0)^\alpha$ (这里 $(z - x_0)^\alpha = (z_1 - x_{01})^{\alpha_1} \cdots (z_n - x_{0n})^{\alpha_n}$) 是在以 $x_0 = (x_{01}, \cdots, x_{0n})$ 为中心, ε 为半径的多圆柱中收敛的. 因为对 $f \in \mathcal{O}(G)$ 这个事实均成立而 G 又是全纯域, 所以必有 $d(x_0, \mathbf{C}^n\setminus G) \geqslant \varepsilon$, 故 $d(\hat{K}) \geqslant \varepsilon$. 这就证明了 $d(K) = d(\hat{K})$, 故 $\hat{K}$ 必为紧. 这里 $\mathcal{O}(G)$ 是 G 上所有全纯函数所成的集合.

(2) $\Longrightarrow$ (3) G 是全纯凸的, 我们可以在 G 中选取一个点列 $\{x_v\}$ 和一族紧集 $K_v = \hat{K}_v$, 使之满足:

1) $G = \bigcup\limits_v K_v$, $K_v \subset \mathring{K}_{v+1}$;

2) $\{x_v\}$ 使 ∂G 的每点都是它的聚点;

3) $x_v \notin K_v$.

再由 G 是全纯凸与 $K_v = \hat{K}_v$, 得到对每个 v 存在一个 $f_v \in \mathcal{O}(G)$, 使 $|f_v(x_v)| > \operatorname*{Sup}\limits_{K_v}|f_v|$. 将这个 f_v 乘上适当的幂次与常数, 可以使所取 f_v 满足

$$f_v(x_v) = 1 \quad 和 \quad \operatorname*{Sup}_{K_v}|f_v| < \varepsilon_v,$$

这里 $\{\varepsilon_v\}$ 是一个任意小的正数列, 且 $\sum\limits_v v\varepsilon_v < +\infty$.

今构造 $\prod\limits_v (1 - f_v)^v$, 它是在 G 内收敛的, 记为 f, 则

$$D^\alpha f(x_v) = 0; \quad \forall |\alpha| < v.$$

对 $\forall x^* \in \partial G$, 取 x_v 的子序列 $\{x_{v_i}\}$, $x_{v_i} \to x^*$, 由 $D^\alpha f(x_{v_i}) = 0, |\alpha| < v_i$. 如果 f 可以沿 x^* 延拓出去, 则由连续性, $D^\alpha f(x^*) = 0, \forall |\alpha| < v_i$, 这里 v_i 可趋于 $+\infty$. 故 $(D^\alpha f)(x^*) = 0$ 对 $\forall \alpha$ 都成立. 因此在 x^* 的小邻域中 $f = 0$. 再由唯一性定理, 则 f 在 G 上恒为零. 这与 $f = \prod(1 - f_v)^v \neq 0$ 是矛盾的. 因此 f 不可能沿 ∂G 的任何点延拓出去. □

上面 (2) $\Longrightarrow$ (3) 的证明主要想法是: 一个在 G 上有太多零点的非零全纯函数是不可以延拓的. 上面构造的 f 就是这样的函数. 下面我们再证明对判断某一个域是否为全纯域较为有用的一个定理.

定理 1.5 域 G 是全纯凸当且仅当对任意 $x_v \to \partial G$, 存在 $f \in \mathcal{O}(G)$ 使得 $\{|f(x_v)|\}$ 是无界的.

证明: "$\Longleftarrow$" 如果 G 不是全纯凸, 则存在 G 中的紧集 K, 使 $\hat{K}$ 不是紧的, 那么存在 $\{x_v\} \in \hat{K}, x_v \to \partial G, |f(x_v)| < \operatorname*{Sup}_K |f|$, 故 $\{|f(x_v)|\}$ 有界.

"$\Longrightarrow$" 设 $\{x_v\} \in G, x_v \to \partial G$, $K_v = \hat{K}_v \subset G, G = \bigcup\limits_v K_v$. 可以假定 $x_v \notin K_v, x_u \in K_v$, 当 $u < v$ 时, 根据全纯凸的定义, 对每个 v, 可选取 $f_v \in \mathcal{O}(G)$ 使得

$$|f_v(x_v)| \geqslant v + \sum_{u<v} |f_u(x_v)| \tag{1.8}$$

与

$$\operatorname*{Sup}_{K_v} |f_v| < \frac{1}{2^v}, \tag{1.9}$$

则 $\sum\limits_v f_v$ 在域 G 内收敛. 令 $f = \sum f_v \in \mathcal{O}(G)$, 则由 f_v 的性质 (1.8) 与 (1.9), 有

$$\begin{aligned} |f(x_v)| &\geqslant |f_v(x_v)| - \sum_{u<v} |f_u(x_v)| - \sum_{u>v} |f_u(x_v)| \\ &\geqslant v - \sum_{u>v} \frac{1}{2^v} \geqslant v - 1. \end{aligned}$$

故 $\{|f(x_v)|\}$ 无界. □

第二章　拟凸域

---

§2.1　拟　凸　域

G 为 $\mathbf{R}^n$ 中的一个区域, 如果它的边界 ∂G 是可微分的, 则可以用边界的是否凸来判定区域的是否凸. 设 $x \in \partial G$, 我们可对坐标作一线性变换, 使 x 正好是坐标原点, 同时在这点 ∂G 的切平面正好是 $x_n = 0$, 这时在 0 点附近, G 可用

$$G = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n | f(x_1, \cdots, x_{n-1}) - x_n < 0\}$$

来定义. 则 G 在 0 点附近是凸的等价于

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_u \partial x_v}\right)_{1 \leqslant u,v \leqslant n-1} \geqslant 0. \tag{2.1}$$

G 在 0 点附近是强凸的等价于

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_u \partial x_v}\right)_{1 \leqslant u,v \leqslant n-1} > 0. \tag{2.2}$$

令 $r = f(x_1, \cdots, x_{n-1}) - x_n$, 则在 0 点的条件 (2.1) 与 (2.2) 可分别等价于

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_u \partial x_v}\right)_{1 \leqslant u,v \leqslant n}$$

在 0 点的切平面上半正定与正定. 即在 0 点 $\sum \dfrac{\partial^2 r}{\partial x_u \partial x_v} \eta_u \eta_v \geqslant 0$ (或 > 0), 对任意 $(\eta_1, \cdots, \eta_n) \in \mathbf{R}^n$ 满足 $\sum\limits_u \dfrac{\partial r}{\partial x_u} \eta_u = 0$.

1910 年, E. E. Levi 就提出全纯凸是否亦可以类似于欧氏凸那样用其边界的局部性质来描绘. 这就要引入**复 Hessian** 来描绘边界.

设 $G \subset \mathbf{C}^n$ 是有界的, 而且其边界 ∂G 是可微的,

$$G = \{z \in \mathbf{C}^n | r(z) < 0\},$$

这里 $r(z)$ 是定义在 ∂G 的邻域中的实值可微函数, 而且在这个邻域中 $\mathrm{d}r$ 在 ∂G 上处处不为 0, r 的复 Hessian 在 ∂G 的复切平面上,

$$\left(\frac{\partial^2 r}{\partial z_u \partial \overline{z}_v}\right)_{1 \leqslant u,v \leqslant n} \geqslant 0, \tag{2.3}$$

此即在 $x \in \partial G$,

$$\sum \frac{\partial^2 r}{\partial z_u \partial \overline{z}_v}\bigg|_x \xi_u \overline{\xi}_v \geqslant 0.$$

对任意 $(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n$, 有 $\displaystyle\sum_{u=1}^n \frac{\partial r}{\partial z^u}\bigg|_x \xi_u = 0$, 这就是上面 $\mathbf{R}^n$ 中凸域用 ∂G 的局部定义的一种自然推广.

定义 2.1 设 G 是 $\mathbf{C}^n$ 的一个域, $y \in \partial G$, 如果存在 y 的一个邻域 U 和一个在 U 上定义的实值 C^2 函数 φ, 使得

(1) $G \cap U = \{x \in U | \varphi(x) < 0\}$;

(2) $d\varphi|_y \neq 0$;

(3) 对于任意 $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n$, 若 $\displaystyle\sum_{v=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial z_v}\bigg|_y \xi_v = 0$, 则

$$\sum_{u,v=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_u \partial \overline{z}_v}\bigg|_y \xi_u \xi_v \geqslant 0,$$

就称 G 在 y 点是**拟凸**的; 如果对任意 $\xi \in \mathbf{C}^n$ 且 $\xi \neq 0$, 若 $\displaystyle\sum_{v=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial z_v}\bigg|_y \xi_v = 0$, 都有

$$\sum_{u,v=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_u \partial \overline{z}_v}\bigg|_y \xi_u \xi_v > 0,$$

那么称 G 在 y 点是**强拟凸**的. 如果 G 在边界 ∂G 上的每一个点都是拟凸的, 我们称 G 是**拟凸域**; 如果 G 在边界 ∂G 上的每一个点都是强拟凸的, 我们就称 G 是**强拟凸域**.

上述定义中函数 φ 的选取是有一定任意性的, 但是这对拟凸与强拟凸的定义并无影响. 设 G 在 U 上由另外一个 C^2 实值函数 ρ 来定义, 即 $G \cap U = \{x \in$

$U|\rho(x)<0\}$, 那么 $\varphi=h\rho$, 这里 h 是正的 C^2 实值函数. 由

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_v}=h\frac{\partial\rho}{\partial z_v}+\frac{\partial h}{\partial z_v}\rho,$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}=h\frac{\partial^2\rho}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}+\frac{\partial h}{\partial z_v}\frac{\partial\rho}{\partial\overline{z}_u}+\frac{\partial h}{\partial\overline{z}_u}\frac{\partial\rho}{\partial z_v}+\rho\frac{\partial^2 h}{\partial z_v\partial\overline{z}_u},$$

对任意 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{C}^n$, $\sum\limits_{v=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial z_v}\Big|_y\xi_v=0$, 则有

$$\begin{aligned}&\sum_{v=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial z_v}\Big|_y\xi_v=h\sum_{v=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial z_v}\Big|_y\xi_v=0,\\&\sum_{v,u=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}\Big|_y\xi_v\overline{\xi}_u=h(y)\frac{\partial^2\rho}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}\xi_v\overline{\xi}_u.\end{aligned}\tag{2.4}$$

(2.4) 表示拟凸与强拟凸的定义是与函数 φ 的选取无关的. 这类函数 φ 就称为 G 在 y 点的**定义函数**. 从上面说明可以看到, G 在 y 点拟凸与强拟凸的定义与定义函数的选取无关这一事实是依赖于原来定义中定义函数 φ 在 y 点的复 Hessian $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}\right)_{1\leqslant u,v\leqslant n}$ 的半正定与正定是限制在 ∂G 在这点的复切平面上; 如果没有这个限制, 定义函数的半正定与正定的性质是不一定保持的. 但是在强拟凸的情形, 我们一定可以选取一个适当的定义函数, 它的复 Hessian 对任意的 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{C}^n$ 都是正定的.

设 r 是域 G 在 $y\in\partial G$ 点的一个定义函数, 它在 y 的复切平面上是正定的. 显然 $e^{Ar}-1$ 也是 G 在 y 点的定义函数, 这里 A 是一个任意的正实数.

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\overline{z}_u}(e^{Ar}-1)=Ae^{Ar}\frac{\partial r}{\partial\overline{z}_u},\\\frac{\partial^2(e^{Ar}-1)}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}=A^2e^{Ar}\frac{\partial r}{\partial z_v}\frac{\partial r}{\partial\overline{z}_u}+Ae^{Ar}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u},\\\sum_{v,u}\frac{\partial^2(e^{Ar}-1)}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}\xi_v\overline{\xi}_u=A^2e^{Ar}\left|\sum_v\frac{\partial r}{\partial z_v}\xi_v\right|^2+Ae^{Ar}\sum_{v,u}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}\xi_u\overline{\xi}_v.\end{gathered}\tag{2.5}$$

现在考虑 $\mathbf{C}^n$ 上的单位球 $S^n=\left\{\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{C}^n\,\middle|\,\sum\limits_{v=1}^{n}|\xi_v|^2=1\right\}$, 对于任意 $\xi\in S^n$, 可按照下述方式找到 ξ 的开邻域 U:

(a) 当 ξ 满足 $\sum\limits_v\frac{\partial r}{\partial z_v}(y)\xi_v=0$, 则 $\sum\limits_{v,u}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_u\overline{\xi}_v>0$. 因此可在 S^n 中

选取 ξ 的开邻域 U 使得

$$\sum_{v,u}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\tilde{\xi}_u\bar{\tilde{\xi}}_v>0,\quad \tilde{\xi}\in U.$$

(b) 当 ξ 满足 $\sum_v \frac{\partial r}{\partial z_v}(y)\xi_v\neq 0$, 取 $A_\xi=\max\left\{1,\frac{-\sum_{v,u}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_u\overline{\xi}_v}{\left|\sum_v\frac{\partial r}{\partial z_v}(y)\xi_v\right|^2}+1\right\}$,

则

$$\begin{aligned}&A_\xi^2e^{A_\xi r}\left|\sum_v\frac{\partial r}{\partial z_v}(y)\xi_v\right|^2+A_\xi e^{A_\xi r}\sum_{v,u}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_u\overline{\xi}_v\\ =&A_\xi e^{A_\xi r}\left(A_\xi\left|\sum_v\frac{\partial r}{\partial z_v}(y)\xi_v\right|^2+\sum_{v,u}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_u\overline{\xi}_v\right)>0.\end{aligned}$$

同样可在 S^n 中选取 ξ 的开邻域 U, 使得对所有 $\tilde{\xi}\in U$,

$$A_\xi e^{A_\xi r}\left(A_\xi\left|\sum_v\frac{\partial r}{\partial z_v}(y)\tilde{\xi}_v\right|^2+\sum_{v,u}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\tilde{\xi}_u\bar{\tilde{\xi}}_v\right)>0.$$

由于 S^n 是紧的, 则存在有限个 $\{U_1,\cdots,U_k\}$ 将 S^n 覆盖. 若 $U_i\,(1\leqslant i\leqslant k)$ 是由 (a) 中取出的, 就取对应的 $A_i=1$; 若是由 (b) 中取出的, 就取 $A_i=A_\xi$. 令 $A_0=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}A_i$, 那么对任意 $\xi\in S^n$,

$$\sum_{v,u}\frac{\partial^2(e^{A_0r}-1)}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_v\overline{\xi}_u=A_0^2e^{A_0r}\left|\sum_v\frac{\partial r}{\partial z_v}(y)\xi_v\right|^2+A_0e^{A_0r}\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_v\overline{\xi}_u>0. \tag{2.6}$$

在 (a) 情况的选取中, 我们看到 $\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_v\overline{\xi}_u>0$ 是必需的; 否则就无法找到 S^n 上的一个小邻域使 $\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_v\overline{\xi}_u>0$. 因此这点亦表明对拟凸的情况, 即在 (a) 的情况下要保持 $\frac{\partial^2 r}{\partial z_v\partial\overline{z}_u}(y)\xi_v\overline{\xi}_u\geqslant 0$ 是不一定可能的. 事实上, 这个结果亦只有在强拟凸时才成立. K. Diederich 与 J. E. Fornaess 有反例说明对拟凸时无此类性质 (见 Pseudoconvex domains: an example with nontravial Nebenhiille, Math. Ann. 225(1977), 275-292).

下面的定理说明强拟凸域是欧氏凸的最广的推广.

定理 2.2 若 G 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域, $y \in \partial G$. G 在 y 点强拟凸, 当且仅当存在另一个全纯坐标系, G 在 y 点对此坐标是强欧氏凸的.

证明: 设 G 在 y 点附近的定义函数为 r, 即在 y 的一个邻域 U 中

$$G \cap U = \{x \in \mathbf{C}^n | r(x) < 0\}.$$

不失一般性, 我们假设 y 点就是坐标原点, 此时用 $(x_1, \cdots, x_{2n})$ 表示欧氏坐标. 在坐标原点, 对 r 进行 Taylor 展开

$$r = \frac{\partial r}{\partial x_i}(0)x_i + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}(0)x_i x_j + \cdots . \tag{2.7}$$

如果 (2.7) 右边的第二项中的 $\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)$ 是正定的, 则 G 就无疑在 $x = 0$ 强拟凸. 原来欧氏凸与强欧氏凸的定义中关于 Hessian $\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)$ 是半正定与正定的要求都只是对于 ∂G 在 $x = 0$ 处的切平面而言, 但是上面已论述了对强拟凸域而言, 可以选取一个适当的定义函数使得在一点 $x \in \partial G$ 的强拟凸条件中可放弃 **Levi 形式** $\frac{\partial^2 r}{\partial z_u \partial \overline{z}_v} dz^u \otimes d\overline{z}^v$ 是仅在 ∂G 的复切平面的限制.

现在我们假定就选取这样的定义函数 r, 用复坐标来展开 r, 则

$$\begin{aligned} r = & \left.\frac{\partial r}{\partial z_u}\right|_{z=0} z_u + \left.\frac{\partial r}{\partial \overline{z}_u}\right|_{z=0} \overline{z}_u \\ & + \frac{1}{2}\sum_{u,v} \left.\frac{\partial^2 r}{\partial z_u \partial z_v}\right|_{z=0} z_u z_v + \frac{1}{2}\sum_{u,v} \left.\frac{\partial^2 r}{\partial \overline{z}_u \partial \overline{z}_v}\right|_{z=0} \overline{z}_u \overline{z}_v \\ & + \sum_{u,v} \left.\frac{\partial^2 r}{\partial z_u \partial \overline{z}_v}\right|_{z=0} z_u \overline{z}_v + \cdots . \end{aligned} \tag{2.8}$$

G 是强拟凸的, 即 (2.8) 中右端的 $\left(\left.\frac{\partial^2 r}{\partial z_u \partial \overline{z}_v}\right|_{z=0}\right)$ 是正定的, 而强欧氏凸是要求 (2.8) 中右端最后三项之和是非负的, 而且对 $z = (z_1, \cdots, z_n) \neq 0$, 它是正的. 因此我们希望找到一个适当的全纯坐标系 $(w_1, \cdots, w_n)$, 能使 $\left.\frac{\partial^2 r}{\partial w_u \partial w_v}\right|_{y=0} w_u w_v = 0$ (则同样它的共轭 $\left.\frac{\partial^2 r}{\partial \overline{w}_u \partial \overline{w}_v}\right|_{y=0} \overline{w}_u \overline{w}_v = 0$).

只要对坐标 $(z_1, \cdots, z_n)$ 作一个线性变换就可以使如下条件满足:

$$\left.\frac{\partial r}{\partial z_1}\right|_{z=0} = 1, \quad \left.\frac{\partial r}{\partial z_2}\right|_{z=0} = \cdots = \left.\frac{\partial r}{\partial z_n}\right|_{z=0} = 0.$$

现在再作全纯坐标变换

$$\begin{cases} z_1 = w_1 + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\alpha,\beta} w_\alpha w_\beta a_{\alpha\beta}, \\ z_u = w_u, \qquad u > 1, \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial w_\lambda \partial w_u} = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 r}{\partial z_\alpha \partial z_\beta} \frac{\partial z_\alpha}{\partial w_\lambda} \frac{\partial z_\beta}{\partial w_u} + \sum_\alpha \frac{\partial r}{\partial z_\alpha} \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial w_\lambda \partial w_u},$$

则

$$\left.\frac{\partial^2 r}{\partial w_\lambda \partial w_u}\right|_{w=0} = \sum_{\alpha,\beta} \left.\frac{\partial^2 r}{\partial z_\alpha \partial z_\beta}\right|_{z=0} \delta_{\alpha\lambda}\delta_{\beta u} + a_{\lambda u}.$$

因此, 若取 $a_{\lambda u} = -\left.\dfrac{\partial^2 r}{\partial z_\lambda \partial z_u}\right|_{z=0}$, 就有 $\left.\dfrac{\partial^2 r}{\partial w_\lambda \partial w_u}\right|_{w=0} = 0$, 当 $\left.\dfrac{\partial^2 r}{\partial w_u \partial \overline{w}_v}\right|_{w=0} > 0$ 时,

$$\begin{aligned} r &= \sum_u \left.\frac{\partial r}{\partial w_u}\right|_{w=0} w_u + \sum_u \left.\frac{\partial r}{\partial \overline{w}_u}\right|_{w=0} \overline{w}_u + \sum_{u,v} \left.\frac{\partial^2 r}{\partial w_u \partial \overline{w}_v}\right|_{w=0} w_u \overline{w}_v + o(|w|^3) \\ &\geqslant \sum_u \left.\frac{\partial r}{\partial w_u}\right|_{w=0} w_u + \sum_u \left.\frac{\partial r}{\partial \overline{w}_u}\right|_{w=0} \overline{w}_u + \frac{1}{2}\sum_{u,v} \left.\frac{\partial^2 r}{\partial w_u \partial \overline{w}_v}\right|_{w=0} w_u \overline{w}_v. \end{aligned}$$

所以, 我们选取定义函数 r 使得 $\left(\left.\dfrac{\partial^2 r}{\partial w_u \partial \overline{w}_v}\right|_{w=0}\right)$ 在 $w=0$ 点是正定的, 则上式就表明 G 在 y 点关于坐标 $(w_1, \cdots, w_n)$ 是欧氏凸的. □

此定理只是局部的情形, 而一般整体来讲无此结果; 但有些特殊区域, 全纯凸就等价于欧氏凸. 管状域就是具有这种性质的域.

定义 2.3 $T_G \subset \mathbf{C}^n$,

$$T_G = \{z \in \mathbf{C}^n | \mathrm{Re}\ z \in G\},$$

这里 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个域, T_G 就称为**管状域**或 $\mathbf{R}^n$ **上域** G **上的管**.

定理 2.4 T_G 是管状域, 下列三个条件等价:

(1) T_G 是全纯凸;

(2) T_G 是欧氏凸;

(3) G 是欧氏凸.

(2) 与 (3) 的等价是显然的; (1) 与 (2) 的等价证明是 Bochner 给出的, 其中 (2) $\Longrightarrow$ (1) 自然亦是显然的, 因此所要证明的就是 (1) $\Longrightarrow$ (3), 这要用到一个引理, 为了叙述与证明的清晰, 这里仅对 $n=2$ 的情形进行考虑, 对于 $n>2$ 的情形完全是类似的.

引理 2.5　设 G 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个域, T_G 是 G 上的管. 设开集 $\triangle aOb$ 是 G 内的一个三角形. 设 $\Gamma = [O,a] \cup [O,b] \subset G$, A_λ 表示闭三角形 $\overline{\triangle} O\lambda a\lambda b$, 这里 $0 < \lambda < 1$. 如果 T_G 是全纯凸, 则对任意 $\lambda, 0 < \lambda < 1$, 存在 $M_\lambda > 0$ 使得 $K_\lambda = T_\Gamma \cap \{|\mathrm{Im}\, z| \leqslant M_\lambda\}$ 的全纯凸包 $\hat{K}_\lambda \supset A_\lambda$, 这里 $T_\Gamma = \{z \in \mathbf{C}^2 | \mathrm{Re}\, z \in \Gamma\}$.

现在要证明 G 是凸的. 由于 G 是域, 故 G 内任意两点均可以用有限线段所构成的一条折线联结起来, 如果我们能证明一条由两条线段连起来的折线在 G 中, 必可推出此折线之两个端点的连线亦在 G 中, 这就证明了 G 是凸的.

现在设折线 aOb 在 G 中, 由 $O \in G$, 故引理 2.5 中所定义的 A_λ, 当 λ 充分小时自然有 $A_\lambda \subset G$. 假定有一个最大的 $\lambda_0 < 1$, 使所有 $\lambda < \lambda_0$ 时, $A_\lambda \subset G$, 现在来说明这是不可能的.

由引理 2.5 知, 对任意 $\lambda \in (0,1)$, 存在 T_G 中紧集 $\hat{K}_\lambda$ 的全纯凸包 K_λ, 满足 $\hat{K}_\lambda \supset A_\lambda$. 由 T_G 是全纯域, 因此 $d(K_\lambda) = d(\hat{K}_\lambda) \geqslant \epsilon > 0$, 而 $d(K_\lambda)$ 主要决定于实的方向, 因此这里可取到的 $\epsilon > 0$ 是与 λ 无关的. 因此, A_λ 与 ∂G 至少有距离 $\epsilon > 0$, 故它不可能在某个 λ_0 处停下, 使 $A_{\lambda_0} \not\subseteq G$. 因此, $A_1 \subset G$, 联结 a, b 的线段都在 G 中, 进而 G 是欧氏凸的.

证明: [引理 2.5 的证明] 不失一般性, 我们可选取适当坐标使得 O 就是坐标原点, $a = (1,0)$ 且 $b = (0,1)$. 现在作复曲线

$$S_\epsilon : z_1 + z_2 - \epsilon(z_1^2 + z_2^2) = 1 - \epsilon, \qquad \epsilon > 0.$$

这个 S_ϵ 是二维的, 由 $z_i = x_i + \sqrt{-1} y_i;\ \ i = 1,2$. 它的实表示为

$$x_1 + x_2 - \epsilon(x_1^2 + x_2^2) + \epsilon(y_1^2 + y_2^2) = 1 - \epsilon, \tag{2.9}$$

$$y_1 + y_2 - 2\epsilon(x_1 y_1 + x_2 y_2) = 0. \tag{2.10}$$

(2.9) 等价于 (见图 2.1)

$$y_1^2 + y_2^2 = \left(x_1 - \frac{1}{2\epsilon}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2\epsilon}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon}\right).$$

$a = (1,0), b = (0,1) \in \mathbf{R}^2$ 是属于 S_ϵ 的, S_ϵ 与平面 Ox_1x_2 之交正好是经过 a, b 的圆周 (见图 2.1), 它的圆心为 $\left(\dfrac{1}{2\epsilon}, \dfrac{1}{2\epsilon}\right)$. 现在将 S_ϵ 与实三维平面 A, B 所围成的区域记为 Ω, $\Omega \subset T_G$. Ω 的边界是由三部分组成, 一部分是图 2.1 中 $eOad$ 所表示的三维区域, 它不仅包含在 A 中, 而且包含在 T_Γ 中; 另一部分是 $eObd$ 所围成的三维区域, 它包含在 B 中, 亦同样在 T_Γ 中; 另外就是 S_ϵ 介于 T_Γ 中的那一部分, 今用 $\tilde{S}_\epsilon$ 记之.

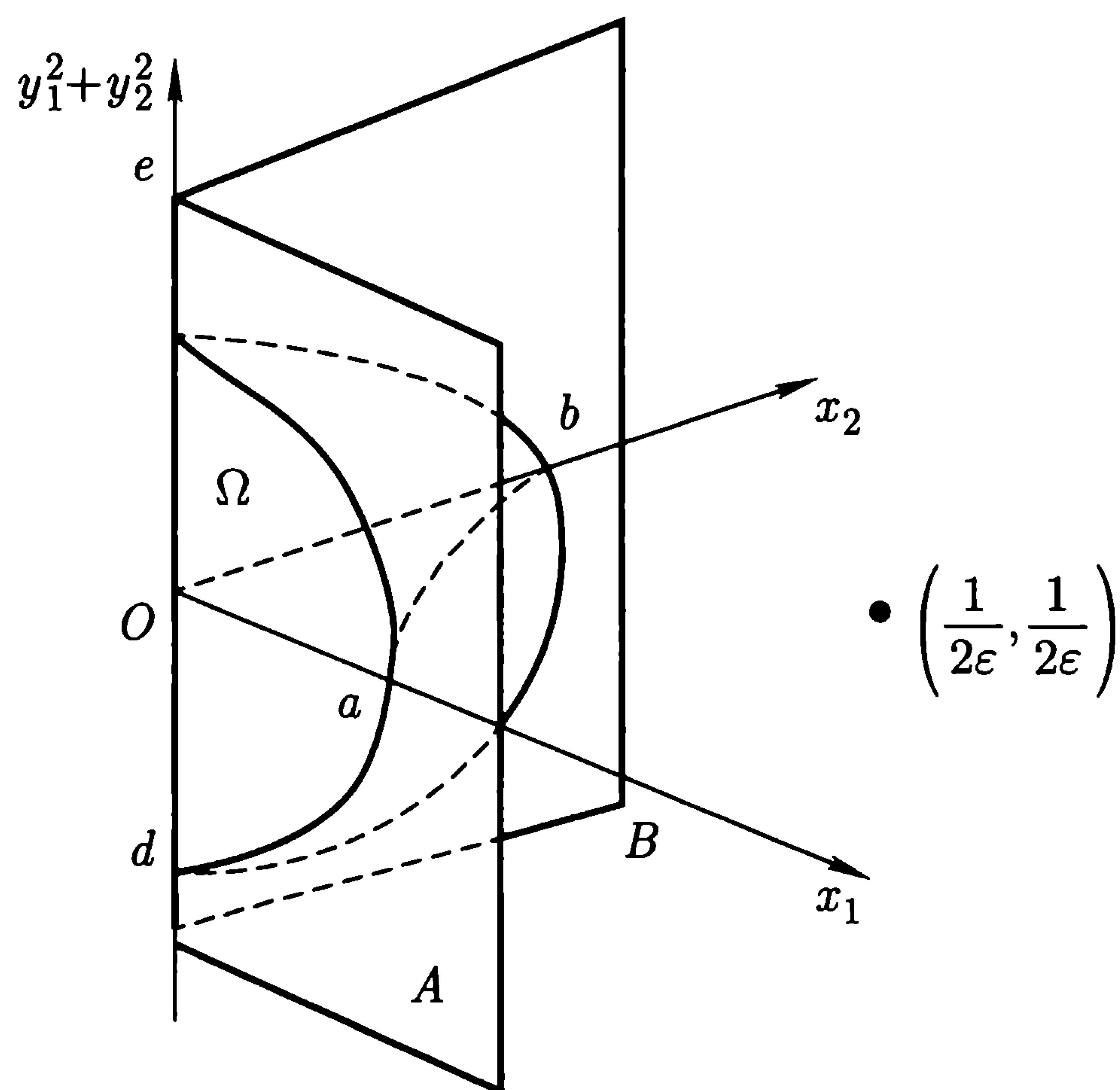


图 2.1

当 $\epsilon \to 0$ 时, 图 2.1 中所示的 $\widehat{ab}$ 就趋近于直线, 因此对任意 $\lambda, 0 < \lambda < 1$, 总能找到充分小的 $\epsilon \to 0$ 使 A_λ 在 Ω 中. 对给定的 ϵ,

$$\operatorname*{Sup}_{z\in\Omega}|\text{Im } z| = \frac{1}{\epsilon}.$$

因此任取 $M_\lambda > \dfrac{1}{\epsilon} > 0$, 则

$$K = T_\Gamma \cap \{|\text{Im } z| \leqslant M_\lambda\} \text{ 的全纯凸包 } \supset A_\lambda.$$

因为 $P := (T_\Gamma \cap \{|\text{Im } z| \leqslant M_\lambda\}) \cup \tilde{S}_\epsilon \supset \partial\Omega, \forall f \in \mathcal{O}(T_G)$,

$$\operatorname*{Sup}_{z\in\Omega}|f(z)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{z\in P}|f(z)|. \tag{2.11}$$

又由于 $\tilde{S}_\epsilon$ 是复直线的一部分, 则 $f|_{\tilde{S}_\epsilon}$ 上的极大模亦必能在它的边界上取到, 亦即必在图 2.1 中曲线段 $\widetilde{ead}$ 和 $\widetilde{ebd}$ 上取到, 因此

$$\operatorname*{Sup}_{z\in\tilde{S}_\epsilon}|f(z)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{z\in(T_\Gamma\cap\{\text{Im } z\leqslant M_\lambda\})}|f(z)|. \tag{2.12}$$

由 (2.11) 和 (2.12) 知道, 对任意 $z \in \Omega$, 任意 $f \in \mathcal{O}(T_G)$,

$$|f(z)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{z\in(T_\Gamma\cap\{\text{Im } z\leqslant M_\lambda\})}|f(z)|.$$

此即 $z \in \hat{K}, A_\lambda \subset \Omega$, 故 $A_\lambda \subset \hat{K}$. □

定义 2.6 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域, 如果 $(z_1,\cdots,z_n)\in\Omega$, 则对所有 $(z_1',\cdots,z_n')$, 当 $|z_1'|=|z_1|,\cdots,|z_n'|=|z_n|$ 时, 有 $(z_1',\cdots,z_n')\in\Omega$, 就称 Ω 为 **Reinhardt 域**.

定义 2.7 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个域, 如果集合 $\{(\log|z_1|,\cdots,\log|z_n|)\in\mathbf{R}^n|z=(z_1,\cdots,z_n)\in\Omega,\forall z_v\neq 0,v=1,2,\cdots,n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个欧氏凸域, 就称 Ω 是**对数凸的**, $\mathbf{R}^n$ 中的这个域就称为 Ω 的对数像.

定义 2.8 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个域, 如果对任意 $z=(z_1,\cdots,z_n)\in\Omega$, 对 $z'=(z_1',\cdots,z_n')$, 当 $|z_i'|\leqslant|z_i|,i=1,2,\cdots,n$ 时, 有$z'\in\Omega$, 就称 Ω 是**完全域**.

显然所有完全域都是 Reinhardt 域.

定理 2.9 设 Ω 是 Reinhardt 域, 如果 $0\in\Omega$, 则 Ω 是全纯域当且仅当下面两个条件同时成立:

(1) Ω 是对数凸的;

(2) Ω 是完全的.

证明: 首先我们假定条件 (1) 与 (2) 已满足, 来证明 Ω 是全纯域.

设 K 是 Ω 中的任一紧集, 因为 Ω 是完全的, 故必存在有限个闭多圆柱 $P_1,\cdots,P_l;P_k=\{z\in\mathbf{C}^n\big||z_j|\leqslant a_j^k\},1\leqslant k\leqslant l$, 使得

$$K\subset\bigcup_{1\leqslant k\leqslant l}P_k\subset\Omega.$$

对 $\forall x\in\hat{K}$, 根据 $\hat{K}$ 的定义与 $z_1^{v_1}\cdots z_n^{v_n}$, 我们知道

$$|(z_1^{v_1}\cdots z_n^{v_n})(x)|\leqslant\operatorname*{Sup}_K|z_1^{v_1}\cdots z_n^{v_n}|\leqslant\operatorname*{Sup}_{1\leqslant k\leqslant l}\left|(a_1^k)^{v_1}\cdots(a_n^k)^{v_n}\right|.\tag{2.13}$$

要证明 $\hat{K}$ 是紧的, 仅需证明 $\hat{K}$ 在 $\mathbf{C}^n$ 的闭包 L 在 Ω 中. $\forall x\in L$, 设 $(z_{i_1},\cdots,z_{i_s})$ 由 $(z_1(x),\cdots,z_n(x))$ 中不等于零的那些元素所组成, 由 (2.13), 对 $\forall x\in\hat{K}$, 同样有

$$|(z_{i_1}^{v_1}\cdots z_{i_s}^{v_s})(x)|\leqslant\operatorname*{Sup}_K|z_{i_1}^{v_1}\cdots z_{i_s}^{v_s}|\leqslant\operatorname*{Sup}_{1\leqslant k\leqslant l}|(a_{i_1}^k)^{v_1}\cdots(a_{i_s}^k)^{v_s}|.$$

若 $z_{i_1}^{v_1}\cdots z_{i_s}^{v_s}(x)\neq 0$, 则

$$v_1\log|z_{i_1}|+\cdots+v_s\log|z_{i_s}|\leqslant\operatorname*{Sup}_{1\leqslant k\leqslant l}\sum_{\alpha=1}^{s}v_\alpha\log a_{i_\alpha}^k.\tag{2.14}$$

(2.14) 对所有 $v_i\geqslant 1;i=1,\cdots,s$ 的整数都成立. 进一步, 它对所有正的有理数 $v_i;i=1,\cdots,s$ 亦成立, 由连续性, 它对所有正实数 $v_i;i=1,\cdots,s$ 亦成立. 同样由连续性, 对 $\forall x\in L$, 当 $(z_{i_1},\cdots,z_{i_s})\neq 0$ 时, (2.14) 还是成立的.

现在 Ω 是对数凸的, 设 B 是它的对数像, 则 B 在 $\mathbf{R}^n$ 的任何子空间上的投影也是凸的, 因此 B 在 $(|z_{i_1}|,\cdots,|z_{i_s}|)$ 这个空间上的投影像是凸的, 记为 B_s, 而 $(b_{i_1},\cdots,b_{i_s})\in\mathbf{R}^s$ 满足

$$v_1b_{i_1}+\cdots+v_sb_{i_s}\leqslant\operatorname*{Sup}_{1\leqslant k\leqslant l}\sum_{\alpha=1}^{s}v_\alpha\log a_{i_\alpha}^k$$

就一定在 $\bigcup\limits_{k=1}^{l}\{x\in\mathbf{R}^s|x_1\leqslant\log a_{i_1}^k,\cdots,x_s\leqslant\log a_{i_s}^k\}$ 的凸包中, 由 B_s 是欧氏凸的, 因此 $\bigcup\limits_{\alpha=1}^{l}\{x\in\mathbf{R}^s|x_1\leqslant\log a_{i_\alpha}^1,\cdots,x_s\leqslant\log a_{i_\alpha}^s\}$ 的凸包在 B_s 中, 所以必有某个 $\xi\in\Omega$ 而 $\xi_{i_1}=z_{i_1}(x),\cdots,\xi_{i_s}=z_{i_s}(x)$. 又因为 Ω 是完全的且 $|z_1(x)|\leqslant|\xi_1|,\cdots,|z_n(x)|\leqslant|\xi_n|$, 所以这个 $x\in L$, 亦有 $x\in\Omega$. 这表明 Ω 是一个全纯域.

现在来证明定理的另一半. 由 Ω 是一个 Reihardt 域, 如果 $w\in\Omega$, 则有 w 的小邻域在 Ω 中. 由 Ω 是一个 Reihardt 域:

$$\{z\in\mathbf{C}^n\big||w_1|-\epsilon<|z_1|<|w_1|+\epsilon,\cdots,|w_n|-\epsilon<|z_n|<|w_n|+\epsilon\}$$

(如果某些 $w_i=0$, 则在 Ω 中利用 $|z_i|<\epsilon$ 代替 $|w_i|-\epsilon<|z_i|<|w_i|+\epsilon$), 这里 $\epsilon>0$ 是足够小的实数. 则在此环上, 对每个变量的逐次积分, 可以将 $f(z)$ 在这个环上 Laurent 展开, 且由唯一性定理, 可以说明这些展开是一致的. 但是又由 $0\in\Omega$ 且 f 在 0 附近是全纯的, 所以这个 Laurent 级数中负的幂次项都不出现, 所以 f 就能在域 Ω 中展开为 Taylor 级数. 现在由 Ω 是全纯域, 所以一定有一个 $f_0\in\mathcal{O}(\Omega)$, 而 f_0 不能延拓到较大的域, 亦即 f_0 的 Taylor 级数在 $\mathbf{C}^n$ 中的收敛域就是 Ω.

设 f_0 在原点的 Taylor 级数为

$$f_0=\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha. \tag{2.15}$$

如果 $x\in\Omega$, 则 $\sum\limits_\alpha a_\alpha z^\alpha(x)$ 是收敛的; 对 $\forall y\in\mathbf{C}^n$, 如果 $|z_1(y)|\leqslant|z_1(x)|,\cdots,|z_n(y)|\leqslant|z_n(x)|$, 则 $\sum\limits_\alpha a_\alpha z^\alpha(y)$ 收敛. 故 $y\in\Omega$, 这就表示 Ω 是完全的.

设 Ω^* 是 $\mathbf{C}^n$ 中的域:

$$\Omega^*=\{x\in\mathbf{C}^n|\ \text{存在正数}\ c\ \text{使得}\ |a_\alpha z^\alpha(x)|\leqslant c\ \text{对于}\ \forall\alpha\ \text{均成立}\}.$$

如果 $x\in\Omega^*,y\in\mathbf{C}^n$ 且 $|z_i(y)|<|z_i(x)|;i=1,\cdots,n$, 则 (2.15) 中的 $\sum\limits_\alpha a_\alpha z^\alpha(y)$

显然是收敛的. 因此 Ω 是由 Ω^* 的内点所组成. 设 $\forall x, y \in \Omega^*$, 此即存在正数 c 使得

$$|a_\alpha z^\alpha(x)| \leqslant c \text{ 且 } |a_\alpha z^\alpha(y)| \leqslant c, \qquad \forall \alpha,$$

这样对 $a_\alpha \neq 0, z^\alpha(x) \neq 0, z^\alpha(y) \neq 0$, 我们有

$$\log|a_\alpha| + \sum_{v=1}^{n} \alpha_v \log|z_v(x)| \leqslant \log\ c, \qquad \forall \alpha$$

且

$$\log|a_\alpha| + \sum_{v=1}^{n} \alpha_v \log|z_v(y)| \leqslant \log\ c, \qquad \forall \alpha.$$

进一步, 如果存在 $\lambda, \mu \geqslant 0$ 且 $\lambda + \mu = 1$, 我们有

$$\log|a_\alpha| + \sum_{v=1}^{n} a_v(\lambda \log|z_v(x)| + \mu \log|z_v(y)|) \leqslant \log c. \tag{2.16}$$

(2.16) 表明如果 $(\log|z_1(x)|, \cdots, \log|z_n(x)|)$ 和 $(\log|z_1(y)|, \cdots, \log|z_n(y)|)$ 是属于 Ω^* 的对数像, 则 $(\lambda \log|z_1(x)| + \mu \log|z_1(y)|, \cdots, \lambda \log|z_n(x)| + \mu \log|z_n(y)|)$ 也是属于 Ω^* 的对数像, 此即 Ω^* 的对数像是凸的, 所以 Ω 的对数像也是凸的. □

定理 2.9 非常有用, 下面的例子将用这个定理来计算包含 $\mathbf{C}^n$ 中的某些域的最小的全纯域.

例如: $G = \left\{(z,w) \in \mathbf{C}^2 \middle| |z| < \frac{1}{2}, |w| < 1\right\} \cup \left\{(z,w) \in \mathbf{C}^2 \middle| |z| < 1, |w| < \frac{1}{2}\right\}$,

$$\varphi : (z, w) \longrightarrow (\log|z|, \log|w|).$$

图 2.2 右边那个阴影部分是 G 的对数像. 根据定理 2.9, 包含 G 的最小全纯

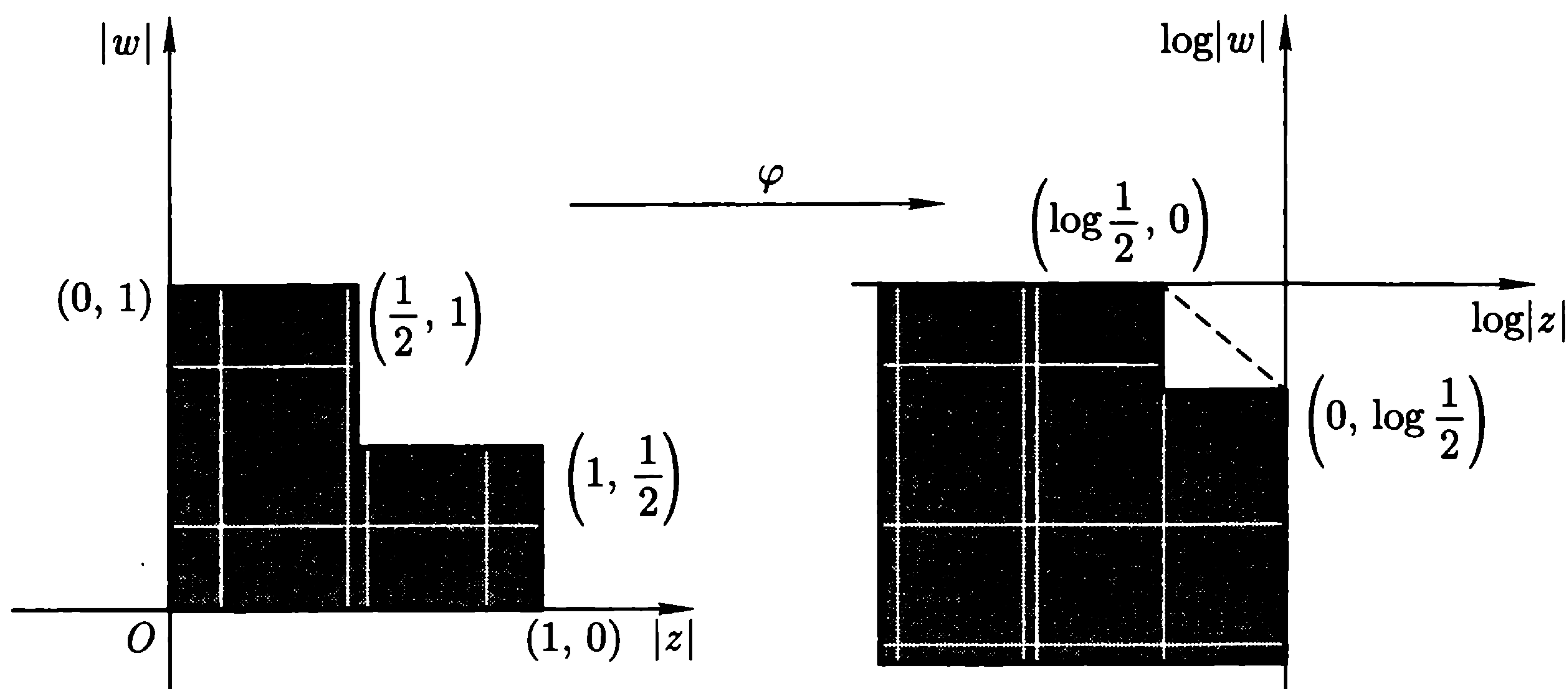


图 2.2

域的对数像必须是凸的, 亦即要加上连接 $\left(\log\frac{1}{2},0\right)$ 和 $\left(0,\log\frac{1}{2}\right)$ 这条线段下面那个小三角形, 因此包含 G 的最小全纯域如图 2.3 所示, 是原来 G 加上 $|zw|=\frac{1}{2}$ 那一段在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 与 $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 之间的双曲线段以下部分.

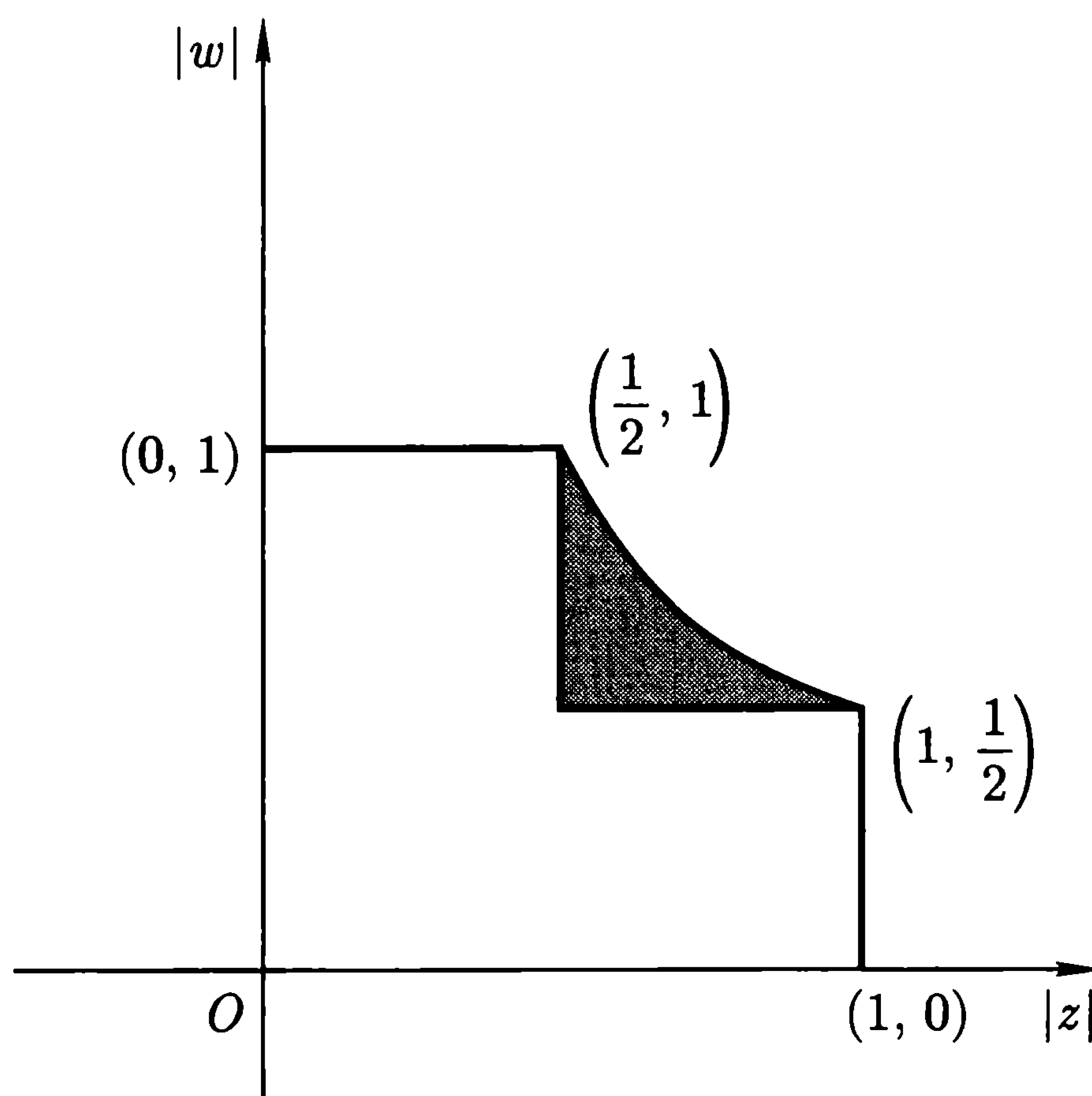


图 2.3

对于全纯域的研究就是由 Hartogs 的特殊例子开始的, 然后进一步研究一些特殊区域的全纯凸包 (即包含这个区域的最小全纯域). 下面要讲述的研究拟凸域的多次调和函数亦是 1906 年 Hartogs 在研究一类具体域时首先发现其与全纯域、拟凸域的关系.

定理 2.10 $D\subset \mathbf{C}, R$ 是 D 上的上半连续的正实值函数.

$$\Omega=\{(z,w)\in \mathbf{C}^2 | z\in D, |w|<R(z)\}.$$

如果 Ω 是全纯域, 则 $-\log R$ 是次调和的.

1906 年, Hartogs 证明了上述定理. 现在知道这个定理之逆亦成立. 在证明这个定理之前, 我们先引入一些定义.

定义 2.11 $\Omega\subset \mathbf{C}^n$ 是一个域, 设有一族映射

$$\varphi_v:\overline{\Delta}\longrightarrow \Omega,\qquad v=1,2,\cdots,$$

这里 $\Delta=\{z\in\mathbf{C}||z|<1\}$ 是圆盘, φ_v 在 $\overline{\Delta}$ 上是连续的, 在 Δ 上是全纯的, 如果

$$\left(\bigcup_{v=1}^{\infty}\varphi_v(\partial\Delta)\right)\subset\subset\Omega,$$

则

$$\left(\bigcup_{v=1}^{\infty}\varphi_v(\Delta)\right)\subset\subset\Omega.$$

就称 Ω **具有圆盘性质**.

如果 Ω 是全纯凸的, 令 $K=\bigcup_{v=1}^{\infty}\varphi_v(\partial\Delta)$ 是紧集, $\hat{K}\supset\left(\bigcup_{v=1}^{\infty}\varphi_v(\Delta)\right)$ 是紧的(这个包含关系根据的是全纯函数的最大模原理), 所以 $\left(\bigcup_{v=1}^{\infty}\varphi_v(\Delta)\right)\subset\subset\Omega$. 因此, 若 Ω 是全纯凸的, 则 Ω 具有圆盘性质.

定义 2.12 Ω 是 $\mathbf{C}$ 中的域, h 是 Ω 上的实值函数. 如果 h 在 Ω 上是上半连续的且满足对每一个小圆盘 $\overline{\Delta}=\{z\in\Omega\big||z-z_0|\leqslant r\}\subset\Omega$,

$$h(z_0)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(z_0+re^{i\theta})d\theta,$$

则称 h 为 Ω 上的**次调和函数**.

证明: [定理 2.10 的证明] 如果 $-\log R$ 在 D 上不是次调和的, 则存在小的闭圆盘 $\overline{\Delta}=\{z\in\Omega\big||z-z_0|\leqslant r\}\subset D$, 使得

$$-\log R(z_0)>\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-\log R(z_0+re^{i\theta}))d\theta.$$

不失一般性, 假设 $z_0=0$ 且 $r=1$, 我们用 $-\log R$ 在 $\partial\Delta$ 上的值来构造 $\overline{\Delta}$ 上的调和函数 u, 而且在 Δ 内 $u=\mathrm{Re}\,f$. 这里 f 在 Δ 上全纯且在 $\partial\Delta$ 上连续.

大家熟知, 这个调和函数 $u(z)$ 是用 Poisson 积分来构造的,

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-\rho^2)\big(-\log R(e^{i\theta})\big)}{\rho^2+1-2\rho\cos(\theta-\varphi)}d\theta,\quad z=\rho e^{i\varphi}.$$

令 $\xi=e^{i\theta}$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left\{\frac{\xi+z}{\xi-z}\right\}&=\mathrm{Re}\left\{\frac{(\xi+z)(\overline{\xi}-\overline{z})}{(\xi-z)(\overline{\xi}-\overline{z})}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1-\rho^2-i2\rho\sin(\theta-\varphi)}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\varphi)}\right\}\\&=\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\varphi)}.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}u(z)&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-\log R(\xi))\mathrm{Re}\left\{\frac{\xi+z}{\xi-z}\right\}d\theta=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-\log R(\xi))\frac{\xi+z}{\xi-z}\frac{d\xi}{i\xi}\right\}\\&=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}(-\log R(\xi))\frac{\xi+z}{(\xi-z)\xi}d\xi\right\}.\end{aligned}$$

但 $\dfrac{\xi+z}{(\xi-z)\xi}=\dfrac{1}{\xi-z}+\dfrac{z}{(\xi-z)\xi}=\dfrac{1}{\xi-z}+\dfrac{1}{\xi-z}-\dfrac{1}{\xi}=\dfrac{2}{\xi-z}-\dfrac{1}{\xi}$. 因此

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{-2\log\ R(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=1}\frac{-\log\ R(\xi)}{\xi}d\xi$$

定义一个在 $|z|<1$ 上全纯, 在 $|z|=1$ 上连续的全纯函数 $f(z)$, 它的实部就是调和函数 $u(z)$. 因此在 f 上加上适当的正实数, 新的全纯函数仍用 f 记之, 使得

$$\begin{cases}-\log R<\mathrm{Re}\,f, & \text{在 } \partial\Delta \text{ 上},\\ -\log R(0)=\mathrm{Re}\,f(0),\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}R(z)>|e^{-f(z)}|, & z\in\partial\Delta,\\ R(0)=|e^{-f(0)}|.\end{cases}\tag{2.17}$$

作映射

$$\varphi_\lambda:\overline{\Delta}\longrightarrow\Omega,\qquad \lambda=1,2,\cdots,$$
$$z\longmapsto\left(z,e^{-f(z)}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\right).$$

要验证 $\bigcup\limits_{\lambda\in\mathbf{Z}^+}\varphi_\lambda(\partial\Delta)\subset\subset\Omega$, 假设它不成立, 那么存在序列 $\left(z_n,\ e^{-f(z_n)}\left(1-\dfrac{1}{\lambda_n}\right)\right)$ 趋向于 $\partial\Omega$. 不失一般性, 我们假定 $z_n\to z_0\in\partial\Omega$ 和 $\left(1-\dfrac{1}{\lambda_n}\right)\to a\leqslant 1$, 则 $\left(z_0,\ e^{-f(z_0)}a\right)\in\partial\Omega$, 即 $R(z_0)=a\left|e^{-f(z_0)}\right|$, 这与 (2.17) 中第一个等式矛盾. 故此验证 $\bigcup\limits_{\lambda\in\mathbf{Z}^+}\varphi_\lambda(\partial\Delta)\subset\subset\Omega$, 且 (2.17) 中的第二个等式表示这族 $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\mathbf{Z}^+}$ 不具有圆盘性质, 这与 Ω 是全纯域矛盾. 所以 $-\log R$ 是次调和的. □

§2.2 多次调和函数

定义 2.13 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个域, $u(z_1,\cdots,z_n)$ 是 Ω 上的实值函数, 如果它满足:

(1) u 是上半连续的;

(2) u 限制在每条复直线上是次调和的,

则称 u 在 Ω 上是**多次调和**的.

上述定义中的 (2) 的限制在复直线的确切意义是对 $\forall z_0\in\Omega$ 与 $\forall a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbf{C}^n$, $z_0+a\mathbf{C}$ 为经过 z_0 且以 a 为方向的复直线, u 在 $(z_0+a\mathbf{C})\cap\Omega$ 上是次调和的.

容易验证, 如果 u 在 $D \subset \mathbf{C}$ 上是次调和的, 且 $u \in C^2$, 这就等价于在 D 上 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} \geqslant 0$. 类似的, 如果 u 在 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 上是多次调和的且 $u \in C^2$, 则等价于 $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \geqslant 0$ 在 Ω 上成立.

由定义我们可以证明下面的事实. 令 $\{u_v\}$ 是一族 $D \subset \mathbf{C}$ 上的次调和函数, 如果 $u(x) = \operatorname{Sup}\limits_v u_v(x)$ 在 D 上是上半连续的, 则它在 D 上也是次调和的. 类似的, $\{u_v\}$ 是一族在 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 上的多次调和函数, 如果 $u(x) = \operatorname{Sup}\limits_v u_v(x)$ 是下半连续的, 则它是 Ω 上的多次调和函数.

定理 2.14 令 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 上的域. $x \in \Omega$, $d(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbf{C}^n \backslash \Omega)$ (即为 x 到 Ω 边界的欧氏距离). 如果 Ω 是全纯域, 则 $-\log d$ 是多次调和的.

证明: a 是 $\mathbf{C}^n$ 上的一个单位向量. $\forall x \in \Omega$, $d_a(x) = \operatorname{dist}(x, x + a\mathbf{C}\backslash\Omega)$, 则 $d(x) = \inf\limits_a d_a(x)$. 因此 $-\log d(x) = \operatorname{Sup}\limits_a(-\log d_a(x))$, 故我们只需证明 $-\log d_a(x)$ 是次调和的.

这里仅对 $n = 2$ 的情形来证明, 这个方法可以容易地推广到 $n > 2$ 的情形. 不失一般性, 可取 $a = (0, 1) \in \mathbf{C}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha : \mathbf{C}^2 &\longrightarrow \mathbf{C}^2, \qquad 0 \leqslant \alpha < 2\pi, \\ (z_1, z_2) &\longmapsto (z_1, e^{i\alpha} z_2). \end{aligned}$$

φ_α 是从 Ω 到 $\mathbf{C}^2$ 中的域 $\Omega_\alpha = \varphi_\alpha(\Omega)$ 的双全纯映射. 显然 Ω_α 是全纯域. 根据全纯域的定义, $\bigcap\limits_{0\leqslant\alpha<2\pi} \Omega_\alpha$ 是全纯域. 现在我们知道

$$\bigcap_{0\leqslant\alpha<2\pi} \Omega_\alpha = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 | z_1 \in D, |z_2| < d_a(z_1)\},$$

这里 D 是 Ω 在复平面 z_1 上的投影所成的域. 因此由定理 2.10, $-\log d_a$ 是次调和的, 故定理证毕. □

Levi 问题是问拟凸域是否一定是全纯域. 定理 2.14 表明, $-\log d$ 在全纯域上是多次调和的, 因此如果拟凸域一定是全纯域, 则 $-\log d$ 一定是多次调和的. 下面我们就证明这一事实.

定理 2.15 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的拟凸域, 且它的边界是 C^2 的, 则 $-\log d$ 是多次调和的.

证明: 由于 $\partial\Omega$ 是可微的, 所以 $-\log d$ 亦可微. 因此, 如果 $-\log d$ 不是在 Ω

上多次调和的, 则必有 $z \in \Omega$, $w = (w_1, \cdots, w_n) \in \mathbf{C}^n$, 使得

$$c = \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\overline{\tau}} \log d(z+\tau w)|_{\tau=0} > 0, \quad \tau \in \mathbf{C}. \tag{2.18}$$

现在在 z 点展开 $\log d$,

$$\log d(z+\tau w) = \log d(z) + \mathrm{Re}(A\tau + B\tau^2) + c|\tau|^2 + o(|\tau|^2), \quad \tau \to 0. \tag{2.19}$$

选取向量 a 为 z 到 $\partial\Omega$ 距离最短的那个方向, 且 $a + z \in \partial\Omega$. 定义全纯曲线:

$$z(\tau) = z + \tau w + a e^{A\tau + B\tau^2}. \tag{2.20}$$

由 (2.19), 得

$$d(z+\tau w) \geqslant |e^{A\tau+B\tau^2}| \cdot e^{\frac{c}{2}|\tau|^2} \cdot d(z). \tag{2.21}$$

如果 $z + \tau w \in \Omega$, 则根据三角不等式及 (2.21), 可推出

$$\begin{aligned} d(z(\tau)) &\geqslant d(z+\tau w) - |a||e^{A\tau+B\tau^2}| \\ &\geqslant |e^{A\tau+B\tau^2}| d(z)(e^{\frac{c}{2}|\tau|^2} - 1). \end{aligned} \tag{2.22}$$

由 (2.22), 当 $z+\tau w \in \Omega$ 时, 除了 $\tau = 0$ 外, 都有 $d(z(\tau)) > 0$. 此即表示存在一个实数 $\eta > 0$, 当 $|\tau| < \eta, z(\tau) \in \Omega$ 时, 除了 $z(0) \in \partial\Omega$ 外, 其余 $z(\tau)$ 均属于 Ω, 则 $z(\tau)$ 在 $z(0)$ 处切于 $\partial\Omega$. 所以

$$\begin{aligned} d(z(\tau)) &\geqslant |a e^{A\tau+B\tau^2}|(e^{\frac{c}{2}|\tau|^2} - 1) \\ &= |a||1 + A\tau + B\tau^2 + o(|\tau|^2)| \left(\frac{c}{2}|\tau|^2 + o(|\tau|^2)\right) \\ &\geqslant \frac{c}{4}|\tau|^2|a|. \end{aligned}$$

由 $d(z(\tau))$ 在 $z(0)$ 点的 Taylor 展开,

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\overline{\tau}} d(z(\tau))|_{z(0)} > 0. \tag{2.23}$$

现在我们有在 $z(0) \in \partial\Omega$ 附近的定义函数

$$r(x) = \begin{cases} -d(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \partial\Omega, \\ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega), & x \in \mathbf{C}^n \backslash \Omega. \end{cases}$$

则在 Ω 上 $r(x) = -d(x)$, 由于 Ω 是拟凸的, 因此 $\left(\frac{\partial^2 r}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ 是在 $z(0)$ 处

切空间上半正定的, 但现在 $z(\tau)$ 是在 $z(0)\in\partial\Omega$ 处切于 $\partial\Omega$ 的. (2.23) 即表示 $\left(\dfrac{\partial^2 r}{\partial z_i\partial\bar z_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 在 $z(0)\in\partial\Omega$ 处沿着 $z(\tau)$ 的方向, 即沿着 $z'(0)$ 的方向是负定的, 这与拟凸域的定义矛盾.

根据上述定理, 如果 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界拟凸域, 它的边界 $\partial\Omega$ 是 C^2 的, 我们可定义一个整体的定义函数 $r(x)$,

$$r(x)=\begin{cases}-\mathrm{dist}(x,\partial\Omega), & x\in\Omega,\\ 0, & x\in\partial\Omega,\\ \mathrm{dist}(x,\partial\Omega), & x\in\mathbf{C}^n\setminus\Omega.\end{cases}$$

当 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中有界拟凸域, 具有 C^2 边界, 而且当 $x\to\partial\Omega, -\log d\to+\infty$ 时, $-\log d$ 是多次调和的. □

另外应说明的是, 上面我们的证明是要求 Ω 的边界是 C^2 的, 实际这个条件也是可以除去的, 在此就不详加说明了.

定义 2.16 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$, Ω 上的一个多次调和函数 φ, 若满足对任一实数 c, 使 $\{x\in\Omega|\varphi(x)\leqslant c\}$ 是 Ω 中的紧集, 则 φ 称为 Ω 上的多次调和穷竭函数. 如果 φ 还是**强多次调和**的, 则此时就称 φ 是**强多次调和穷竭函数**.

当 Ω 是 $\mathbf{C}^n$中有界拟凸域且具有 C^2 边界时, 上述 $-\log d$ 显然是 Ω 上的多次调和穷竭函数.

今用 $P(\Omega)$ 表示 Ω 上的多次调和函数全体所成的集合. 若 K 是 Ω 中的一个紧集,

$$\hat K_P=\{z\in\Omega|u(z)\leqslant\mathop{\mathrm{Sup}}_{y\in K}u(y),\forall u\in P(\Omega)\}$$

就称为 K 的**多次调和凸包**. 如果对 Ω 中的每一个紧集 K, 其对应的 $\hat K_P$ 都是相对紧的, 就称 Ω 为**多次调和凸**的.

定理 2.17 设 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个域, 则下面三个条件等价:

(1) $-\log d$ 在 Ω 上是多次调和的;

(2) Ω 上存在一个连续的多次调和穷竭函数 u;

(3) Ω 是多次调和凸的.

证明: (1) $\Longrightarrow$ (2) 取 $u(z)=\sum\limits_{v=1}^{n}|z_v|^2-\log d(z)$, 即满足 (2).

(2) $\Longrightarrow$ (3) 是显然的. 因为对 Ω 中的每个紧集 K,

$$\hat K_P\subset\{z\in\Omega|u(z)\leqslant\mathop{\mathrm{Sup}}_{y\in K}u(y)\},$$

而 $\{z\in\Omega | u(z)\leqslant \operatorname*{Sup}_{y\in K} u(y)\}$ 是相对紧的.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 假定对 $\forall z_0\in\Omega,\ b\in\mathbf{C}^n,\ b\neq 0$, 为了证明 $-\log d$ 是多次调和的, 我们只要证明存在

$$D=\{z_0+\tau b; |\tau|\leqslant r\}\subset\Omega$$

使得 $-\log d|_{\mathring{D}}$ 是次调和的. 现在设 $f(\tau)$ 是任一全纯多项式, 由于任意 $\mathring{D}$ 上的全纯函数都是全纯多项式的极限. 而在 $\mathring{D}$ 上调和且在 D 上连续的实函数一定是某个在 $\mathring{D}$ 上解析且在 D 上连续的全纯函数的实部. 因此我们若能证明有

$$-\log d(z_0+\tau b)\leqslant \mathrm{Re}f(\tau),\qquad 在\ |\tau|=r \tag{2.24}$$

上成立, 必蕴含

$$-\log d(z_0+\tau b)\leqslant \mathrm{Re}f(\tau),\qquad 在\ |\tau|\leqslant r$$

上成立. 那么我们就证明了 $-\log d$ 是多次调和的.

现在 (2.24) 就等价于

$$d(z_0+\tau b)\geqslant e^{-\mathrm{Re}f(\tau)}=|e^{-f(\tau)}|,\qquad |\tau|=r. \tag{2.25}$$

选取 $\forall a\in\mathbf{C}^n, \sum\limits_{v=1}^{n}|a_v|^2<1, 0\leqslant\lambda\leqslant 1$, 作映射

$$\tau\longrightarrow z_0+\tau b+\lambda a e^{-f(\tau)},\qquad |\tau|\leqslant r.$$

此映射的像记作 D_λ, 则 $D_0=D$. 令

$$\Lambda=\{\lambda | 0\leqslant\lambda\leqslant 1, D_\lambda\subset\Omega\}.$$

显然, Λ 是 $[0,1]$ 中的开集, 现在来证明 Λ 也是 $[0,1]$ 中的闭集. 设

$$K=\{z_0+b\tau+\lambda a e^{-f(\tau)} \| \tau|=r, 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}.$$

由 (2.25), $K\subset\Omega$ 而且它是紧集在连续映射下的像, 因此它是 Ω 中的一个紧集. 由 (3), 因此对 $\forall u\in P(\Omega)$, 对每个取定的 $\lambda, 0\leqslant\lambda\leqslant 1$, 映射

$$\tau\longrightarrow u(z_0+\tau b+\lambda a e^{-f(\tau)})$$

在 $|\tau|\leqslant r$ 的邻域内是多次调和的, 故我们有

$$u(z_0+\tau b+\lambda a e^{-f(\tau)})\leqslant \operatorname*{Sup}_{K} u,\qquad |\tau|\leqslant r.$$

则对 $\forall\lambda\in\Lambda$, $D_\lambda\subset\hat{K}_P$. 由于 $\hat{K}_P$ 是相对紧的, 因此若 $\lambda_0\in\overline{\Lambda}$, 则 $D_{\lambda_0}\subset\Omega$, 故 Λ 是闭的, 此亦表示 $\Lambda=[0,1]$. 故

$$z_0+\tau b+ae^{-f(\tau)}\in\Omega,\qquad 当\ \sum_{v=1}^{n}|a_v|^2<1,\qquad |\tau|\leqslant r.$$

这也就表示 (因为我们可以这样选取) $\sum\limits_{v=1}^{n}|a_v|^2<1\to 1$, 而且对每个 u 的每个方向, 我们有

$$d(z_0+\tau b)\geqslant|e^{-f(\tau)}|,\qquad |\tau|\leqslant r,$$

即

$$-\log d(z_0+\tau b)\leqslant \mathrm{Re}f(\tau),\qquad |\tau|\leqslant r.$$

这就证明了 (1). □

定义 2.18 定理 2.17 的任一条件的域, 称为**拟凸域**.

注意这个定义与定义 2.1 是不同的. 那里是要求边界是光滑的 (即为微分流形), 而这里对边界没有要求. 下面我们来说明, 当 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是 C^2 微分流形时, 此定义就与定义 2.1 等价.

首先, 假定 Ω 满足定理 2.17 中的等价条件, 而且 $\partial\Omega$ 是 C^2 的. 则 $-\log d$ 是 C^2 多次调和函数, 亦即对 $\forall z\in\Omega$, 矩阵

$$\left(-d^{-1}\frac{\partial^2 d(z)}{\partial z_\lambda\partial\overline{z}_u}+d^{-2}\frac{\partial d(z)}{\partial z_\lambda}\frac{\partial d(z)}{\partial\overline{z}_u}\right)_{1\leqslant\lambda,u\leqslant n}\tag{2.26}$$

是半正定的. 令

$$r(x)=\begin{cases}-d(x), & x\in\Omega,\\ 0, & x\in\partial\Omega,\\ \mathrm{dist}(x,\partial\Omega), & x\in\mathbf{C}^n\backslash\Omega,\end{cases}$$

则 $r(z)$ 是 Ω 上的 C^2 的定义函数. 但对 $\forall z\in\Omega$,

$$\left(\frac{\partial^2 r(z)}{\partial z_\lambda\partial\overline{z}_u}-r(z)^{-1}\frac{\partial r(z)}{\partial z_\lambda}\frac{\partial r(z)}{\partial\overline{z}_u}\right)_{1\leqslant\lambda,u\leqslant n}\tag{2.27}$$

是半正定的. 如果存在序列 $\{z_i\}\in\Omega$, $z_i\to z_0\in\partial\Omega$, 则 $\mathrm{grad}\,r(z_i)\longrightarrow\mathrm{grad}\,r(z_0)$. 类似的, $\mathbf{C}^n$ 中垂直于 $\mathrm{grad}\,r(z_0)$ 的复子空间, 即为 $z_0\in\partial\Omega$ 处的复切平面, 因此 z_0 的复切平面的任一向量 ξ 一定是 $\mathrm{grad}\,r(z_i)$ 的垂直的复子空间的向量 ξ_i 的极限. 故由 (2.27) 的半正定性, 得到

$$\sum_{\lambda,u}\frac{\partial^2 r(z_i)}{\partial z_\lambda\partial\overline{z}_u}(\xi_i)_\lambda\overline{(\xi_i)}_u\geqslant 0.$$

当 $i\to\infty$, 有

$$\sum\frac{\partial^2 r(z_0)}{\partial z_\lambda\partial\overline{z}_u}\xi_\lambda\overline{\xi}_u\geqslant 0,\quad 当\ \sum_\lambda\frac{\partial r(z_0)}{\partial z_\lambda}\xi_\lambda=0.$$

这就证明了定理 2.17 中, 当 $\partial\Omega$ 光滑时即为定义 2.1 中所定义的拟凸域.

对每个 $f\in\mathcal{O}(\Omega)$, $|f|$ 是在 Ω 上多次调和的, 即 $|f|\in P(\Omega)$. 因此根据定理 2.17 的 (3) 知, 若 Ω 是全纯域, 则 Ω 必是拟凸域.

实际上, 如果 $\mathbf{C}^n$ 中的域 Ω 的边界是 C^2 的, 并且局部的由定义函数 r 给出, 即对每个 $x\in\partial\Omega$, 存在开集 U 和 U 上的 C^2 的实值函数, 使得 $U\cap\Omega=\{z\in U|r(z)<0\}$, 则当 Ω 是全纯域时, 我们容易推出 Ω 是拟凸的, 因为假设在 $x\in\partial\Omega$ 不是拟凸的, 则必在复切平面的某个方向 $\xi\in\mathbf{C}^n$ 有 $\displaystyle\sum_{\lambda,u}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial z_\lambda\partial\overline{z}_u}\right)\xi_\lambda\overline{\xi}_u<0$. 现在由这个方向 ξ 与 $\left(\dfrac{\partial r}{\partial z_1},\cdots,\dfrac{\partial r}{\partial z_n}\right)$ 这两个复直线方向, 构成一个经 x 点的二维复平面, 记为 H_2, 则 $H_2\backslash\Omega$ 在 x 点就是强拟凸的 (因为它的复切平面就是由一个向量 ξ 所张成). 则由定理 2.2, 我们可以取一个适当的全纯坐标 $(w_1,\cdots,w_n)$ 使 $w_1(x)=\cdots=w_n(x)=0$, 而且在这点 $H_2\backslash\Omega$ 对 w 坐标来讲是强欧氏凸的, 因此我们就易于在 Ω 中 (实际上在 $\Omega\cap H$ 中) 找到一族圆盘 $(\Delta_v)_{v=1,2,\cdots}$, $\displaystyle\bigcup_v(\partial\Delta_v)$ 在 Ω 中是相对紧的. 而 $\displaystyle\bigcup_v\overline{\Delta}_v$ 在 Ω 中不是相对紧的, 这与 Ω 是全纯域矛盾.

前面已经证明一个有界拟凸域可以构造像 $-\log d$ 那样的多次调和函数, 则如果 $\partial\Omega$ 是 C^2 的, $-\log d$ 亦然; 而 $-\log d+|z|^2$ 就是 Ω 上的强多次调和穷竭函数, 而且 Oka 证明了 (定理 2.14) 全纯域一定存在一个强多次调和穷竭函数. 因此 Levi 问题可以有这样一个新的提法: 如果 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的一个域, 在 Ω 上存在一个强多次调和穷竭函数, 则 Ω 就是一个全纯域.

这个新的提法较之原来的拟凸域的提法有其优越之处, 因为这个提法摆脱了边界, 这样就有可能将其推广到复流形上去. 首先我们要将全纯域的概念推广到复流形上去, 这就是 Stein 流形.

定义 2.19 一个复流形 M 称为 **Stein 流形**, 如果它满足如下三个条件:

(1) M 是全纯凸的, 即对每个 M 上的紧集 K,

$$\hat{K}=\{x\in M|\ |f(x)|\leqslant\operatorname*{Sup}_K|f|,\quad\forall f\in\mathcal{O}(M)\}$$

在 M 中是紧的;

(2) M 的全纯函数分离 M 上的点, 即对 $\forall x,y\in M$, $x\neq y$, 存在 $f\in\mathcal{O}(M)$ 使得 $f(x)\neq f(y)$;

(3) M 上的全纯函数可给出 M 的局部坐标, 即 $\forall x \in M$, 存在 $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{O}(M)$, $(f_1, \cdots, f_n)$ 是 x 的邻域的一个局部坐标.

这个定义的 (1) 即为域的全纯凸的定义的推广, (2), (3) 对 $\mathbf{C}^n$ 中的域自然成立, 因此亦称全纯域为 Stein 域. 这里由 (2) 知道 Stein 流形一定是非紧的, 因为对一个紧复流形, 在这整个复流形上有定义的全纯函数必在某点达到极大模, 但由全纯函数的极大模原理, 此时只有常值函数才可能, 因此 (2) 不满足.

在复流形上 Levi 问题的提法是: 令 M 是复流形, 如果在其上存在强多次调和穷竭函数, 则 M 是一个 Stein 流形.

这一提法的 Levi 问题已经被解决. 对于 $\mathbf{C}^n$ 中域的情形是 Oka 解决的. 复流形的情形是 Grauert 在 1956 年解决的, 他用了层论的方法. 后来在 20 世纪 60 年代中期, Kohn, Andreotti, Vesentini 以及 Hörmander 等用 L^2 方法解决了此问题. 而在 1962 年, Narasimhan 又解决了复空间上的 Levi 问题, 这在本书的后面部分将会提到.

这种提法的 Levi 问题是有意义的, 因为要用定义 2.19 中 Stein 流形的条件去判断一个复流形是否是 Stein 的是很困难的. 事实上, 要在一个复流形上找一个非常值的全纯函数往往都是一件难事, 更别说去验证这些条件, 而相比起来找一个强多次调和穷竭函数要容易得多.

前面已定义了 $\mathbf{C}^n$ 中的强多次调和穷竭函数, 而流形上的定义是完全类似的, 代之以复欧氏空间的整体坐标, 在流形上是对局部坐标 $(z_1, \cdots, z_n)$ 的复 Hessian $\left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i \partial \overline{z}_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} > 0$, 而这个复 Hessian 的正定性与局部坐标的选取是无关的, 关于穷竭性的定义是完全一样的.

第三章　L^2 估计

本章, 我们讨论 $\overline{\partial}$ 方程的 L^2 估计. 其核心是使用 Hilbert 空间理论, 并结合先验估计, 给出拟凸域上 $\overline{\partial}$ 方程解的存在定理. 其重要应用之一是 Levi 问题的解. 即拟凸域是全纯凸的.

§3.1　L^2　方　法

令 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中有界区域, $f=\sum f_v d\bar{z}^v$ 是 Ω 上满足 $\overline{\partial} f=0$ 的 $(0,1)$-形式. 问题是方程

$$\overline{\partial} u=f \tag{3.1}$$

是否有解. 利用 Hilbert 空间理论, 考虑

$$L^2_{(0,0)}(\Omega)\xrightarrow{\overline{\partial}}L^2_{(0,1)}(\Omega)\xrightarrow{\overline{\partial}}L^2_{(0,2)}(\Omega), \tag{3.2}$$

则上述问题等价于: 第二个 $\overline{\partial}$ 的核是否等于第一个 $\overline{\partial}$ 的像.

由于 $\overline{\partial}$ 仅对可微函数有定义, 我们若想利用 L^2 方法讨论问题, 必须先将 $\overline{\partial}$ 延拓为 (弱) 连续算子. 这里, 称算子 T 是 (弱) 连续算子, 若 T 满足下列性质: 任意 $f\in \operatorname{Dom} T$ (T 的定义域) 且 $Tf=g$, 若 $f_v\in \operatorname{Dom} T$ 且 $f_v\longrightarrow f$, 则 $Tf_v\longrightarrow g$ (弱收敛). 下面我们来说明 $\overline{\partial}$ 的弱连续延拓存在, 显然, 只需证明

$$\left\{\begin{aligned} f_v&\longrightarrow 0\\ \overline{\partial} f_v&\longrightarrow g\end{aligned}\right\}\Longrightarrow g=0.$$

事实上, 对任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, 在分布意义下有

$$\int g\overline{\varphi} = \lim \int \overline{\partial} f_v \overline{\varphi} = -\lim \int f_v \overline{(\partial\varphi)} = 0.$$

从而 $g = 0$, 因此分布意义下的延拓就是 $\overline{\partial}$ 的弱连续延拓. 但事实上我们用到的是闭延拓, 即保证算子的图是闭的延拓. 由于弱连续延拓 (自然是闭延拓) 存在, 由定义, 闭延拓存在. 因此, 不妨设 (3.2) 中的两个 $\overline{\partial}$ 算子均为闭稠定 ($C_0^\infty(\Omega) \subset \mathrm{Dom}\ \overline{\partial}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中稠密) 线性算子.

将上述讨论提炼为下面的 Hilbert 空间模型:

$$H_1 \xrightarrow{T} H_2 \xrightarrow{S} H_3, \tag{3.3}$$

这里 H_1, H_2, H_3 均为 Hilbert 空间, T, S 为线性闭稠定算子. 假定 $ST = 0$, 问题是对任意 $f \in \mathrm{Ker}\ S$,

$$Tu = f \tag{3.4}$$

是否有解.

首先, 易见 $Tu = f$ 等价于对某个稠密子集上的所有 g,

$$(Tu,\ g) = (f,\ g), \tag{3.5}$$

这是因为此时 $(Tu - f,\ H_2) = 0$, 故 $Tu = f$ (反方向自然成立).

令 T^* 是 T 的 (Von-Neumann) 共轭. 由泛函分析理论, T^* 是闭算子, 且 $(T^*)^* = T$ 当且仅当 T 是闭的. 回忆 T^* 的定义: 令 $y \in H_2$, 若存在 $y^* \in H_1$, 使得对任意 $x \in \mathrm{Dom}\ T$, 都有

$$(Tx,\ y) = (x,\ y^*), \tag{3.6}$$

则称 $y \in \mathrm{Dom}\ T^*$, 且定义 $T^*y = y^*$. 由 (3.6),

$$(Tx,\ y) = (x,\ T^*y). \tag{3.7}$$

下文涉及的 T^* 的定义域均包含所有紧支于 Ω 的光滑形式, 因此 $\mathrm{Dom}\ T^*$ 在 H_2 中稠密. 换句话说, T^* 也是线性闭稠定算子.

由 (3.5), 若对某个稠集上的所有 g, 都有 $(Tu,\ g) = (f,\ g)$, 且这个稠集含在 $\mathrm{Dom}\ T^*$ 中, 利用 $(Tu,\ g) = (u,\ T^*g)$, 则

$$\begin{aligned} Tu = f \iff & (Tu,\ g) = (f,\ g) \\ \iff & (u,\ T^*g) = (f,\ g), \quad \forall g \in \mathrm{Dom}\ T^* \text{ 的某个稠集}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

由于 $T^*g \to (f,\ g)$ 是定义在 H_1 的子集 $G := \{T^*g|\ g \in \text{Dom}\ T^*$ 的某个稠集$\}$ 上的线性泛函. 若可将其延拓为 H_1 上有界线性泛函, 对 (3.8) 使用 Rietz 表示定理, 则 $Tu = f$ 有界. 回忆 Rietz 表示定理: 若 $\lambda:\ H \longrightarrow \mathbf{C}$ 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性泛函, 则存在 $u \in H$, 使得 $\lambda(x) = (x,\ u)$, $\forall x \in H$. 因此, 问题归结为 $T^*g \to (f,\ g)$ 是否可延拓为 H_1 上的有界线性泛函.

引理 3.1 *若存在仅依赖 f 的常数 c_f, 使得对任意 $g \in G$,*

$$|(g,\ f)| \leqslant c_f \|T^*g\|, \tag{3.9}$$

则 $T^*g \to (g,\ f)$ 可延拓为 H_1 上有界线性泛函.

证明: 首先注意到由 (3.9), $T^*g \to (g,\ f)$ 定义合理: 若 $T^*g_1 = T^*g_2$, 则

$$|(g_1 - g_2,\ f)| \leqslant c_f \|T^*(g_1 - g_2)\| = 0,$$

故 $(g_1,\ f) = (g_2,\ f)$.

其次, 将 $T^*g \longrightarrow (g,\ f)$ 延拓到 G 的闭包 $\overline{G}$ 上. 若 $x \in \overline{G}$, 则存在 $g_v \in G$, 使得 $x = \lim\limits_{v\to\infty} T^*g_v$, 由 (3.9),

$$|(g_v - g_u,\ f)| \leqslant c_f \|T^*g_v - T^*g_u\| \longrightarrow 0 \quad (v, u \to \infty),$$

因此 $\lim\limits_{v\to\infty} (g_v,\ f)$ 存在, 将其定义为此泛函在 x 点的值.

最后, 对任意 $x \in H_1$, 记 P 为投影算子 $H_1 \longrightarrow \overline{G}$ (闭子空间), 则可将上述泛函在 x 点的值定义为在 Px 点的值. □

前面的讨论仅用到

$$H_1 \xrightarrow{T} H_2 \xrightarrow{S} H_3$$

的前半部分. 然而, 由于我们仅需要对 $f \in \text{Ker}\ S$ 解方程 $Tu = f$ 或 $(T^*g,\ u) = (g,\ f)$, 因此就不需要 (3.9) 对任意 $f \in H_2$ 成立, 仅需要 (3.9) 对 $f \in \text{Ker}\ S$ 成立. 此时, 我们需要 (3.9) 中的 g 取遍 $\text{Dom}\ T^*$ 中的某个稠子集.

证明 $|(g, f)| \leqslant c_f \|T^*g\|$ 的途径是证明下式:

$$\|g\|^2 \leqslant c(\|T^*g\|^2 + \|Sg\|^2), \quad \forall g \in \text{Dom}\ T^* \cap \text{Dom}\ S,$$

首先注意到, 对于我们要讨论的问题, $\text{Dom}\ T^*$ 及 $\text{Dom}\ S$ 均包含所有紧支于 Ω 上的光滑形式, 因此 $\text{Dom}\ T^* \cap \text{Dom}\ S$ 在 $\text{Dom}\ T^*$ 与 H_2 中均稠密. 我们先证明以下引理:

引理 3.2 *若*

$$\|g\|^2 \leqslant c(\|T^*g\|^2 + \|Sg\|^2), \quad \forall g \in \text{Dom}\ T^* \cap \text{Dom}\ S, \tag{3.10}$$

则

$$|(g,\ f)| \leqslant c^{\frac{1}{2}}\|f\|\ \|T^*g\|, \quad \forall f \in \text{Ker } S,\ g \in \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S. \tag{3.11}$$

证明: 对任意 $g \in \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S$, 使用正交分解

$$g = g_1 + g_2, \quad g_1 \in \text{Ker } S, \quad g_2 \in (\text{Ker } S)^{\perp}.$$

由于 $ST = 0$, 故 $(\text{Ker } S)^{\perp} \subset (\text{Im } T)^{\perp}$, 且若 $x \in (\text{Im } T)^{\perp}$, 则 $(x,\ Ty) = 0$, $\forall y \in \text{Dom } T$, 由 T^* 的定义, $0 = (x,\ Ty) = (T^*x,\ y)$, $\forall y \in \text{Dom } T$, 故 $T^*x = 0$, 从而

$$(\text{Ker } S)^{\perp} \subset (\text{Im } T)^{\perp} \subset \text{Ker } T^*.$$

因此 $g_1 = g - g_2 \in \text{Dom } T^*$, $g_2 = g - g_1 \in \text{Dom } S \cap \text{Dom } T^*$, 故 g_1, g_2 均在 $\text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S$ 中. 于是,

$$\begin{aligned}
|(g,\ f)| &= |(g_1,\ f)| && (f \in \text{Ker } S, g_2 \in (\text{Ker } S)^{\perp}) \\
&\leqslant \|f\| \cdot \|g_1\| && (\text{Schwartz 不等式}) \\
&\leqslant c^{\frac{1}{2}}\|f\|(\|T^*g_1\|^2 + \|Sg_1\|^2)^{\frac{1}{2}} && ((3.10), g_1 \in \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S) \\
&\leqslant c^{\frac{1}{2}}\|f\| \cdot \|T^*g_1\| && (g_1 \in \text{Ker } S) \\
&\leqslant c^{\frac{1}{2}}\|f\| \cdot \|T^*g\| && (g_2 \in \text{Ker } T^*, T^*g_2 = 0).
\end{aligned}$$

□

由引理 3.2, 若

$$\|g\|^2 \leqslant c(\|T^*g\|^2 + \|Sg\|^2), \quad \forall g \in \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S,$$

则

$$|(g,\ f)| \leqslant c^{\frac{1}{2}}\|f\| \cdot \|T^*g\|, \quad \forall f \in \text{Ker } S,\ g \in \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S,$$

由引理 3.1, $T^*g \longrightarrow (g,\ f)$ 可延拓为 H_1 上范数不超过 $c^{\frac{1}{2}}\|f\|$ 的线性泛函, 由 Riesz 表示定理, 存在 $u \in H_1$, 使得

$$(T^*g,\ u) = (g,\ f), \quad \forall g \in \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S.$$

由于 $\text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S$ 在 H_2 中稠密, 故

$$(g,\ Tu) = (g,\ f), \quad \forall g \in H_2,$$

由 (3.8), $Tu = f$ 有解, 且由 Riesz 表示定理, 解满足以下估计:

$$\|u\| \leqslant c^{\frac{1}{2}}\|f\|, \quad u \in (\text{Ker } T)^{\perp}.$$

上面的估计是 Riesz 表示定理的直接推论, 只需说明 $u \in (\text{Ker } T)^{\perp}$: 注意到前面构造的 $T^*g \longrightarrow (g,\ f)$ 到整个 H_1 上的延拓在 $\overline{\{T^*g|g \in \text{Dom } T^*\}}$ 的正交补上恒为零, 于是 $u \in \overline{\{T^*g|g \in \text{Dom } T^*\}}$. 不妨假定 $u = \lim\limits_{v\to\infty} T^*g_v,\ g_v \in \text{Dom } T^*$, 则对任意 $x \in \text{Ker } T$, 有

$$(x,\ u) = \lim_{v\to\infty}(x,\ T^*g_v) = \lim_{v\to\infty}(Tx,\ g_v) = 0,$$

从而 $u \in (\text{Ker } T)^{\perp}$.

一般来说, $Tu = f$ 的解不唯一: 任取 $u_1 \in \text{Ker } T$, 由于

$$\begin{aligned}(T^*g,\ u+u_1) &= (T^*g,\ u) + (T^*g,\ u_1)\\ &= (T^*g,\ u) + (g,\ Tu_1) = (T^*g,\ u).\end{aligned}$$

故 $u,\ u+u_1$ 均为 $Tu = f$ 的解. 但条件 $u \in (\text{Ker } T)^{\perp}$ 可保证 $Tu = f$ 有唯一解.

综上所述, 我们得到了以下引理:

引理 3.3 若

$$\|g\|^2 \leqslant c(\|T^*g\|^2 + \|Sg\|^2), \quad \forall g \in \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S,$$

则 $Tu = f$ 对 $f \in \text{Ker } S$ 有解, 且可找到满足估计

$$\|u\| \leqslant c^{\frac{1}{2}}\|f\|, \quad u \in (\text{Ker } T)^{\perp} \tag{3.12}$$

的解.

注: 若 $T = \bar{\partial}$, 则 (3.12) 中的 u 垂直 L^2 全纯函数空间.

现在我们回到本章最初的问题上. 令

$$H_1 = L^2_{(0,0)}(\Omega,\ \varphi), \quad H_2 = L^2_{(0,1)}(\Omega,\ \varphi), \quad H_3 = L^2_{(0,2)}(\Omega,\ \varphi),$$

这里 $\varphi \in C^\infty(\dot{\Omega})$ ($\overline{\Omega}$ 邻域上的**紧支于 $\mathbf{C}^n$** 的光滑函数空间, 之所以使用这个函数空间, 是为了保证它里面的元素在可能无界的 Ω 上 L^2 可积). 记 L^2 空间的范数为 $\|\cdot\|$. 定义

$$\|f\|^2 = \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi} dx,$$

这里 dx 是 Lebesgue 测度 (欧氏体积元). 对于 $(0,1)$-形式与 $(0,2)$-形式, 上式表示其分量的平方和关于权 $e^{-\varphi}$ 的积分. 例如, 对 $f = \sum f_i d\bar{z}^i$, 有

$$\|f\|^2 = \int_\Omega \sum |f_i|^2 e^{-\varphi} dx.$$

权 $e^{-\varphi}$ 的引入是至关重要的, 事实上, $e^{-\varphi}$ 可看成是 Ω 上平凡线丛 $\Omega\times\mathbf{C}$ 的度量(我们将在 Kodaira 消灭定理的证明中详细讨论). 现在, T 与 S 为定义于 $C^\infty(\dot{\Omega})$ 及 $C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})$ 上的 $\overline{\partial}$ 的极大 Hilbert 延拓 (即下文的弱延拓): $H_1\xrightarrow{T}H_2\xrightarrow{S}H_3$. 若分布 $\overline{\partial}u\in H_2$, 称 H_1 中元 $u\in\mathrm{Dom}\,T$. 类似定义 Dom S. 由引理 3.3, 解 $\overline{\partial}$ 问题依赖于不等式 (3.10) 的证明, 我们分步证明此基本不等式:

1. 定义 T 的形式共轭算子 (精确地说是 $\overline{\partial}$ 的形式共轭算子 $\overline{\partial}^*$) T^* (在不引起混淆的情况下, 有时也将 $\overline{\partial}$ 写成 T, $\overline{\partial}^*$ 写成 T^*).

首先, 对任意 $f\in C^\infty_{(0,0)}(\dot{\Omega})\subset\mathrm{Dom}\,T$, 有

$$(Tf,\ g)=(f,\ T^*g).$$

若 $g=\sum g_id\overline{z}^i\in C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})$, 则对任意 $f\in C^\infty_{(0,0)}(\dot{\Omega})$,

$$\sum_i\int_\Omega(\overline{\partial}_if)\overline{g}_ie^{-\varphi}dx=(Tf,\ g)=(f,\ T^*g)=\int f(\overline{T^*g})e^{-\varphi}dx.$$

特别的, 对紧支于 Ω 中的 f, 由分部积分

$$\begin{aligned}\sum_i\int_\Omega(\overline{\partial}_if)\overline{g}_ie^{-\varphi}dx&=-\sum_i\int_\Omega f\overline{\partial}_i(\overline{g}_ie^{-\varphi})dx\\&=-\sum_i\int_\Omega f\overline{e^{\varphi}\partial_i(g_ie^{-\varphi})}e^{-\varphi}dx\\&=-\sum_i\int_\Omega f\overline{\delta_ig_i}e^{-\varphi}dx,\end{aligned}$$

定义

$$\delta_ig_i=e^{\varphi}\partial_i(e^{-\varphi}g_i),$$

则对任意 $g\in C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})$,

$$T^*g=-\sum_i\delta_ig_i. \tag{3.13}$$

这个等式就是 T 的形式共轭的表达式.

2. 决定 Dom T^*.

是否有 $C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})$ 属于 Dom T^*? 由前面讨论可知, 若 $g\in C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})\cap\mathrm{Dom}\,T^*$, 则 $T^*g=-\sum\delta_ig_i$. 但一般来说 Dom T^* 中元总是满足一些边界条件.

在继续讨论之前, 我们先证明下面的散度定理.

命题 3.4 若有界区域 $\Omega=\{r<0\}$, $|dr|=1$ 的边界 $\partial\Omega=\{r=0\}$ 是 C^1

的, 则对任意一阶常系数微分算子 $L=\sum a_i\frac{\partial}{\partial x_i}$, 有

$$\int_\Omega Lf dx=\int_{\partial\Omega}(Lr)f$$

(为简单起见, 上述积分等式中略去相应的面积元与体积元).

证明: 由 Stokes 公式,

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n=\int_{\partial\Omega} f dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n$$

(对 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 有类似公式).

固定 $p\in\partial\Omega$, 由于 $|dr|=1$, 经旋转变换 (不改变欧氏度量), r 可看成是 p 点附近的局部坐标. 假定 $\partial\Omega$ 在 p 点附近的局部坐标为 $\theta_1,\cdots,\theta_{n-1}$, 且 $d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n-1}$ 是 $\partial\Omega$ 的体积元, 则 $dr\wedge d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n-1}$ 是 p 点附近的体积元, 即

$$dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n=dr\wedge d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n-1},$$

因此,

$$dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n=dr\wedge\omega+\alpha d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n-1},$$

这里 ω 是 $(n-2)$-形式. 因此

$$dr\wedge dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n=\alpha dr\wedge d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n-1},$$

即

$$\frac{\partial r}{\partial x_1}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n=\alpha dr\wedge d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n-1},$$

从而 $\alpha=\frac{\partial r}{\partial x_1}$. 故

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n\\ =&\int_{\partial\Omega} f dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n\\ =&\int_{\partial\Omega} f(dr\wedge\omega+\alpha d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n-1})\\ =&\int_{\partial\Omega} f\alpha d\theta_1\wedge\cdots\wedge d\theta_{n-1}=\int_{\partial\Omega} f\frac{\partial r}{\partial x_1}.\end{aligned}$$

类似可得

$$\int_\Omega Lf=\int_{\partial\Omega}(Lr)f,$$

这里 $L = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. 且上式对 $a_i \in \mathbf{C}$, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 换成 $\frac{\partial}{\partial z_i}$, $\frac{\partial}{\partial \overline{z}_i}$ 依然成立. □

现在, 对 $f \in C^\infty_{(0,0)}(\dot{\Omega})$, $g \in \mathrm{Dom}\ T^* \cap C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})$, 计算 $(Tf,\ g)$: 由

$$\overline{\partial}_i(f\overline{g}_i e^{-\varphi}) = (\overline{\partial}_i f)\overline{g}_i e^{-\varphi} + f\overline{\partial_i(g_i e^{-\varphi})},$$

对上式在 Ω 上积分, 得

$$\int_\Omega \overline{\partial}_i(f\overline{g}_i e^{-\varphi}) = \int_\Omega (\overline{\partial}_i f)\overline{g}_i e^{-\varphi} + \int_\Omega f\overline{\partial_i(g_i e^{-\varphi})}.$$

由命题 3.4,

$$\int_\Omega \overline{\partial}_i(f\overline{g}_i e^{-\varphi}) = \int_{\partial\Omega} (\overline{\partial}_i r) f\overline{g}_i e^{-\varphi},$$

故

$$\int_\Omega f\overline{\partial_i(g_i e^{-\varphi})} = -\int_\Omega (\overline{\partial}_i f)\overline{g}_i e^{-\varphi} + \int_{\partial\Omega} (\overline{\partial}_i r) f\overline{g}_i e^{-\varphi}.$$

对 i 求和, 右边第一项等于 $(-1)(Tf,\ g)$, 而左边等于

$$\sum \int_\Omega f\overline{\partial_i(g_i e^{-\varphi})} = \sum \int f\overline{e^{\varphi}\partial_i(g_i e^{-\varphi})}e^{-\varphi} = (-1)(f,\ T^*g).$$

但 $(Tf,\ g) = (f,\ T^*g)$, 故对 $g \in \mathrm{Dom}\ T^* \cap C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})$, 有

$$\sum \int_{\partial\Omega} f(\overline{\partial}_i r)\overline{g}_i e^{-\varphi} = 0. \tag{3.14}$$

由于上式对任意 $f \in C^\infty(\dot{\Omega})$ 都成立, 因此

$$\sum_i (\partial_i r) g_i|_{\partial\Omega} = 0, \tag{3.15}$$

(3.15) 是 $C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})$ 中的 g 属于 $\mathrm{Dom}\ T^*$ 的充要条件. 自然, 若 g 为紧支于 Ω 的光滑形式, 必有 $g \in \mathrm{Dom}\ T^*$.

3. 对 $g \in \mathrm{Dom}\ T^* \cap \mathrm{Dom}\ S \cap C^\infty_{(0,1)}(\overline{\Omega})$, 计算 $\|T^*g\|^2 + \|Sg\|^2$.

对 $f \in C^\infty(\dot{\Omega})$ 及 $g \in C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})$, 将下式

$$\sum \int_\Omega f\overline{\partial_i(g_i e^{-\varphi})} = -\sum \int_\Omega (\overline{\partial}_i f)\overline{g}_i e^{-\varphi} + \sum \int_{\partial\Omega} (\overline{\partial}_i r) f\overline{g}_i e^{-\varphi}$$

记为

$$(f,\ \delta_i g) = -(\overline{\partial}_i f,\ g) + ((\overline{\partial}_i r)f,\ g)_{\partial\Omega}, \tag{3.16}$$

这里 $(\cdot,\cdot)_{\partial\Omega}$ 表示在 $\partial\Omega$ 上相对于权 $e^{-\varphi}$ 积分. 由于

$$\|T^*g\|^2 = \int_\Omega \left|\sum_i \delta_i g_i\right|^2 e^{-\varphi} = \sum_{i,j} \int_\Omega (\delta_i g_i)\overline{(\delta_j g_j)} e^{-\varphi},$$

且

$$\|Sg\|^2 = \int_\Omega \sum_{i<j} |\overline{\partial}_i g_j - \overline{\partial}_j g_i|^2 e^{-\varphi}$$
$$= \sum_{i<j} \int_\Omega (|\overline{\partial}_i g_j|^2 - \overline{\partial}_i g_j \cdot \overline{\overline{\partial}_j g_i} - \overline{\partial}_j g_i \cdot \overline{\overline{\partial}_i g_j} + |\overline{\partial}_j g_i|^2) e^{-\varphi}$$
$$= \sum_{i,j} \int_\Omega (|\overline{\partial}_i g_j|^2 - (\overline{\partial}_i g_j)(\partial_j \overline{g}_i)) e^{-\varphi},$$

故

$$\|T^* g\|^2 + \|Sg\|^2 = \sum_{i,j} \int_\Omega |\overline{\partial}_i g_j|^2 e^{-\varphi} + \sum_{i,j} \int_\Omega ((\delta_j g_j) \cdot \overline{(\delta_i g_i)} - (\overline{\partial}_i g_j) \cdot (\partial_j \overline{g}_i)) e^{-\varphi}.$$

由 (3.16), 知

$$\int_\Omega (\delta_j g_j)\overline{(\delta_i g_i)} e^{-\varphi} = -(\overline{\partial}_i \delta_j g_j,\ g_i) + ((\overline{\partial}_i r)\delta_j g_j,\ g_i)_{\partial\Omega},$$

且

$$\int_\Omega (\overline{\partial}_i g_j)\overline{(\overline{\partial}_j g_i)} e^{-\varphi} = -(g_j,\ \delta_i \overline{\partial}_j g_i) + ((\overline{\partial}_i r) g_j,\ \overline{\partial}_j g_i)_{\partial\Omega}.$$

于是

$$\|T^* g\|^2 + \|Sg\|^2 = \sum_{i,j} \int_\Omega |\overline{\partial}_i g_j|^2 e^{-\varphi} + \sum_{i,j} ((\delta_i \overline{\partial}_j - \overline{\partial}_j \delta_i) g_i,\ g_j)$$
$$+ \sum_{i,j} \int_{\partial\Omega} (\overline{\partial}_i r)(\delta_j g_j) \overline{g}_i e^{-\varphi} - \sum_{i,j} (\partial_i r) \overline{g}_j \overline{(\partial_j \overline{g}_i)} e^{-\varphi}.$$

直接计算可得

$$(\delta_i \overline{\partial}_j - \overline{\partial}_j \delta_i)\omega = e^{\varphi} \partial_i ((\overline{\partial}_j \omega) e^{-\varphi}) - \overline{\partial}_j (e^{\varphi} \partial_i (\omega e^{-\varphi}))$$
$$= (\overline{\partial}_j \partial_i \varphi)\omega.$$

又因为, 若 $g \in \mathrm{Dom}\ T^* \cap C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})$, 则 $\sum_i (\partial_i r) g_i|_{\partial\Omega} = 0$, 因此

$$\sum_{i,j} \int_{\partial\Omega} (\overline{\partial}_i r) \delta_j g_j \cdot \overline{g}_i \cdot e^{-\varphi} = \sum_j \int_{\partial\Omega} \delta_j g_j \cdot \sum_i (\overline{\partial}_i r) \overline{g}_i e^{-\varphi} = 0.$$

于是有

$$\|T^* g\|^2 + \|Sg\|^2 = \sum_{i,j} \int_\Omega |\overline{\partial}_i g_j|^2 e^{-\varphi} + \sum_{i,j} \int_\Omega (\overline{\partial}_j \partial_i \varphi) g_i \overline{g}_j e^{-\varphi} \tag{3.17}$$
$$- \sum_{i,j} \int_{\partial\Omega} (\partial_i r) \overline{g}_j \cdot \overline{\partial}_j g_i e^{-\varphi}.$$

4. 边界项控制 —— Morrey 技巧.

回顾 $\overline{\partial}$ 算子的 L^2 估计, (3.17) 的最后一项, 即边界项

$$-\sum_{i,j}\int_{\partial\Omega}(\partial_i r)\overline{g}_j(\overline{\partial}_j g_i)e^{-\varphi}$$

总是很难控制. 直到 1958 年, 由 Morrey 成功克服了这个困难, 因此称他的方法为 **Morrey 技巧**.

下面, 我们详细讨论这一技巧: 对 $g\in \mathrm{Dom}\ T^*\cap C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})$, 由于 $r=0$ 定义了 Ω 的边界, 若定义函数 r 是 C^3 的, 则

$$\sum(\partial_i r)g_i$$

是 C^2 函数. 由 (3.15), 其在 $\partial\Omega$ 上为零. 视 r 为局部坐标, 对变量 r 使用 Newton-Leibniz 公式, 得

$$\sum(\partial_i r)g_i=\lambda\cdot r,$$

这里 λ 是 C^1 函数. 对上式两边作用 $\overline{\partial}_j$, 得

$$\sum_i(\overline{\partial}_j\partial_i r)g_i+\sum_i(\partial_i r)(\overline{\partial}_j g_i)=(\overline{\partial}_j\lambda)r+\lambda\overline{\partial}_j r,$$

故

$$\sum_{i,j}(\overline{\partial}_j\partial_i r)g_i\overline{g}_j+\sum_{i,j}(\partial_i r)(\overline{\partial}_j g_i)\overline{g}_j=\sum_j r(\overline{\partial}_j\lambda)\overline{g}_j+\lambda\sum_j(\overline{\partial}_j r)\overline{g}_j,$$

在 $\partial\Omega$ 上积分, 由于在 $\partial\Omega$ 上 $r=0$ 且 $\sum(\partial_j r)g_j=0$, 故

$$-\sum_{i,j}\int_{\partial\Omega}(\partial_i r)(\overline{\partial}_j g_i)\overline{g}_j e^{-\varphi}=\sum_{i,j}\int_{\partial\Omega}(\overline{\partial}_j\partial_i r)g_i\overline{g}_j e^{-\varphi}.$$

利用 (3.17), 最终可得

$$\|T^*g\|^2+\|Sg\|^2=\sum_{i,j}\int_\Omega|\overline{\partial}_i g_j|^2e^{-\varphi}+\sum_{i,j}\int_\Omega(\overline{\partial}_j\partial_i\varphi)g_i\overline{g}_j e^{-\varphi}\qquad(3.18)$$
$$+\sum_{i,j}\int_{\partial\Omega}(\overline{\partial}_j\partial_i r)g_i\overline{g}_j e^{-\varphi}.$$

由逼近可知, 上式对任意具 C^2 边界的区域 Ω 及任意 C^2 函数 φ 成立. 现在, 进一步假定

(1) Ω 是拟凸域, 即

$$\sum_{i,j}(\overline{\partial}_j\partial_i r)\xi_i\overline{\xi}_j\geqslant 0,\quad\forall\quad\sum(\partial_i r)\xi_i=0;\qquad(3.19)$$

(2) φ 的复 Hessian 矩阵强正定, 即存在 $c>0$, 使得

$$\sum_{i,j}(\partial_i\overline{\partial}_j\varphi)\xi_i\overline{\xi}_j \geqslant c\sum|\xi_i|^2. \tag{3.20}$$

在上述假定下, 由边界条件 $\sum(\partial_i r)g_i|_{\partial\Omega}=0$ 及 (3.19), (3.18) 右边第三项非负. 第二项满足

$$\sum_{i,j}\int_\Omega(\overline{\partial}_j\partial_i\varphi)g_i\overline{g}_je^{-\varphi} \geqslant c\sum_i\int_\Omega|g_i|^2e^{-\varphi}=c\|g\|^2.$$

而 (3.18) 右边第一项总是非负的, 于是有下面的定理:

定理 3.5 若 Ω 是 C^2 边界拟凸域, $\varphi\in C^2(\dot{\Omega})$ 满足

$$\sum(\partial_i\overline{\partial}_j\varphi)\xi_i\overline{\xi}_j \geqslant c\sum|\xi_i|^2,\quad c>0,$$

则对任意 $g\in \text{Dom }T^*\cap\text{Dom }S\cap C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})$, 有估计

$$c\|g\|^2\leqslant\|T^*g\|^2+\|Sg\|^2. \tag{3.21}$$

回忆前面的讨论, 若对任意 $g\in\text{Dom }T^*\cap\text{Dom }S$, 都有估计 $c\|g\|^2\leqslant\|T^*g\|^2+\|Sg\|^2$, 则拟凸域上 $\overline{\partial}$ 问题可解. 我们现在仅证明了, 对 $\text{Dom }T^*\cap\text{Dom }S\cap C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})$ 中的 g, 有估计 (3.21). 而需要证明任意 $\text{Dom }T^*\cap\text{Dom }S$ 中的 g 都有上述估计. 为此, 只需证明, 对任意 $g\in\text{Dom }T^*\cap\text{Dom }S$, 存在 $g_v\in\text{Dom }T^*\cap\text{Dom }S\cap C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})$, 满足

$$g_v\longrightarrow g,\ T^*g_v\longrightarrow T^*g,\ Sg_v\longrightarrow Sg.$$

这一问题的解决是基于 Friedrichs 的光滑化技巧, Hörmander 发展了上述技巧并最终解决上述问题.

现在, 我们先来介绍 Friedrichs 的光滑化技巧. 令区域 $G\subset\mathbf{R}^n$,

$$L:\ C^\infty(\dot{G})\longrightarrow C^\infty(\dot{G})$$

是线性微分算子. 记 $L_1:\ L^2(G)\longrightarrow L^2(G)$ 为 L 的延拓. 通常有两种延拓, 它们均为线性闭稠定算子.

1. **强延拓**: 记为 $L_1=\overline{L}$, 其定义是: $L_1f=g$ 等价于存在 $f_v\in C^\infty(\dot{G})$ 满足 $f_v\to f$, 且 $Lf_v\to g$ (L^2 意义下的收敛). 换句话说, $f\in\text{Dom }L_1$ 等价于存在 $f_v\in C^\infty(\dot{G})$, $f_v\to f$, 且 $\{Lf_v\}$ 是 $L^2(G)$ 中的 Cauchy 列, 且将其极限定义为 $L_1(f)$.

2. **弱延拓**: 也称为分布意义下的延拓, 即 $f \in \text{Dom } L_1$, 等价于存在 $g \in L^2(G)$, 使得对任意 $h \in C_0^\infty(G)$, 即紧支于 G 的光滑函数,

$$(g,\ h) = (f,\ L^*h), \tag{3.22}$$

这里 L^* 是 L 的形式共轭算子, $C_0^\infty(G)$ 表示所有紧支于 G 的光滑函数全体.

定理 3.6 (Friedrichs) *若 L 是一阶微分算子, 则弱延拓等价于强延拓.*

证明: 简单起见, 我们仅证明 $n = 1$ 且 $G = \mathbf{R}$ 的情形. 且在不引起混淆的情况下, 不区分 L_1 与 L. 记

$$L = a(x)\frac{\partial}{\partial x} + b(x),$$

这里 $a, b \in C^\infty$, $a'(x)$, $b'(x)$ 有界. 只需证明, 若在弱延拓的意义下 $Lf = g$, 则存在 $f_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, 当 $\epsilon \to 0$ 时, $f_\epsilon \to f$ 且 $Lf_\epsilon \to g$. 通过乘上一个在充分大区间取值为 1 的紧支于 $\mathbf{R}$ 且梯度一致趋于 0 的函数, 不妨假定 f 在 $\mathbf{R}$ 中有紧支集. 取光滑化函数

$$\chi(x) = \begin{cases} C\exp\left(\dfrac{-1}{1-x^2}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

$\chi(x)$ 是紧支于 $|x| \leqslant 1$ 的非负光滑函数, 取常数 C, 使得

$$\int_{\mathbf{R}} \chi(x)dx = 1. \tag{3.23}$$

令 $\chi_\epsilon = \dfrac{1}{\epsilon}\chi\left(\dfrac{x}{\epsilon}\right)$, 由于 $\text{Supp}\ \chi \subset [-1, 1]$, 知 $\text{Supp}\ \chi_\epsilon \subset [-\epsilon,\ \epsilon]$. 定义

$$f_\epsilon(x) = (f * \chi_\epsilon)(x) = \int f(x-y)\chi_\epsilon(y)dy. \tag{3.24}$$

则有:

(1) $f_\epsilon(x) \in C_0^\infty, \|f_\epsilon\| \leqslant \|f\|$. 事实上, 由于

$$f_\epsilon(x) = \int f(x-y)\chi_\epsilon(y)dy = \int f(y)\chi_\epsilon(x-y)dy = \int f(x-\epsilon y)\chi(y)dy, \tag{3.25}$$

对上式两边求导可知 $f_\epsilon(x) \in C_0^\infty$. 又因为

$$\|f_\epsilon\| \leqslant \int \|f\|\chi_\epsilon(y) = \|f\|,$$

知 (1) 成立.

(2) 在 L^2 范数下

$$f_\epsilon \longrightarrow f. \tag{3.26}$$

事实上,

$$\begin{aligned}\|f_\epsilon - f\| &= \left\|\int f(x-y)\chi_\epsilon(y)dy - \int f(x)\chi_\epsilon(y)dy\right\| \\ &= \left\|\int (f(x-y)-f(x))\chi_\epsilon(y)dy\right\| \\ &\leqslant \int \|f(x-y)-f(x)\|\chi_\epsilon(y)dy \\ &\leqslant \operatorname*{Sup}_{y\in \mathrm{Supp}\ \chi_\epsilon} \|f(x-y)-f(x)\| \left(\int \chi_\epsilon(y)dy\right) \\ &= \operatorname*{Sup}_{y\in \mathrm{Supp}\ \chi_\epsilon} \|f(x-y)-f(x)\| \longrightarrow 0 \quad (\text{当 } \epsilon\to 0).\end{aligned}$$

由 L^2 空间的 Riemann-Lebesque 引理, 当 $y\to 0$ 时, $\|f(x-y)-f(x)\|\longrightarrow 0$. 上式中第一个不等式可通过视 $\chi_\epsilon(y)dy$ 为一个测度得到.

(3) 为证明定理, 只需证明

$$Lf_\epsilon - (Lf)_\epsilon \longrightarrow 0. \tag{3.27}$$

这是因为, 由 (3.26), $(Lf)_\epsilon - Lf\longrightarrow 0$, 故 $Lf_\epsilon \longrightarrow Lf = g$, 换句话说, $f_\epsilon\longrightarrow f$ 与 $Lf_\epsilon\longrightarrow g$ 同时成立.

先对 $g\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ 证明 $Lg_\epsilon - (Lg)_\epsilon\longrightarrow 0$. 由 g_ϵ 的定义, 若 Supp $\chi\subset[-1,1]$, 则 Lg_ϵ 与 $(Lg)_\epsilon$ 均紧支于 Supp g 的 ϵ 邻域. 由于

$$Lg_\epsilon = L\left(\int g(x-y)\chi_\epsilon(y)\right) = a(x)\int \frac{\partial}{\partial x}g(x-y)\chi_\epsilon(y) + b(x)\int g(x-y)\chi_\epsilon(y),$$

故

$$\begin{aligned}|Lg_\epsilon - (Lg)_\epsilon| &= \int |a(x)-a(x-y)|\cdot\left|\frac{\partial}{\partial x}g(x-y)\right|\chi_\epsilon(y) \\ &\quad + \int |b(x)-b(x-y)|\cdot|g(x-y)|\chi_\epsilon(y) \\ &\leqslant \operatorname*{Sup}_{|y|\leqslant\epsilon}|a(x)-a(x-y)|\cdot c_1 + \operatorname*{Sup}_{|y|\leqslant\epsilon}|b(x)-b(x-y)|\cdot c_2 \\ &\longrightarrow 0 \quad (\text{当 } \epsilon\to 0).\end{aligned}$$

由于 Lg_ϵ 与 $(Lg)_\epsilon$ 均紧支于某个固定的紧集, 知

$$\|Lg_\epsilon - (Lg)_\epsilon\| \longrightarrow 0 \quad (\epsilon\to 0).$$

对一般的 f, 为证明 $\|(Lf)_\epsilon - Lf_\epsilon\|\longrightarrow 0$, 只需

$$\|Lf_\epsilon - (Lf)_\epsilon\| \leqslant c\|f\|, \tag{3.28}$$

这里 c 是独立于 f 的常数. 这是因为, 此时任取充分小的 ϵ_1, 总可找到 $g \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ 使得 $\|f-g\| < \epsilon_1$, 对这个固定的 g, 取充分小的 ϵ, 使 $\|Lg_\epsilon - (Lg)_\epsilon\| < \epsilon_2$, 则

$$\begin{aligned}\|Lf_\epsilon - (Lf)_\epsilon\| &\leqslant \|Lg_\epsilon - (Lg)_\epsilon\| + \|L(f-g)_\epsilon - (L(f-g))_\epsilon\| \\ &\leqslant \epsilon_2 + c\|f-g\| \\ &\leqslant \epsilon_2 + c\epsilon_1\end{aligned}$$

可充分小.

(4) 只需证明 (3.28). 由 (3.25), $\|f_\epsilon\| \leqslant \|f\|$, $\|bf_\epsilon\| \leqslant \max|b(x)| \cdot \|f\|$, 且 $\|(bf)_\epsilon\| \leqslant \max|b(x)| \cdot \|f\|$, 现在

$$Lf_\epsilon - (Lf)_\epsilon = af'_\epsilon + bf_\epsilon - (af')_\epsilon - (bf)_\epsilon,$$

这里 f' 是分布意义下的导数. 故只需估计 $af'_\epsilon - (af')_\epsilon$. 事实上

$$\begin{aligned}af'_\epsilon - (af')_\epsilon &= a(f*\chi_\epsilon)' - af' * \chi_\epsilon \\ &= a(f*\chi'_\epsilon) - (af)' * \chi_\epsilon + (a'f) * \chi_\epsilon,\end{aligned}$$

由假定, $a'(x)$ 有界, 故 $\|(a'f)*\chi_\epsilon\| \leqslant \mathrm{const} \cdot \|f\|$, 另一方面,

$$\begin{aligned}&a(f*\chi'_\epsilon) - (af)' * \chi_\epsilon \\ &= a(f*\chi'_\epsilon) - (af) * \chi'_\epsilon \\ &= \int a(x)f(x-y)\chi'_\epsilon(y)dy - \int a(x-y)f(x-y)\chi'_\epsilon(y)dy \\ &= \int (a(x)-a(x-y))f(x-y)\chi'_\epsilon(y)dy.\end{aligned}$$

这里第一个等式由分部积分得到. 由于 χ_ϵ 的支集是 $[-\epsilon, \epsilon]$, 故

$$\begin{aligned}\|a(f*\chi'_\epsilon) - (af)' * \chi_\epsilon\| &\leqslant \int |a(x)-a(x-y)| \cdot \|f\| \cdot |\chi'_\epsilon(y)|dy \\ &\leqslant \left(\int |a(x-y)-a(x)| \cdot |\chi'_\epsilon(y)|dy\right) \|f\|.\end{aligned}$$

因为积分只在 $\chi_\epsilon(y)$ 的支集上进行, 知 $|a(x)-a(x-y)| \leqslant \epsilon c$ (利用 $a'(x)$ 有界). 同时, 注意到当 $x<0$ 时, $\chi' \geqslant 0$; 当 $x>0$ 时, $\chi' \leqslant 0$, 故

$$\int_0^\epsilon -\chi'_\epsilon(y)dy = \int_{-\epsilon}^0 \chi'_\epsilon(y)dy = \chi_\epsilon(0) - \chi_\epsilon(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\chi(0),$$

即 $\int |\chi'_\epsilon(y)| < \frac{1}{\epsilon} \cdot \mathrm{const}$, 因此

$$\|a(f*\chi'_\epsilon) - (af)' * \chi_\epsilon\| \leqslant c\|f\|.$$

知 (3.28) 成立, 于是定理得证. □

现在, 我们再来证明不等式:

$$c\|g\|^2 \leqslant (\|T^*g\|^2 + \|Sg\|^2), \quad g \in \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S.$$

这里 S 与 T 分别是第二个 $\overline{\partial}$ 与第一个 $\overline{\partial}$ 的弱延拓, 我们已经对 $g \in C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega}, \varphi) \cap \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S$ (定义域中满足在 $\overline{\Omega}$ 邻域上光滑且**紧支于 $\mathbf{C}^n$** 中元) 证明不等式成立. 对一般的 $g \in \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S$, 我们需要找到 $g_v \in C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega}) \cap \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S$ (有时略去 φ), 使得

$$g_v \longrightarrow g, \quad T^*g_v \longrightarrow T^*g, \quad Sg_v \longrightarrow Sg.$$

利用 Friedrichs 的逼近定理, S 等于 $\overline{\partial}$ 的强延拓. 而对于 T^*, 其定义域并不一定包含 $C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})$, 这样就无法直接对 T^* 使用 Friedrichs 定理. 先考虑 $\overline{\partial}$ 的形式共轭算子 $\overline{\partial}^*$ 的弱延拓 (仍记为 $\overline{\partial}^*$), 则有

$$\begin{cases} -\sum \delta_i g_i = -\sum \partial_i g_i + \sum (\partial_i \varphi) g_i = \overline{\partial}^* g, \\ \overline{\partial} g = Sg, \end{cases} \tag{3.29}$$

这里

$$g = \sum g_i d\overline{z}_i, \quad \overline{\partial} g = \sum_{i<j} (\overline{\partial}_i g_j - \overline{\partial}_j g_i) d\overline{z}_i \wedge d\overline{z}_j.$$

写出矩阵形式, 则有

$$\begin{pmatrix} -\partial_1 & -\partial_2 & -\partial_3 & \cdots & -\partial_i & -\partial_{i+1} & \cdots & -\partial_j & -\partial_{j+1} & \cdots & -\partial_{n-1} & -\partial_n \\ -\overline{\partial}_2 & \overline{\partial}_1 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\overline{\partial}_j & 0 & & \overline{\partial}_i & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 & \cdots & \overline{\partial}_{n-1} & -\overline{\partial}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \partial_1 \varphi & \cdots & \partial_n \varphi \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\partial}^* g \\ Sg \end{pmatrix}.$$

这是一阶线性微分方程组. 由 Friedrichs 定理, $\overline{\partial}$ 的形式共轭算子 $\overline{\partial}^*$ 的弱延拓(仍记为 $\overline{\partial}^*$, 且无边界条件) 等于其强延拓, 于是令 $g_\epsilon = g * \chi_\epsilon$, 则

$$\overline{\partial}^* g_\epsilon \longrightarrow \overline{\partial}^* g,\ Sg_\epsilon \longrightarrow Sg,\ g_\epsilon \longrightarrow g,$$

但 g_ϵ 仅包含在 $C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})$ 中, 并不一定含在 Dom T^* 中, 这是因为, 由前面讨论, 若 $g_\epsilon \in \text{Dom}\ T^* \cap C^\infty_{(0,1)}(\dot{\Omega})$, 则必有

$$\sum(\partial_i r)(g_\epsilon)_i = 0, \tag{3.30}$$

能否做到所有 g_ϵ 同时满足 (3.30) 呢? Hörmander 在 1965 年发展了 Friedrichs 逼近解决了这一难题.

下面我们来介绍 Hörmander 的方法. 令区域 $\Omega = \{r < 0\} \subset \mathbf{R}^N$, 考虑 Ω 上分布意义下的微分方程组:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^J a_{ij}^k D_i u_j + \sum_{j=1}^J b_j^k u_j = f_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant K, \tag{3.31}$$

这里 $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \cdots, N$, a_{ij}^k, $b_j^k \in C^\infty(\overline{\Omega})$. 将其表示为矩阵形式:

$$Au + Bu = f, \tag{3.32}$$

这里 $u = (u_1, \cdots, u_J)^t$, $f = (f_1, \cdots, f_K)^t$. 我们实际需要的是 $f = \begin{pmatrix} T^*u \\ Su \end{pmatrix}$. 记 (3.31) 的前 K^0 个方程为

$$A^0 u + B^0 u = f^0 \tag{3.33}$$

(我们实际遇到的是, $A^0 = (\partial_1, \cdots, \partial_n)$, $B^0 = (\partial_1\varphi, \cdots, \partial_n\varphi)$, 且 $K^0 = 1$, $f^0 = T^*u$). 注意方程 (3.32) 中的 u, $f \in L^2$, 故偏导数均是分布意义下的导数.

现在我们说明如何描述 Dom T^* 的边界条件, 对 $u \in L^2(\Omega)$, 记其平凡延拓为 $\tilde{u}$:

$$u \longrightarrow \tilde{u} \in L^2(\mathbf{R}^N), \quad \tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega, \\ 0, & x \in \mathbf{R}^N \backslash \Omega. \end{cases} \tag{3.34}$$

由定义, $g \in \text{Dom}\ T^*$ 等价于 $(T\varphi,\ g) = (\varphi,\ T^*g)$, $\forall \varphi \in \text{Dom}\ T$, 即 (考虑实的情形)

$$\int_\Omega (T\varphi) g = \int_\Omega \varphi (T^* g).$$

特别的, 上式对紧支于 $\mathbf{R}^N$ 的光滑函数 φ 成立, 由于

$$\int_\Omega (T\varphi) g = \int_\Omega \varphi (T^* g) = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi \widetilde{(T^* g)},$$

且

$$\int_{\Omega}(T\varphi)g=\int_{\mathbf{R}^N}(T\varphi)\tilde{g},$$

故

$$\int_{\mathbf{R}^N}(T\varphi)\tilde{g}=\int_{\mathbf{R}^N}\varphi\widetilde{(T^*g)},$$

上式对所有紧支于 $\mathbf{R}^N$ 的光滑函数 φ 成立, 故

$$T^*\tilde{g}=\widetilde{(T^*g)}. \tag{3.35}$$

于是我们讨论的方程及边界条件可用

$$\begin{cases}(A+B)u=f,\\ A^0\tilde{u}+B^0\tilde{u}=\tilde{f^0}\end{cases} \tag{3.36}$$

来表示. 我们来证明以下定理, 简单起见, 我们将对象限制为有界区域 Ω, 这样 $\mathbf{R}^N$ 中的光滑函数自然在 Ω 上 L^2 可积.

定理 3.7 (Friedrichs-Hörmander) 设 u, $f\in L^2(\Omega)$ 满足 (分布意义下的) 方程:

$$\begin{cases}(A+B)u=f, \quad A=\begin{pmatrix}A^0\\ *\end{pmatrix}_{K\times J}, \quad B=\begin{pmatrix}B^0\\ *\end{pmatrix}_{K\times J},\\ A^0\tilde{u}+B^0\tilde{u}=\tilde{f^0}, \quad f=\begin{pmatrix}f^0\\ *\end{pmatrix}_{K\times 1},\end{cases} \tag{3.37}$$

这里 $\Omega=\{r<0\}\subset\subset\mathbf{R}^N$ 且边界光滑, 假定 $A^0(r)$ 的秩在 $\partial\Omega$ 中为常值, 则存在 $u_v\in C^\infty(\dot{\Omega})$ 使得

$$\begin{cases}u_v\longrightarrow u,\\ Au_v+Bu_v\longrightarrow f,\\ A^0\widetilde{u_v}+B^0\widetilde{u_v}=\widetilde{A^0u_v+B^0}u_v.\end{cases} \tag{3.38}$$

证明: 在证明定理之前, 我们先对结论 (3.38) 中的 $A^0\widetilde{u_v}+B^0\widetilde{u_v}=A^0\widetilde{u_v+B^0}u_v$ 加以解释. 对紧支于 $\mathbf{R}^N$ 的 C^∞ 函数 φ, (3.38) 的最后一行是指

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^N}(A^0\widetilde{u_v}+B^0\widetilde{u_v})\varphi&=\int_{\mathbf{R}^N}(A^0\widetilde{u_v+B^0}u_v)\varphi=\int_{\Omega}(A^0u_v+B^0u_v)\varphi\\&=\int_{\Omega}B^0u_v\varphi+\int_{\Omega}u_v(A^{0^*}\varphi)+\int_{\partial\Omega}A^0(r)u_v\varphi.\end{aligned}$$

在上式中, 我们使用了

$$A^0(u_v\varphi) = A^0 u_v \cdot \varphi + u_v A^0 \varphi$$

及

$$\int_\Omega A^0(u_v\varphi) = \int_{\partial\Omega} A^0(r) u_v \varphi$$

(注意若使用实坐标, $A^{0^*} = -A^0$). 另一方面,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^N} (A^0\widetilde{u_v} + B^0\widetilde{u_v})\varphi &= \int_{\mathbf{R}^N} \widetilde{u_v}(A^{0^*}\varphi) + \int_{\mathbf{R}^N} B^0\widetilde{u_v}\varphi \\ &= \int_\Omega u_v(A^{0^*}\varphi) + \int_\Omega B^0 u_v\varphi,\end{aligned}$$

于是

$$\int_{\partial\Omega} A^0(r) u_v\varphi = 0,$$

从而在 $\partial\Omega$ 上

$$A^0(r)u_v = 0.$$

这里, $A^0 = (-\partial_1, \cdots, -\partial_n)$, $A^0(r)u_v = 0$ 是指 $\sum(\partial_i r)(u_v)_i = 0$, 即 Dom $T^* \cap C^\infty(\dot{\Omega})$ 中元满足的边界条件. 现在, 我们来证明 Friedrichs-Hörmander 定理.

首先我们来说明问题是局部的. 令 $\{\rho_i\}$ 是 Ω 的单位分解, 则

$$u = \sum \rho_i u = \sum u_{(i)},$$

这里 $u_{(i)} := \rho_i u$, 于是

$$\begin{aligned}Au_{(i)} + Bu_{(i)} &= \rho_i(Au + Bu) + (A\rho_i)u \\ &= \rho_i f + (A\rho_i)u := f_{(i)}.\end{aligned}$$

显然, Supp $u_{(i)} \subset$ Supp ρ_i, Supp $f_{(i)} \subset$ Supp ρ_i. 若 Supp $\rho_i \cap \partial\Omega = \varnothing$, 无边界条件的影响, 可直接使用 Friedrichs 定理. 若 Supp $\rho_i \cap \partial\Omega \neq \varnothing$, 设 Supp ρ_i 充分小, 由于 $\partial\Omega$ 光滑, 进一步假定 $|dr| \neq 0$, 于是可视 r 为某个局部坐标, 不妨设 $x_N = r$, 在这个局部坐标下, Ω 可局部表示为 $\{x_N < 0\}$. 于是

$$D_i r = D_i x_N = \frac{\partial x_N}{\partial x_i} = 0 \quad (i \neq N),$$

$$A^0(r) = \left(\sum_{i=1}^N a_{ij}^k (D_i r)\right) = (a_{Nj}^k)_{1\leqslant j\leqslant J,\ 1\leqslant k\leqslant K^0}.$$

由定理的假定, $A^0(r)$ 的秩在 $\partial\Omega$ 上是常值, 设其为 s, 则经过行与列变换, $A^0(r)$ 形如

$$A^0(r) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} s \\ K^0 - s \end{matrix}, \tag{3.39}$$

$$s \quad J-s$$

A^0 的行变换是指其每行乘以适当的光滑函数, 然后作线性组合, 这些均不影响定理的假定. 列变换是

$$u_i \longrightarrow v_i, \quad u_i = \sum \lambda_{ij} v_j, \quad \lambda_{ij} \in C^\infty(\dot{\Omega}),$$
$$u = \Lambda v, \quad \Lambda = (\lambda_{ij}),$$

由于

$$A^0(\Lambda v) = (A^0\Lambda)v + \Lambda(A^0 v),$$

故

$$A^0 u + B^0 u = \widetilde{A^0} v + \widetilde{B^0} v,$$

这里 $\widetilde{A^0}$ 是 A^0 经列变换后的算子矩阵. $\widetilde{B^0}$ 与 B^0 均由 $C^\infty(\overline{\Omega})$ 上的函数组成, 由于

$$\widetilde{u_i} = (\widetilde{\sum \lambda_{ij} v_j}) = \sum \lambda_{ij} \widetilde{v_j},$$

故不影响定理的假定. 因此不妨假定 $A^0(r)$ 是 (3.39) 中最简单形式. 此时边界条件是

$$A^0\tilde{u} + B^0\tilde{u} = (\widetilde{A^0 u + B^0 u}),$$

即 $A^0\tilde{u} = \widetilde{A^0 u}$, 同时有

$$\sum_{i,j} a_{ij}^k D_i \widetilde{u_j} = \sum_{i,j} \widetilde{a_{ij}^k D_i u_j}.$$

由于此时 Ω 可局部表示为 $\{x_N < 0\}$, 故 $D_i\tilde{u} = \widetilde{D_i u}$; $i < N$ (这是因为由前面单位分解, u 在 $\{x_N = 0\}$ 以外的边界附近为零). 于是上面的方程可化为

$$\sum_j a_{Nj}^k D_N \widetilde{u_j} = \sum_j a_{Nj}^k \widetilde{D_N u_j}.$$

由于 $(a_{Nj}^k) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 故上式等价于

$$D_N \widetilde{u_j} = \widetilde{D_N u_j}, \quad j = 1, \cdots, s. \tag{3.40}$$

现在将 $u=(u_1,\cdots,u_s,u_{s+1},\cdots,u_J)^t$ 的分量分为两部分. 第一部分是 $(u_1,\cdots,u_s)$, 第二部分是 $(u_{s+1},\cdots,u_J)$. 则第一部分需满足边界条件 $D_N\widetilde{u_j}=\widetilde{D_N u_j}$.

下面我们来证明, 对每个 u_j, 可选取满足定理要求的 $(u_j)_\epsilon$. 特别的, 对 $1\leqslant j\leqslant s$, $(u_j)_\epsilon$ 满足边界条件:

$$D_N\widetilde{(u_j)_\epsilon}=\widetilde{D_N(u_j)_\epsilon}.$$

怎样选取 $(u_j)_\epsilon$ 呢? 事实上, 我们仍然使用卷积

$$(u_j)_\epsilon=u_j*\chi_\epsilon,$$

但为了保证 $D_N\widetilde{(u_j)_\epsilon}=\widetilde{D_N(u_j)_\epsilon}$ $(1\leqslant j\leqslant s)$, 我们要求 $(u_j)_\epsilon$ 在 $x_N=0$ 附近为零. 于是, 回忆 "$\sim$" 的定义

$$\tilde{u}=\begin{cases}u, & x_N<0,\\ 0, & x_N\geqslant 0.\end{cases}$$

现在 $(u_j)_\epsilon$ 在 $x_N=0$ 附近为零, 可自然将其光滑延拓, 使其在 $x_N\geqslant 0$ 上为零, 则自然有

$$D_N\widetilde{(u_j)_\epsilon}=\widetilde{D_N(u_j)_\epsilon},$$

如何保证 $(u_j)_\epsilon$ 在 $x_N=0$ 附近为零呢? 若使用前面构造的以零为中心的磨光函数 $\chi_\epsilon(x)$, 一般来说, $f*\chi_\epsilon$ 的支集比 f 的要大. 因此, 我们要使用中心在原点左边的磨光函数 (图 3.1). 则

$$\begin{aligned}u_\epsilon(x)=u*\chi_\epsilon^R&=\int_{-\infty}^{\infty}u(x-y)\chi_\epsilon(y-t)dy\\&=\int_{-\infty}^{\infty}u(x+t-y)\chi_\epsilon(y)dy\\&=T_tu*\chi_\epsilon,\end{aligned}$$

这里 $(T_tu)(x)=u(x+t)$. 因此, 若 $\operatorname{Supp}u\subset\{x_N\leqslant 0\}$, $\operatorname{Supp}u_\epsilon\subset\{x_N\leqslant\epsilon+t\}$, 故若 $\epsilon<(-t)$ (t 是正常数), 就有 u_ϵ 在 $x_N=0$ 附近为零 (图 3.2). 且由 Friedrichs 定理, $u_\epsilon\longrightarrow u$ 且 $Au_\epsilon\longrightarrow Au$ $(\epsilon\to 0)$.

第二组 u_j $(s+1\leqslant j\leqslant J)$ (后面为简化记号, 用 u 表示 u_j), 没有边界条件

$$D_N\tilde{u}=\widetilde{D_Nu},$$

我们需要找到 u 的满足我们要求的磨光 u_ϵ, 这就需要选取中心在原点右边的 χ_ϵ, 这是因为除了 $u_\epsilon\longrightarrow u$ 之外, 我们还需要

$$Au_\epsilon\longrightarrow Au,$$

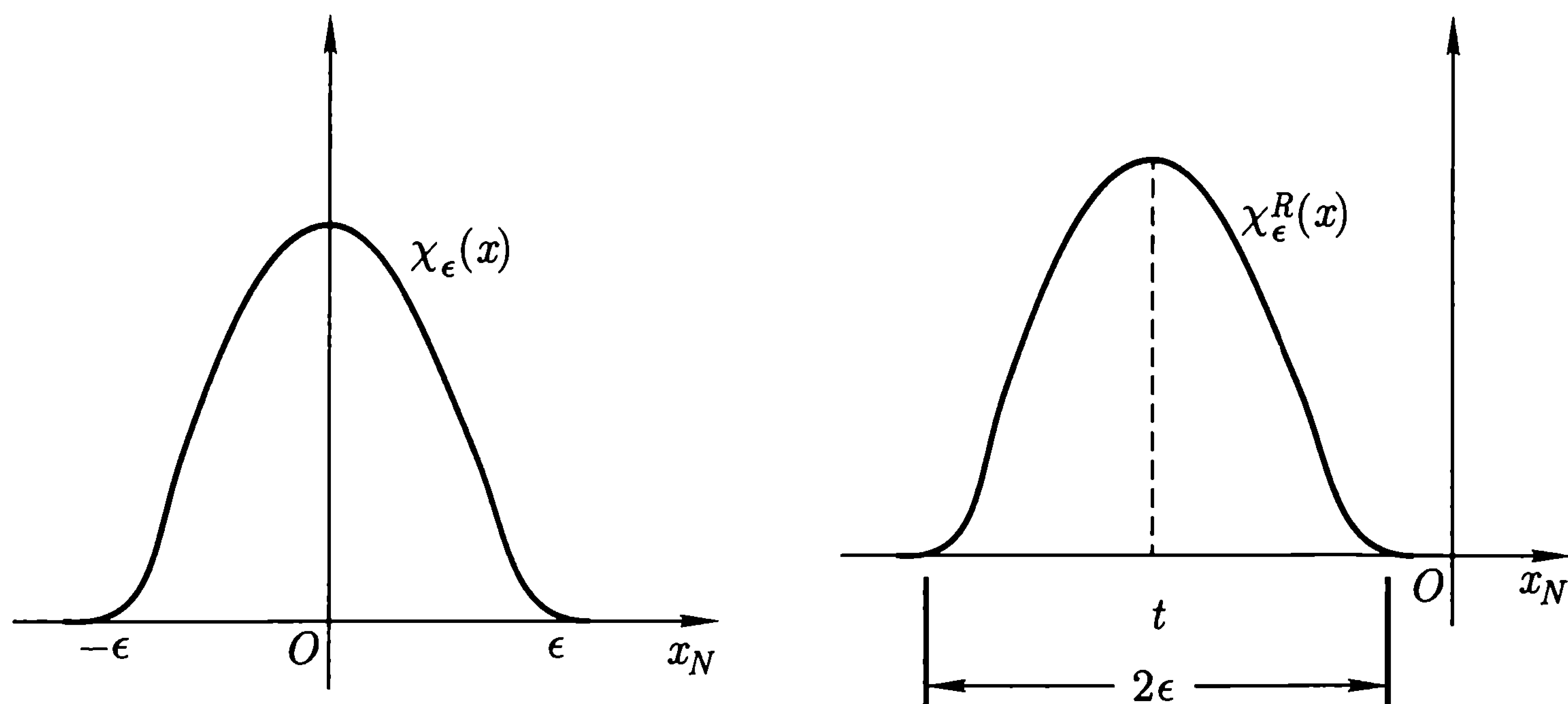


图 3.1

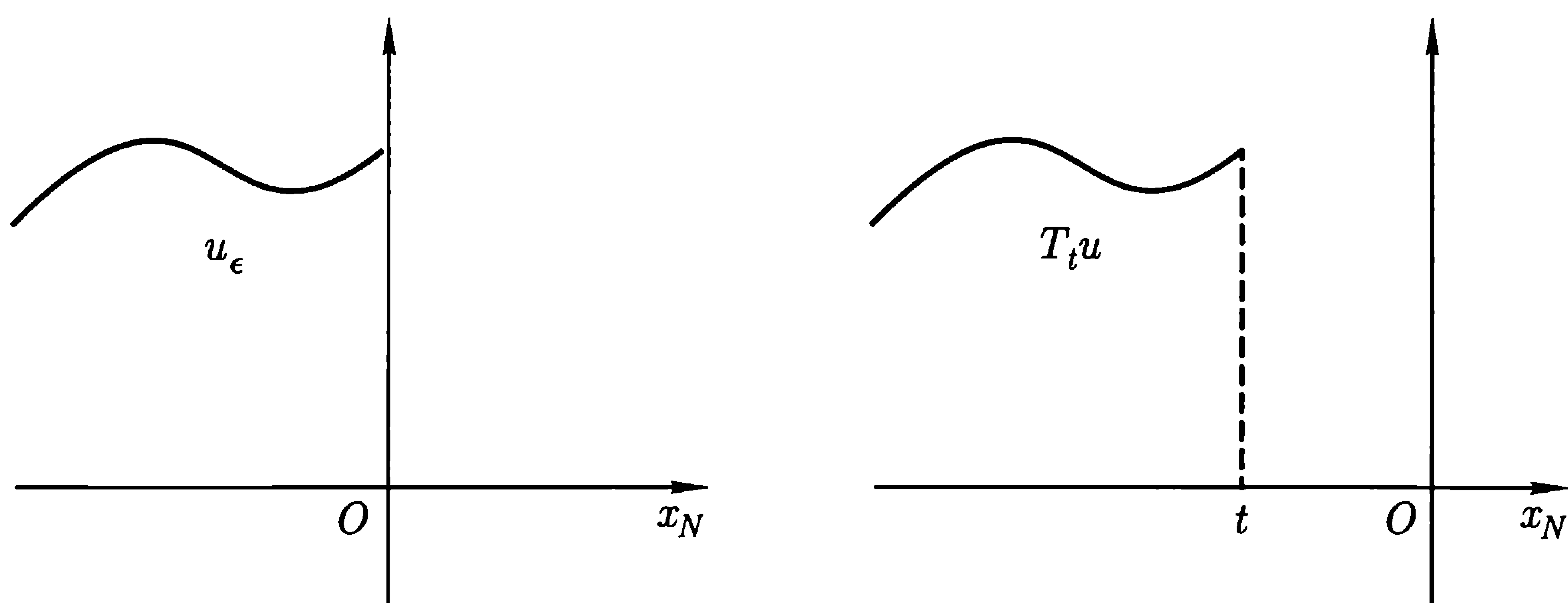


图 3.2

A 包含 $\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_N}$. 由定理条件中 u 满足的方程及前面对 A 的处理知 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}u$ $(1 \leqslant i \leqslant N)$ 总是 L^2 的, 对 $i \neq N$, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}u_\epsilon \longrightarrow \dfrac{\partial}{\partial x_i}u$ 可由 Friedrichs 定理直接得到 (这里对 χ_ϵ 没有限制, 因为 u 作为 $x_i (i \neq N)$ 的函数在原点两边均有定义). 但对 x_N, u 作为 x_N 的函数仅定义在原点左边 $\{x_N < 0\}$. 由于在分布意义下, 总是有

$$(D_N u) * \chi_\epsilon = D_N(u * \chi_\epsilon),$$

这里 $D_N = \dfrac{\partial}{\partial x_N}$. 故只需证明

$$(u')_\epsilon \longrightarrow u',$$

这里用 u' 表示 $\dfrac{\partial}{\partial x_N}u$. 上式证明的核心是 (参考 Friedrichs 定理证明的第二步) Riemann-Lebesque 引理:

$$\|(u')(x-y) - u'(x)\| \longrightarrow 0 \quad (\text{当 } y \to 0).$$

这就要求当 $y \in \text{Supp}\ \chi_\epsilon$ 时, $u'(x-y) = T_{-y}u' \in L^2\ (\{x_N < 0\})$. 然而, 当 $y < 0$ 时, $T_{-y}u'$ 并不能定义在整个 $\{x_N < 0\}$ 上 (见图 3.3). 且平凡延拓不能保证 $T_{-y}u' \in L^2\ (\{x_N < 0\})$. 因为 u' 必须是 u 在分布意义下的导数, 对 $T_{-y}u'$ 使用平凡延拓, 需要

$$\widetilde{u'} = (\tilde{u})',$$

但对于 u 分量第二部分, 上式并不成立. 因此, 对一般的 u, $(\tilde{u})'$ 并非 L^2 的. 因此在光滑化过程中, 我们需要 $y \in \text{Supp}\ \chi_\epsilon > 0$, 即 χ_ϵ 的中心在原点右边 (见图 3.4).

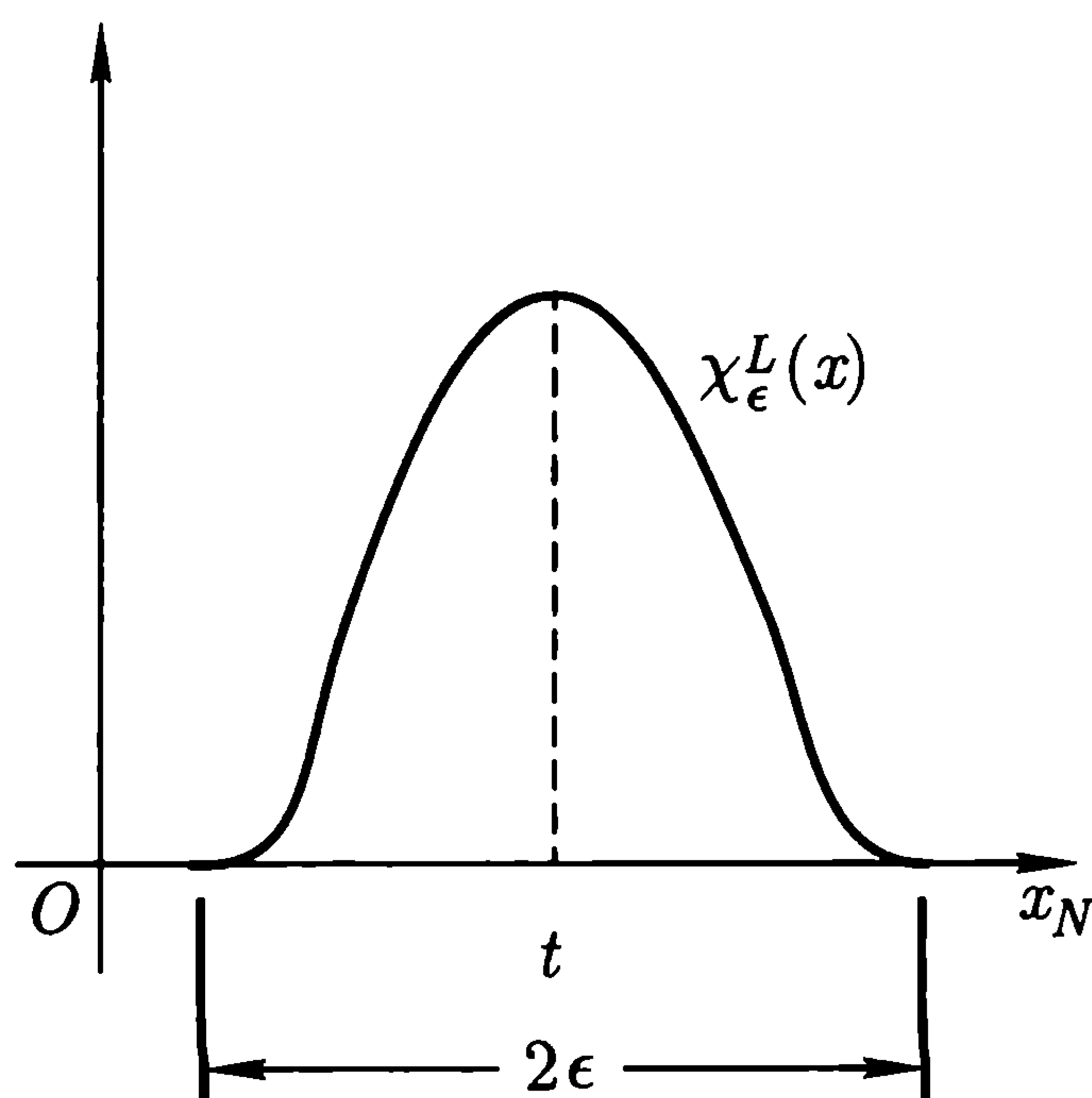


图 3.3

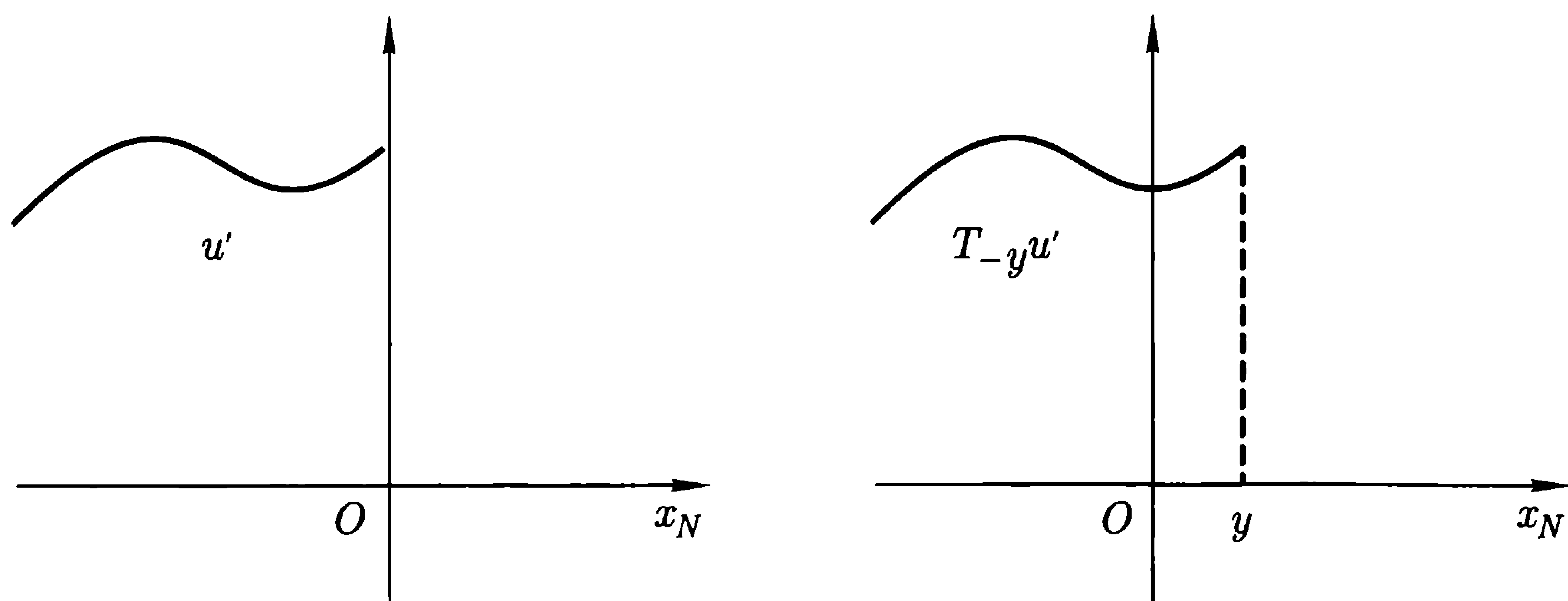


图 3.4

这样就确保 $(T_{-y}u')\,|_{x_N<0} \in L^2\ (\{x_N < 0\})$ (见图 3.4). 于是定理得证. □

这样, 我们就证明了, 对于光滑边界的有界拟凸域 Ω, 若 $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ 满足

$$\sum (\partial_i \overline{\partial}_j \varphi)\xi_i \overline{\xi}_j \geqslant c \sum |\xi_i|^2,$$

则对 $g \in \text{Dom}\ T^* \cap \text{Dom}\ S$, 以下估计成立

$$c\|g\|^2 \leqslant (\|T^*g\|^2 + \|Sg\|^2).$$

由前面的讨论, 此时, $\overline{\partial}$ 方程可解: 对任意 $f \in L^2_{(0,1)}(\Omega,\varphi)$, $\overline{\partial}f = 0$, 存在 $u \in L^2(\Omega,\varphi)$, 满足

$$\overline{\partial}u = f \text{ (分布意义下)}, \quad \|u\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{c}}\|f\|, \tag{3.41}$$

且 u 垂直于 $L^2(\Omega,\varphi)$ 中的全纯函数. 事实上, 由经典的逼近技巧, 在一般拟凸域上, (3.41) 依然成立.

下面我们来讨论解 u 的正则性问题: 当 f 充分光滑时, $\overline{\partial}u = f$ 的解 u 是否也满足相应的光滑条件. 这方面比较弱的结果是:

定理 3.8 (内正则定理) *对于光滑边界的拟凸域 Ω, $\overline{\partial}u=f$, 若 $f\in C^\infty_{(0,1)}(\Omega)$, 则任意解 $u \in C^\infty(\Omega)$.*

比较强的结果是:

定理 3.9 (Kohn 定理) *对于光滑边界的强拟凸域 Ω, $\overline{\partial}u = f$, 若 $f \in C^\infty_{(0,1)}(\overline{\Omega})$, 则存在解 $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

我们仅讨论内正则性. 称

$$L^2(\Omega,\mathrm{loc}) = \{g \mid \text{任意紧集 } K \subset \Omega,\ g \in L^2(K)\} \tag{3.42}$$

为**局部 L^2 空间**.

引理 3.10 *若 $\overline{\partial}u = f \in L^2(\Omega,\mathrm{loc})$, 则 u 的一阶偏导在 $L^2(\Omega,\mathrm{loc})$ 中.*

证明: 显然, 只需证明 $\partial_i u$ $(i = 1,\cdots,n) \in L^2(\Omega,\mathrm{loc})$. 先假定 u 紧支于 Ω. 由 Friedrichs 定理, 存在紧支于 Ω 的光滑 u_ϵ, 使得

$$u_\epsilon \longrightarrow u, \quad \overline{\partial}_i u_\epsilon \longrightarrow \overline{\partial}_i u.$$

首先注意到

$$\begin{aligned}\int |\partial_i u_\epsilon|^2 &= \int (\partial_i u_\epsilon)\overline{(\partial_i u_\epsilon)} = -\int (\overline{\partial}_i \partial_i u_\epsilon)\overline{u_\epsilon} \\ &= -\int (\partial_i \overline{\partial}_i u_\epsilon)\overline{u_\epsilon} = \int |\overline{\partial}_i u_\epsilon|^2.\end{aligned}$$

其次, 由于 $\overline{\partial}_i u_\epsilon \longrightarrow \overline{\partial}_i u$, 故存在独立于 ϵ 的常数 c, 使得

$$\int |\overline{\partial}_i u_\epsilon|^2 < c.$$

由于 Hilbert 空间中的有界闭集弱紧, 故存在弱收敛子列, 不妨假定弱收敛意义

下 $\overline{\partial}_i u_\epsilon \longrightarrow g$, 即对任意 $h \in C_0^\infty(\Omega)$, 有

$$\begin{array}{c}(\partial_i u_\epsilon,\ h) \longrightarrow (g,\ h),\\ \| \\ -(u_\epsilon,\ \partial_i h) \longrightarrow -(u, \partial_i h)\ (u_\epsilon \to u).\end{array}$$

于是

$$(g,\ h) = -(u,\ \partial_i h).$$

因此 $\partial_i u = g$, 故 $\partial_i u$ 局部 L^2.

一般情形, 对任意紧集 $K \subset \Omega$, 选取紧支于 Ω 的切割函数 $\rho \geqslant 0$ 且在 K 上 $\rho \equiv 1$, 由于

$$\overline{\partial}(\rho u) = (\overline{\partial}\rho)u + \rho\overline{\partial}u = (\overline{\partial}\rho)u + \rho f,$$

右边自然 L^2, 而 ρu 紧支于 Ω, 故 $\partial_i(\rho u) \in L^2$, 即 $\partial_i u$ 局部 L^2. □

现在我们可以证明正则性定理了. 令 $\overline{\partial}u = f$, 若 f 在分布意义下的 s 阶导数局部 L^2, 由

$$D^s f = D^s \overline{\partial} u = \overline{\partial}(D^s u),$$

利用前面的引理, 知 $\partial(D^s u) \in L^2(\Omega, \mathrm{loc})$, 即 u 的阶 $\leqslant s+1$ 的广义导数局部 L^2. 因此, 若 f 各阶导数均局部 L^2, u 亦然. 由 Sobolev 引理, 任意直到 $s+n$ $(\Omega \subset \mathbf{R}^{2n})$ 阶广义导数局部 L^2 的函数必在 $C^s(\Omega)$ 中, 于是 $u \in C^\infty(\Omega)$. □

注: 本节, 我们只在拟凸域上对 $(0,1)$-形式 f 使用 L^2 方法解方程 $\overline{\partial}u = f$. 事实上, 对 $(0, p)$-形式 f $(1 \leqslant p \leqslant n)$ 可类似讨论.

§3.2 Levi 问 题

下面我们用 $\overline{\partial}$ 方法解决 Levi 问题. 事实上, Levi 问题最早是用凝聚解析层方法解决的, L^2 方法是后来出现的. L^2 方法的优势是对解有 L^2 估计, 劣势是不能推广到复空间. 第三种方法是积分表示, 对解有 L^∞ 估计, 我们把它放在第五章讨论.

定理 3.11 (Levi 问题) *若 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 是光滑边界有界拟凸域, 则 Ω 是全纯域.*

证明之前, 先回顾拟凸域上 $\overline{\partial}$ 问题: 若 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 有界拟凸且边界光滑, $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, 满足

$$\sum (\partial_i \overline{\partial}_j \varphi)\xi_i \overline{\xi}_j \geqslant c \sum |\xi_i|^2, \quad c > 0, \tag{3.43}$$

则 $\overline{\partial}$ 方程可解, 且有相应的内正则性. 我们先说明 (3.43) 可放松到 φ 仅是多次调和函数.

引理 3.12 设 Ω 是拟凸域, φ 是 $\overline{\Omega}$ 邻域上的多次调和函数, 若 f 是满足

$$\int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi-|z|^2} < +\infty \quad (|z|^2 = \sum z_i\overline{z_i}) \tag{3.44}$$

的 $\overline{\partial}$ 闭 (0,1)-形式, 则存在 u, 使得 $\overline{\partial}u = f$, 且

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi-|z|^2} \leqslant \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi-|z|^2}. \tag{3.45}$$

证明: 若 $\varphi \in C^\infty$ 且 φ 多次调和, 则 $(\partial_i\overline{\partial}_j\varphi) \geqslant 0$, 因此

$$\sum \partial_i\overline{\partial}_j(\varphi + |z|^2)\xi_i\overline{\xi}_j \geqslant \sum |\xi_i|^2. \tag{3.46}$$

用 $\varphi + |z|^2$ 代替前面 $\overline{\partial}$ 问题中的 φ, 则 (3.46) 等价于 (3.43) 中 $c = 1$, 这就证明了 (3.45).

对一般的 φ, 可利用卷积 $\varphi_\epsilon = \varphi * \chi_\epsilon$, 适当选取子列 $\varphi_\epsilon \searrow \varphi$: 令 χ 是仅依赖 $|z|$ 的, 紧支于 $|z| \leqslant 1$ 的光滑函数, 且 $\chi \geqslant 0$, $\displaystyle\int \chi = 1$. 令 $\chi_\epsilon = \dfrac{1}{\epsilon^{2n}}\chi\left(\dfrac{z}{\epsilon}\right)$. 简单起见, 假定 $n = 1$. 令 $t = re^{i\theta}$, $d\sigma_t$ 是 $\mathbf{C}$ 的体积元, 则

$$\begin{aligned}(\varphi * \chi_\epsilon)(z) &= \int \varphi(z-t)\chi_\epsilon(t)d\sigma_t = \int \varphi(z - re^{i\theta})\chi_\epsilon(r)rdrd\theta \\ &= \int_0^\epsilon \int_0^{2\pi} \varphi(z - re^{i\theta})d\theta r\chi_\epsilon(r)dr \\ &\geqslant \left(2\pi \int_0^\epsilon \chi_\epsilon(r)rdr\right)\varphi(z) \\ &= \varphi(z)\int_0^\epsilon\int_0^{2\pi} \chi_\epsilon(r)rdrd\theta = \varphi(z).\end{aligned}$$

由于 φ 上半连续, 故局部有上界. 取 $\overline{\Omega}$ 的充分小的邻域 G, 令 $\operatorname*{Sup}_G\varphi = M$, 则

$$\varphi_\epsilon(z) = (\varphi * \chi_\epsilon)(z) = \int \varphi(z-t)\chi_\epsilon(t) \leqslant M\int \chi_\epsilon(t) = M,$$

于是有 $\varphi_\epsilon \longrightarrow \varphi$ $(\epsilon \to 0)$, $\varphi(z) \leqslant \varphi_\epsilon(z) \leqslant M$, 且由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_\epsilon(z + re^{i\theta}w)d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int \varphi(z + re^{i\theta}w - t)\chi_\epsilon(t)d\sigma_t d\theta \\ &= \int\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(z - t + te^{i\theta}w)\chi_\epsilon(t)d\theta\right)d\sigma_t \\ &\geqslant \int \varphi(z-t)\chi_\epsilon(t)d\sigma_t = \varphi_\epsilon(z),\end{aligned}$$

知 φ_ϵ 也多次调和. 在 φ_ϵ 中选 φ_v, 使得 $\varphi_v \longrightarrow \varphi$ $(\varphi \to \infty)$. 关于权 φ_v 解 $\overline{\partial}$ 问题 (由于它们光滑), 知存在 u_v, 满足 $\overline{\partial} u_v = f$ 且

$$\int_\Omega |u_v|^2 e^{-\varphi_v - |z|^2} \leqslant \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi_v - |z|^2} \leqslant \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi - |z|^2} < +\infty,$$

由于 $\varphi_v \leqslant M$, 故

$$\int_\Omega |u_v|^2 e^{-M - |z|^2} \leqslant \int_\Omega |u_v|^2 e^{-\varphi_v - |z|^2} < +\infty.$$

于是 $\{u_v\}$ 在加权 L^2 空间中一致有界. 由于

$$\overline{\partial}(u_v - u_1) = 0,$$

知 $\{u_v - u_1\}$ 是 Ω 中的一族解析函数. 由于

$$\int |u_v - u_1|^2 \leqslant \int |u_v|^2 + |u_1|^2 < +\infty.$$

由 Cauchy 估计, 对 Ω 中任意固定的紧集 K, $\{u_v - u_1\}$ 在 K 上一致有界, 于是 $\{u_v - u_1\}$ 是解析函数的正规族. 故存在子列 (不失一般性, 仍设为 $\{u_v - u_1\}$) 局部一致收敛到解析函数 $u - u_1$. 于是

$$\overline{\partial} u = \overline{\partial}(u - u_1) + \overline{\partial} u_1 = f.$$

由 Fatou 引理 $\left(\int \underline{\lim} |f_n| \leqslant \underline{\lim} \int |f_n|\right)$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi - |z|^2} &= \int \lim_v |u_v|^2 e^{-\varphi_v - |z|^2} \\ &\leqslant \underline{\lim} \int |u_v|^2 e^{-\varphi_v - |z|^2} \\ &\leqslant \int |f|^2 e^{-\varphi - |z|^2}.\end{aligned}$$

故引理得证. □

下面的引理表明, 仅需要 φ 在 Ω 上多次调和.

引理 3.13 *引理 3.12 对仅在 Ω 上多次调和的 φ 也成立.*

证明: 与引理 3.12 的证明不同的地方是, 不能使用 $\varphi * \chi_\epsilon$ 的方法: 由于 φ 仅在 Ω 上有定义, $\varphi * \chi_\epsilon$ 不能定义在整个 Ω 上.

由第二章的结论, 若 Ω 是光滑边界的拟凸域, 则 $-\log\, d$ 光滑且多次调和. 令

$$\Omega_c = \{-\log d < c\},$$

由 Sard 定理 (若 $f: \Omega \longrightarrow \mathbf{R}^n$ 光滑, 则集合 $\{f(x)|x \in \Omega,\ df(x) = 0\}$ 的测度为零), 故对几乎所有的 c, $(-\log d - c)$ 的梯度在 $\partial\Omega_c$ 上不为零, 由于 $-\log d$ 多次调和, 故对这些 c, Ω_c 是拟凸域.

若 $(0,1)$-形式 f 满足 $\overline{\partial} f = 0$, $\displaystyle\int |f|^2 e^{-\varphi-|z|^2} < +\infty$, 对 Ω_c 应用引理 3.12, 知存在 u_c,

$$\overline{\partial} u_c = f\,|_{\Omega_c}\,,$$

且

$$\int_{\Omega_c} |u_c|^2 e^{-\varphi-|z|^2} \leqslant \int_{\Omega_c} |f|^2 e^{-\varphi-|z|^2} \leqslant \int_{\Omega} |f|^2 e^{-\varphi-|z|^2}.$$

显然, 若 $d > c$, 则 $\Omega_c \subset \Omega_d$, $\overline{\partial}(u_c - u_d)\,|_{\Omega_c} = 0$, 即 $u_c - u_d$ 在 Ω_c 上全纯.

由于 φ 上半连续, 故其在 Ω 的任意紧集上有上界, 于是 $e^{-\varphi-|z|^2}$ 在 Ω 的任意紧集上有下界. 类似引理 3.12 的证明, 对任意紧集 $K \subset \Omega_c \cap \Omega_d$, $\{u_c - u_d\}$ 在 K 上一致有界. 故对任意固定的 c, $\{u_d - u_c\}_{d>c}$ 是 Ω_c 上全纯函数的正规族.

现在任意选定 c_1. 在 $\{u_d - u_{c_1}\}_{d>c_1}$ 中选取子列

$$\{u_{d_1} - u_{c_1}, u_{d_2} - u_{c_1}, \cdots\}$$

在 Ω_{c_1} 上一致收敛. 令 c_2 是 $\{d_1, d_2, \cdots\}$ 中充分大的数. 在 $\{u_{d_m} - u_{c_2}\}_{d_m>c_2}$ 中选取子列

$$\{u_{e_1} - u_{c_2}, u_{e_2} - u_{c_2}, \cdots\}$$

在 Ω_{c_2} 中一致收敛. 注意到 $\{e_i\}$ 是 $\{d_i\}$ 的子列. 令 c_3 是 $\{e_1, e_2, \cdots\}$ 中充分大的数, 将上述步骤进行下去, 知 $c_j \to \infty$, 且对每个 i, $\{u_{c_j} - u_{c_i}\}$ $(j \to \infty)$ 一致收敛到 Ω_{c_i} 上的解析函数. 因此, $u = \lim\limits_{j} u_{c_j}$ 存在, 且对每个 i, $(u - u_{c_i})$ 在 Ω_{c_i} 上全纯. 于是在 Ω_{c_i} 上, $\overline{\partial} u = \overline{\partial}(u - u_{c_i} + u_{c_i}) = f$, 因此在整个 Ω 上, $\overline{\partial} u = f$.

由 Fatou 引理,

$$\int_{\Omega_c} |u|^2 e^{-\varphi-|z|^2} \leqslant \varliminf_{j\to\infty} \int_{\Omega_c} |u_{c_j}|^2 e^{-\varphi-|z|^2} \leqslant \int_{\Omega} |f|^2 e^{-\varphi-|z|^2}.$$

令 $c \to \infty$, 则

$$\int_{\Omega} |u|^2 e^{-\varphi-|z|^2} \leqslant \int_{\Omega} |f|^2 e^{-\varphi-|z|^2},$$

故引理得证. □

现在证明 Levi 猜想.

定理 3.14 (Levi 猜想) 若 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 是光滑边界的有界拟凸域, 则 Ω 是全纯域.

证明: 只需证明, 对 $\partial\Omega$ 中每个点 a^*, 存在 Ω 上解析函数不能解析延拓过 a^*.

任意固定 $a^* \in \partial\Omega$. 选 Ω 中的点 a_i, 使得 $a_i \longrightarrow a^*$. 若能构造解析函数 F, 满足 $F(a_i) = i$ $(i = 1, 2, \cdots)$, 则定理得证.

对每个 a_i, 选邻域 U_i, 满足 U_i 两两不相交. 取函数 $\rho_i \in C^\infty$, $\rho_i \geqslant 0$, $\mathrm{Supp}\,\rho_i \subset U_i$, 且在 a_i 的某个更小的邻域上恒等于 1.

令 $f = \overline{\partial}(\sum i\rho_i) \in C^\infty_{(0,1)}(\overline{\Omega})$, 解 $\overline{\partial}u = f$. 由拟凸域上 $\overline{\partial}$ 问题的可解性及内正则性, 解 u 存在且 $u \in C^\infty(\Omega)$.

令 $F = \sum i\rho_i - u$, 则

$$\overline{\partial}F = \overline{\partial}(\sum i\rho_i) - \overline{\partial}u = f - \overline{\partial}u = 0,$$

因此 F 在 Ω 上全纯. 若能证明 $u(a_i) = 0$, 则

$$F(a_i) = (\sum i\rho_i - u)(a_i) = i.$$

为证明 $u(a_i) = 0$, 我们必须用到 $\overline{\partial}$ 方程解的估计. 由引理 3.13, 若 φ 在 Ω 上多次调和且

$$\int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi-|z|^2} < +\infty,$$

则 $\overline{\partial}u = f$ 的 L^2 极小解 u 满足估计

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\varphi-|z|^2} \leqslant \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi-|z|^2} < +\infty.$$

可选取 φ 使得 φ 在 a_i 附近下降得充分快, 且 $\varphi(a_i) = -\infty$ (注意多次调和函数是可以取 $-\infty$ 的), 若其下降充分快, 则在 a_i 附近的积分 $\int e^{-\varphi-|z|^2} = +\infty$, 若 $u(a_i) \neq 0$ (注意 u 是 C^∞ 的), 则与 $\int |u|^2 e^{-\varphi-|z|^2} < +\infty$ 矛盾. 当然, φ 的选取还有进一步的限制, 即同时保证

$$\int |f|^2 e^{-\varphi-|z|^2} < +\infty.$$

由于 $f = \overline{\partial}(\sum i\rho_i)$, $\sum i\rho_i$ 在 a_i 附近恒等于 i, 故 f 在 a_i 附近为零, 故选取这样的 φ 是可能的.

如何选取 φ?

首先令 $\psi = \sum\limits_m \rho_m \log|z - a_m|$, 则 ψ 在 $z = a_m$ $(m = 1, 2, \cdots)$ 外是光滑的, 且紧支于 $\bigcup\limits_m \mathrm{Supp}\,\rho_m$. 但通常 ψ 不是多次调和的.

考虑 $\chi = -\log d + |z|^2$, 由于 Ω 是光滑边界的拟凸域, $-\log d$ 光滑且多次调和, 故 $-\log d + |z|^2$ 强多次调和, 显然, 当 $z \to \partial\Omega$, $\chi(z) \longrightarrow \infty$.

适当选取凸增函数 $\sigma: R \longrightarrow R$ 满足 $\sigma' \geqslant 0$, $\sigma'' \geqslant 0$. 我们将证明 $\varphi = \sigma \circ \chi + \psi$ 满足前面提到的条件:

1. φ 多次调和.

事实上,

$$\partial_i\overline{\partial}_j(\sigma \circ \chi) = (\sigma' \circ \chi)\partial_i\overline{\partial}_j\chi + (\sigma'' \circ \chi)\partial_i\chi \circ \overline{\partial_j\chi},$$

$$\begin{aligned}\sum \partial_i\overline{\partial}_j(\sigma \circ \chi)\xi_i\overline{\xi}_j &= \sum(\sigma' \circ \chi)(\partial_i\overline{\partial}_j\chi)\xi_i\overline{\xi}_j + (\sigma'' \circ \chi)\left|\sum(\partial_i\chi)\xi_i\right|^2 \\ &\geqslant (\sigma' \circ \chi)\sum|\xi_i|^2,\end{aligned}$$

这里我们用到 $\sigma'' \geqslant 0$, 且

$$\partial_i\overline{\partial}_j\chi = \partial_i\overline{\partial}_j(-\log d + |z|^2) \geqslant I,$$

因此, 若 $z \notin \mathrm{Supp}\ \psi \subset \bigcup\limits_m \mathrm{Supp}\ \rho_m$, 则

$$\begin{aligned}\sum(\partial_i\overline{\partial}_j\varphi)\xi_i\overline{\xi}_j &= \sum \partial_i\overline{\partial}_j(\sigma \circ \chi + \psi)\xi_i\overline{\xi}_j \\ &= \sum \partial_i\overline{\partial}_j(\sigma \circ \chi)\xi_i\overline{\xi}_j \geqslant 0.\end{aligned}$$

由于在 a_m 附近 $\rho_m \equiv 1$, 且

$$\partial_i\overline{\partial}_j 2\log|z - a_m| = \frac{\delta_{ij}}{|z - a_m|^2} - \frac{1}{|z - a_m|^4}\left((z_i - a_m^i)(\overline{z}_j - \overline{a}_m^j)\right),$$

故

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}\partial_i\overline{\partial}_j 2\log|z - a_m|\xi_i\overline{\xi}_j &= \frac{1}{|z - a_m|^2}\sum|\xi_i|^2 - \frac{1}{|z - a_m|^4}\left|\sum(z_i - a_m^i)\xi_i\right|^2 \\ &\geqslant \frac{1}{|z - a_m|^2}\sum|\xi_i|^2 - \frac{1}{|z - a_m|^4}\left(\sum|\xi_i|^2\right)|z - a_m|^2 \\ &\geqslant 0.\end{aligned}$$

对于 $\mathrm{Supp}\ \rho_m$ 中的点, $(\partial_i\overline{\partial}_j\psi)$ 可能不是半正定的, 但总是有界的. 若 σ' 增长得充分快 (可令 σ'' 充分大), 则

$$(\sigma' \circ \chi)(\sum|\xi_i|^2) + \sum(\partial_i\overline{\partial}_j\psi)\xi_i\overline{\xi}_j \geqslant 0,$$

即 $\varphi = \sigma \circ \chi + \psi$ 多次调和.

2. 我们来说明

$$\int |f|^2 e^{-\varphi-|z|^2} < +\infty.$$

由于在每个 a_m 的充分小的邻域上, $f \equiv 0$, 且在那些邻域之外, $|f|^2 e^{-\psi-|z|^2}$ 局部有界. 故若选 σ, 使得当 $x \to +\infty$ 时, $\sigma(x) \longrightarrow +\infty$ 增长得充分快, 则当 $z \to \partial\Omega$ 时, $\chi(z) \longrightarrow \infty$. 于是 $(\sigma \circ \chi)(z) \longrightarrow +\infty$, $e^{-\sigma\circ\chi(z)} \longrightarrow 0$, 则有

$$\int |f|^2 e^{-\psi-|z|^2} \cdot e^{-\sigma\circ\chi} = \int |f|^2 e^{-\varphi-|z|^2} < +\infty.$$

具体的构造过程是先选取 σ', 然后令 $\sigma = \int \sigma'$.

最后, 由 φ 在各个 a_i 点的 log 奇性知, 此时必有 $u(a_i) = 0$, 故定理得证. □

§3.3 Cousin 问题与除法问题

本节讨论解 $\overline{\partial}$ 方程的应用: 第一 Cousin 问题, 第二 Cousin 问题与除法问题. 这些问题不仅在多复变中有重要地位, 在数学的其他分支中也很重要.

3.3.1 第一 Cousin 问题

第一 Cousin 问题是单复变中 Mittag-Leffler 定理 (给定奇点的亚纯函数存在定理) 的推广. 多复变中的第一 Cousin 问题是指: 给定 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$, 设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 为 Ω 的开覆盖, 函数族 $\{f_i\}_{i\in I}$ 满足, f_i 在 U_i 中亚纯且

$$f_j - f_i \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j),$$

称 $\{f_i, U_i\}_{i\in I}$ 为 Ω 上第一 Cousin 问题的分布. 问题是何时存在整个 Ω 上的亚纯函数 f, 使得 $f - f_i$ 在 U_i 上全纯.

当 Ω 是 Stein 区域 (拟凸域) 时, 第一 Cousin 问题可解.

定理 3.15 若 Ω 是 Stein 区域, 第一 Cousin 问题有解.

证明: 若可在每个 U_i 上找到全纯函数 u_i, 使得在 $U_i \cap U_j$ 上, $f_j - f_i = u_j - u_i$, 令 $f|_{U_i} = f_i - u_i$, 则在 $U_i \cap U_j$ 上有

$$f = f_j - u_j = f_i - u_i,$$

知问题可解.

由假定, $f_{ij} := f_j - f_i$ 在 $U_i \cap U_j$ 上全纯. 由定义,

$$f_{ij} = -f_{ji}, \quad (f_{ij} + f_{jk} + f_{ki})|_{U_i\cap U_j\cap U_k} = 0. \tag{3.47}$$

为了寻找前面提到的 u_i, 先选取 U_i 上的 C^∞ 函数 g_i, 使得在 $U_i \cap U_j$ 上有 $f_{ij} = g_j - g_i$; 首先选取一个从属于 $\{U_i\}_{i\epsilon I}$ 的单位分解 $\{\rho_i\}$, 即 C^∞ 函数 $\rho_i \geqslant 0$, Supp $\rho_i \subset U_i$, $\sum\limits_i \rho_i = 1$. 令

$$g_j = \sum_{i \in I} \rho_i f_{ij},$$

则

$$\begin{aligned} g_j - g_i &= \sum_{k \in I} \rho_k f_{kj} - \sum_{k \in I} \rho_k f_{ki} \\ &= \sum_{k \in I} \rho_k (f_{kj} - f_{ki}) \\ &= \sum_{k \in I} \rho_k f_{ij} \\ &= f_{ij}. \end{aligned}$$

因此, 在 $U_i \cap U_j$ 上

$$0 = \overline{\partial} f_{ij} = \overline{\partial} g_j - \overline{\partial} g_i.$$

令

$$w = \overline{\partial} g_j = \overline{\partial} g_i,$$

则 w 是整个 Ω 上的 $\overline{\partial}$ 闭光滑 (0,1)-形式. 由于 Ω 是 Stein 区域, 存在 $u \in C^\infty(\Omega)$, 使得 $\overline{\partial} u = w$. 令 $u_i = g_i - u$, 由于 $\overline{\partial} u_i = \overline{\partial} g_i - \overline{\partial} u = w - w = 0$, u_i 在 U_i 上全纯, 且

$$u_j - u_i = g_j - g_i = f_{ij} = f_j - f_i.$$

定理得证. □

3.3.2 第二 Cousin 问题

第二 Cousin 问题是单复变中 Weierstrass 定理的推广.

对于单个复变量, 任给区域 $\Omega \subset \mathbf{C}$ 中无聚点子集 $B \subset \Omega$, 问是否存在以 B 为零点的全纯函数? 我们知道, 这个问题可由 Weierstrass 无穷乘积解决.

多个复变量情形, 由于全纯函数的零点集是复超曲面, 不再孤立. 这里复超曲面是指闭集 $V \subset \Omega$, 满足对任意 $x \in V$, 存在其邻域 U 及 U 上全纯函数 f, 使得 $U \cap V = \{z \in U | f(z) = 0\}$, 即 V 局部是全纯函数的零点集. 是否存在整个 Ω 上的全纯函数 f, 使得 $V = \{z \in \Omega | f(z) = 0\}$? 这就是第二 Cousin 问题.

详言之, 第二 Cousin 问题是指: 给定区域 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 的开覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$, 这里 I 是指标集. 假定在每个 U_i 上存在解析函数 f_i, 满足 $\dfrac{f_i}{f_j}$ 在 $U_i \cap U_j$ 上无零点, 是

否存在 Ω 上的全纯函数 f, 满足 $\dfrac{f_i}{f}$ 在 U_i 上无零点? 称 $\{f_i, U_i\}_{i\in I}$ 为 Ω 上第二 Cousin 问题的分布.

一般来说, 因为第二 Cousin 问题的解依赖于 Ω 的拓扑, 即使对于 Stein 区域也不一定有解, 但有下面的结论:

若 Ω 是 Stein 区域, 且存在 $g \in C^\infty(\Omega)$ (或连续), 使得 $\dfrac{f_i}{g}$ 在 U_i 上 C^∞ (或连续) 且没有零点, 则第二 Cousin 问题可解.

换句话说, 第二 Cousin 问题在连续函数范畴可解, 则必在全纯函数范畴可解, 称这种 "拓扑可解必定全纯可解的现象" 为 **Oka 原理**.

定理 3.16 Ω 是 Stein 区域, 且存在 $g \in C^\infty(\Omega)$, 使得 $\dfrac{f_i}{g}$ 在 U_i 上无零点, 则第二 Cousin 问题可解.

证明: 对 Ω 的开覆盖选取适当的加细, 不妨假定此开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$ 中的每个 U_i 是欧氏凸的. 令

$$f_{ij} = \frac{f_j}{f_i} = \frac{\dfrac{f_j}{g}}{\dfrac{f_i}{g}},$$

注意到由假定 $\dfrac{f_j}{g}$, $\dfrac{f_i}{g}$ 在 $U_i \cap U_j$ 上无零点, 故在 $U_i \cap U_j$ 上,

$$\log f_{ij} = \log \frac{f_j}{g} - \log \frac{f_i}{g} \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi\sqrt{-1}\mathbf{Z}),$$

于是在 $U_i \cap U_j$ 上,

$$0 = \bar\partial \log f_{ij} = \bar\partial \log \frac{f_j}{g} - \bar\partial \log \frac{f_i}{g}, \tag{3.48}$$

在 U_i 上定义 $w = \bar\partial \log \dfrac{f_i}{g}$, 由 (3.48), w 是整个 Ω 上的 $(0,1)$-形式. 显然, $\bar\partial w = 0$. 类似 Levi 问题的证明, 存在 $\varphi = \sigma \circ \chi$, $\chi = -\log\ d + |z|^2$, $\sigma:\ \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ 是凸增函数满足

$$\int_\Omega |w|^2 e^{-\varphi} < +\infty.$$

由于 Ω 是 Stein 区域, $\bar\partial$ 问题可解, 故存在 $u \in C^\infty_{(0,0)}(\Omega)$, 使得

$$\bar\partial u = w, \tag{3.49}$$

令 $v_i = \log \dfrac{f_i}{g} - u$, 则

$$\bar\partial v_i = w - \bar\partial u = 0.$$

于是 v_i 在 U_i 上全纯. 由于

$$\log f_{ij} = \log \frac{f_j}{g} - \log \frac{f_i}{g} = v_j - v_i \quad (\text{mod } 2\pi\sqrt{-1}\mathbf{Z}),$$

故

$$f_{ij} = \frac{e^{v_j}}{e^{v_i}} = \frac{f_j}{f_i},$$

因此在 $U_i \cap U_j$ 上,

$$\frac{f_i}{e^{v_i}} = \frac{f_j}{e^{v_j}}, \tag{3.50}$$

于是, 若在 U_i 上令 $f = \dfrac{f_i}{e^{v_i}}$, 则 (3.50) 表明 f 可定义于整个 Ω 上, 且在每个 U_i 上, f 与 f_i 相差一个非零全纯因子. 故定理得证. □

3.3.3 除法问题

令 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的 Stein 区域, 设 $0 \in \Omega$, f 是 Ω 上的全纯函数且满足 $f(0) = 0$, 除法问题是指是否存在 Ω 上的全纯函数 $f_1, \cdots, f_n$, 使得 $f = \sum_{i=1}^{n} z_i f_i$.

由于 $f(0) = 0$, 由通常的 Taylor 展开定理, 局部上 f 有上述分解. 为找到整体分解, 先对 f 在光滑函数范畴进行分解, 即

$$f = \sum_{i=1}^{n} z_i g_i, \quad g_i \in C^\infty(\Omega),$$

通过解 $\overline{\partial}$ 方程得到全纯范畴的解. 简单起见, 我们证明 $n = 2$ 的情形.

前面已经说明 $(z_1, z_2) = (0, 0)$ 附近有分解 $f = z_1 g_1 + z_2 g_2$, 对 $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$, 例如 $z_1 \neq 0$, 令

$$g_1 = \frac{f - z_2 g_2}{z_1},$$

则也有分解 $f = z_1 g_1 + z_2 g_2$.

因此可取 Ω 的开覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$, 使得在 C^∞ 范畴中, 除法问题在每个 U_i 上可解:

$$f = z_1 \eta_i + z_2 \xi_i; \quad \xi_i,\ \eta_i \in C^\infty(U_i).$$

取 $\{\rho_i\}_{i \in I}$ 为从属于 $\{U_i\}_{i \in I}$ 的单位分解, 即 Supp $\rho_i \subset U_i$, $\rho_i \in C^\infty(\Omega)$ 且 $\sum_{i \in I} \rho_i = 1$, 令

$$g_1 = \sum_{i \in I} \rho_i \eta_i, \quad g_2 = \sum_{i \in I} \rho_i \xi_i,$$

显然, g_1, $g_2 \in C^\infty(\Omega)$, 且

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i\in I} \rho_i f = \sum_{i\in I} \rho_i (z_1\eta_i + z_2\xi_i) \\ &= z_1 \sum_{i\in I} \rho_i \eta_i + z_2 \sum_{i\in I} \rho_i \xi_i \\ &= z_1 g_1 + z_2 g_2, \end{aligned}$$

于是除法问题在 C^∞ 范畴可解. 由于 f 是 Ω 上的全纯函数, 故

$$0 = \overline{\partial} f = z_1 \overline{\partial} g_1 + z_2 \overline{\partial} g_2.$$

若有表示

$$\overline{\partial} g_2 = z_1 w, \ \overline{\partial} g_1 = -z_2 w \tag{3.51}$$

(我们将在后面证明 (3.51)), 则

$$0 = \overline{\partial}^2 g_2 = z_1 \overline{\partial} w, \quad 0 = \overline{\partial}^2 g_1 = -z_2 \overline{\partial} w.$$

因此 $\overline{\partial} w = 0$, 由于 Ω 是拟凸域, 存在 $u \in C^\infty(\Omega)$, 使得 $w = \overline{\partial} u$, 代入 (3.51) 得

$$\overline{\partial} g_2 = z_1 \overline{\partial} u = \overline{\partial}(z_1 u), \ \overline{\partial} g_1 = -z_2 \overline{\partial} u = \overline{\partial}(-z_2 u),$$

于是 $g_2 - z_1 u$, $g_1 + z_2 u$ 均为 Ω 上的全纯函数. 因此

$$f = z_1 g_1 + z_2 g_2 = z_1(g_1 + z_2 u) + z_2(g_2 - z_1 u)$$

就是除法问题的解.

下面讨论如何利用 $z_1 \overline{\partial} g_1 + z_2 \overline{\partial} g_2 = 0$ 推导出 $\overline{\partial} g_2 = z_1 w$, $\overline{\partial} g_1 = -z_2 w$.

为此, 一般的途径是利用光滑函数环的理想理论 (光滑函数芽环在全纯函数芽环上是平坦的). 这就超过了本书讨论的范畴, 为此, 我们选取一种简单的方法 —— Kouzul 复形, 当然, 此方法只适用于较窄的一类函数. 先回忆同调代数中的基本概念, 即 Kouzul 复形方法中的层与上同调论.

定义 3.17 (Kouzul 复形) 令 $R = \mathbb{C}\{z_1, \cdots, z_n\}$ 是收敛幂级数环,

$$\binom{n}{p} R := \left\{ \sum_{v_1 < \cdots < v_p} f_{v_1 \cdots v_p} dz_{v_1} \wedge \cdots \wedge dz_{v_p} \middle| f_{v_1 \cdots v_p} \in R \right\}; \quad p \leqslant n \tag{3.52}$$

是 R 模, 事实上, $\binom{n}{p} R$ 中每个元素均是由 $\binom{n}{p}$ 个分量构成的向量, 这里 kR, $k \in \mathbf{Z}^+$ 表示直和 $\underbrace{R \oplus \cdots \oplus R}_{k\text{ 次}}$.

考虑下面的 R 模序列及它们之间的算子 d_p,

$$0 \longrightarrow \binom{n}{n}R \xrightarrow{d_n} \binom{n}{n-1}R \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow \binom{n}{2}R$$
$$\xrightarrow{d_2} \binom{n}{1}R \xrightarrow{d_1} \sum z_i R \to 0, \tag{3.53}$$

这里每个 d_p 均为 R 线性算子, 其在生成元 $dz_{v_1} \wedge \cdots \wedge dz_{v_p}$ 上定义如下:

$$d_p(dz_{v_1} \wedge \cdots \wedge dz_{v_p}) := \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1} z_{v_i} dz_{v_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_{v_i}} \wedge \cdots \wedge dz_{v_p}, \tag{3.54}$$

需要注意的是, (3.52) 的右边不是指微分形式, $dz_{v_1} \wedge \cdots \wedge dz_{v_p}$ 只是生成元的一种记号.

命题 3.18　Kouzul 复形 (3.53) 是正合列, 即 $\mathrm{Im}\ d_p = \mathrm{Ker}\ d_{p-1}$; $1 \leqslant p \leqslant n$.

证明: 首先证明 $\mathrm{Im}\ d_p \subset \mathrm{Ker}\ d_{p-1}$, 即 $d_{p-1} \circ d_p \equiv 0$: 由于每个 d_p 均为 R 线性, 故只需对生成元验证 $d_{p-1} \circ d_p \equiv 0$. 任取

$$dz_{v_1} \wedge \cdots \wedge dz_{v_p} \in \binom{n}{p}R,$$

由定义,

$$\begin{aligned}
& d_{p-1} \circ d_p(dz_{v_1} \wedge \cdots \wedge dz_{v_p}) \\
= {} & d_{p-1} \sum_{i=1}^{p}(-1)^{i} z_{v_i} dz_{v_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_{v_i}} \wedge \cdots \wedge dz_{v_p} \\
= {} & \sum_{\substack{i,j=1 \\ j<i}}^{p} (-1)^{i+j} z_{v_j} z_{v_i} dz_{v_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_{v_j}} \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_{v_i}} \wedge \cdots \wedge dz_{v_p} \\
& + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^{p} (-1)^{i+j-1} z_{v_j} z_{v_i} dz_{v_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_{v_i}} \wedge \cdots \wedge \widehat{dz_{v_j}} \wedge \cdots \wedge dz_{v_p} \\
= {} & 0.
\end{aligned}$$

再来证明 $\mathrm{Ker}\ d_{p-1} \subset \mathrm{Im}\ d_p$, 即对任意 $f \in \binom{n}{p}R$, $d_p f = 0$, 必存在 $g \in \binom{n}{p+1}R$, 使得 $d_{p+1} g = f$. 我们对 n 归纳证明, $n = 1$ 时命题 3.18 显然成立. 假定结论对 $n-1$ 成立, 做分解

$$f = a \wedge dz_n + b,$$

这里 $a \in \binom{n}{p-1}R$; $b \in \binom{n}{p}R$, 且它们都不含 dz_n, 记

$$a = \sum a_{v_1 \cdots v_{p-1}} dz_{v_1} \wedge \cdots \wedge dz_{v_{p-1}}, \tag{3.55}$$

则

$$0 = d_p f = d_{p-1} a \wedge dz_n + (-1)^{p-1} z_n a + d'_p b,$$

这里 d'_p 表示 $n-1$ 时的 d_p.

由于 $z_n a$, $d'_p b$ 不包含 dz_n, 故

$$d'_{p-1} a \equiv 0, \ (-1)^{p-1} z_n a + d'_p b \equiv 0.$$

由归纳假设, 因为 $d'_{p-1} a \equiv 0$, 所以存在 $\alpha \in \binom{n-1}{p}R$, 使得 $d'_p \alpha = a$, 因此

$$0 = (-1)^{p-1} z_n a + d'_p b = (-1)^{p-1} z_n d'_p \alpha + d'_p b,$$

故

$$d'_p \left(b + (-1)^{p-1} z_n \alpha\right) \equiv 0.$$

再利用归纳假设 (视 z_n 为参数), 存在 β, 使得

$$b + (-1)^{p-1} z_n \alpha = d'_{p+1} \beta,$$

因此

$$\begin{aligned} f &= a \wedge z_n + b = d'_p \alpha \wedge dz_n + (-1)^p z_n \alpha + d'_{p+1} \beta \\ &= d_{p+1}(\alpha \wedge z_n + \beta). \end{aligned}$$

知命题得证. □

回到 $n = 2$ 的情形, 此时 (3.53) 形如

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{d_2} \binom{2}{1} R = R + R \xrightarrow{d_1} z_1 R + z_2 R \longrightarrow 0, \tag{3.56}$$

这里

$$\begin{aligned} d_2 &: \ g \longrightarrow (-z_2 g, \ z_1 g), \\ d_1 &: \ (g_1, \ g_2) \longrightarrow z_1 g_1 + z_2 g_2. \end{aligned}$$

由 (3.56) 正合, 若 $z_1 g_1 + z_2 g_2 = 0$, 必存在 g, 使得 $g_1 = -z_2 g$, $g_2 = z_1 g$, 这恰是我们需要的结果. 这就解决了除法问题.

第四章　层与上同调

现在我们开始讨论层与上同调理论, 对于多复变函数中, 如何将局部的量拼接成整体的这一问题, 它们是强有力的工具.

§4.1　层

事实上, 前面关于第一 Cousin 问题的讨论, 已经隐含了层论的主要思想. 若 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 Ω 的开覆盖, 如果 $U_i\cap U_j\neq\varnothing$, 我们构造了全纯函数 f_{ij}, 满足

$$
\begin{aligned}
&f_{ij}=-f_{ji}, &&\text{当 } U_i\cap U_j\neq\varnothing;\\
&f_{ij}+f_{jk}+f_{ki}=0, &&\text{当 } U_i\cap U_j\cap U_k\neq\varnothing.
\end{aligned}
$$

将上述方法推广, 我们就有了层与上同调群的概念. 令 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 是 Ω 的开覆盖, $(U_{i_0},\cdots,U_{i_p})$ 为 $\mathcal{U}$ 的 $(p+1)$ 有序开集, 当 $|\sigma|:=U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_p}\neq\varnothing$ 时, $f_{i_0\cdots i_p}$ 是 $|\sigma|$ 上的全纯函数, 有时我们用 $f(U_{i_0},\cdots,U_{i_p})$ 表示 $f_{i_0\cdots i_p}$, 不管怎样, 均要求其对下指标 $i_0,\cdots,i_p$ 反对称. 称 $f:=\{f_{i_0\cdots i_p}\}_{i_0\cdots i_p}$ 为对应于开覆盖 $\mathcal{U}$ 的 p 维上链, 记 $C^p(\mathcal{U},\mathcal{O})$ 为所有 p 维上链形成的集合. $C^p(\mathcal{U},\mathcal{O})$ 上有自然的加法运算, 对 $f=(f_{i_0\cdots i_p})_{i_0\cdots i_p}$, $g=(g_{i_0\cdots i_p})_{i_0\cdots i_p}\in C^p(\mathcal{U},\mathcal{O})$,

$$f+g:=(f_{i_0\cdots i_p}+g_{i_0\cdots i_p})_{i_0\cdots i_p}.$$

$C^p(\mathcal{U},\mathcal{O})$ 关于上述加法运算形成交换群, 称其为对应开覆盖 $\mathcal{U}$ 的 p 维上链群.

定义 4.1 算子

$$\delta_p : C^p(\mathcal{U},\mathcal{O}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{O}),$$
$$\{f_{i_0\cdots i_p}\} \to \{(\delta f)_{i_0\cdots i_{p+1}}\}$$

定义为, 当 $|\sigma| = U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{p+1}} \neq \varnothing$ 时,

$$(\delta f)_{i_0\cdots i_{p+1}} \equiv \sum_{v=0}^{p+1}(-1)^v r_{|\sigma|} f_{i_0\cdots\widehat{i_v}\cdots i_{p+1}}, \tag{4.1}$$

这里 $\widehat{i_v}$ 表明从 $i_0,\cdots,i_{p+1}$ 中删除 i_v, $r_{|\sigma|}f_{i_0\cdots\widehat{i_v}\cdots i_{p+1}} = f_{i_0\cdots\widehat{i_v}\cdots i_{p+1}}|_{|\sigma|}$, 也就是说, $r_{|\sigma|}$ 是限制映射, 于是 (4.1) 右边每一项 $r_{|\sigma|}f_{i_0\cdots\widehat{i_v}\cdots i_{p+1}}$ 均为 $|\sigma|$ 上的全纯函数.

下文中, 在不会引起混淆的情况下, 我们将略去记号 $r_{|\sigma|}$.

现在, 对任意的 $f,g\in C^p(\mathcal{U},\mathcal{O})$, $|\sigma| = U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{p+1}\neq\varnothing$,

$$\begin{aligned}(\delta_p(f+g))_{i_0\cdots i_{p+1}} &= \sum_{v=0}^{p+1}(-1)^v(f+g)_{i_0\cdots\widehat{i_v}\cdots i_{p+1}}\\ &= \sum_{v=0}^{p+1}(-1)^v\left(f_{i_0\cdots\widehat{i_v}\cdots i_{p+1}} + g_{i_0\cdots\widehat{i_v}\cdots i_{p+1}}\right)\\ &= \sum_{v=0}^{p+1}(-1)^v f_{i_0\cdots\widehat{i_v}\cdots i_{p+1}} + \sum_{v=0}^{p+1}(-1)^v g_{i_0\cdots\widehat{i_v}\cdots i_{p+1}}\\ &= (\delta_p f)_{i_0\cdots i_{p+1}} + (\delta_p g)_{i_0\cdots i_{p+1}}.\end{aligned} \tag{4.2}$$

从而定义 4.1 中的算子 $\delta_p : C^p(\mathcal{U},\mathcal{O}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{O})$ 是群同态.

引理 4.2 $\delta_{p+1}\circ\delta_p \equiv 0$, $\forall p\in\mathbf{N}$.

证明: 只需证, $\forall f\in C^p(\mathcal{U},\mathcal{O})$ 及 $\forall|\sigma| = U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{p+2}}\neq\varnothing$,

$$((\delta_{p+1}\circ\delta_p)f)_{i_0\cdots i_{p+2}} = 0.$$

事实上,

$$\begin{aligned}&((\delta_{p+1}\circ\delta_p)f)_{i_0\cdots i_{p+2}}\\ =&\sum_{v=0}^{p+2}(-1)^v(\delta_p f)_{i_0\cdots\widehat{i_v}\cdots i_{p+2}}\\ =&\sum_{\substack{u,v=0\\u<v}}^{p+2}(-1)^{u+v}f_{i_0\cdots\widehat{i_u}\cdots\widehat{i_v}\cdots i_{p+2}} + \sum_{\substack{u,v=0\\v<u}}^{p+2}(-1)^{u+v+1}f_{i_0\cdots\widehat{i_v}\cdots\widehat{i_u}\cdots i_{p+2}}\\ =&\,0.\end{aligned} \tag{4.3}$$

□

对任意的 $p>0$, 称 $\delta_p: C^p(\mathcal{U},\mathcal{O}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{O})$ 的核 $Z^p(\mathcal{U},\mathcal{O})$ 为 p **上闭链群**; δ_{p-1} 的像 $B^p(\mathcal{U},\mathcal{O})$ 为 p **上边缘群**; 定义 $B^0(\mathcal{U},\mathcal{O})\equiv 0$, 则将商群

$$H^p(\mathcal{U},\mathcal{O}) := Z^p(\mathcal{U},\mathcal{O})/B^p(\mathcal{U},\mathcal{O}) \tag{4.4}$$

定义为关于开覆盖 $\mathcal{U}$ 的系数为全纯函数的第 p 个上同调群.

不难看出, 当 $p=1$ 时,

$$\begin{aligned}
&C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}) \equiv \{f_{ij}|f_{ij}=-f_{ji},\ f_{ij} \text{ 在 } U_i\cap U_j \text{ 上全纯}\},\\
&\delta\{f_{ij}\}=\{g_{ijk}\},\\
&g_{ijk} \equiv r_{|\sigma|}f_{jk}-r_{|\sigma|}f_{ik}+r_{|\sigma|}f_{ij}\\
&\qquad \equiv r_{|\sigma|}f_{jk}+r_{|\sigma|}f_{ki}+r_{|\sigma|}f_{ij},
\end{aligned}$$

这里 $|\sigma|=U_i\cap U_j\cap U_k$, 因此

$$\begin{aligned}
&\text{在 } U_i\cap U_j\cap U_k \text{ 上 } f_{jk}+f_{ki}+f_{ij}\equiv 0\\
\Longleftrightarrow\ & f=\{f_{ij}\}\in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O}).
\end{aligned}$$

更进一步

$$\begin{aligned}
&B^1(\mathcal{U},\mathcal{O})=\{\delta(h)|h=(h_i)\in C^1(\mathcal{U},\mathcal{O})\},\\
&\text{在 } U_i\cap U_j \text{ 上 } (\delta h)_{ij}\equiv h_j-h_i.
\end{aligned}$$

如果对任意 $f=(f_{ij})\in Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O})$, 均有 $h=(h_i)\in C^1(\mathcal{U},\mathcal{O})$, 满足在 $U_i\cap U_j$ 上, $\delta h=h_j-h_i=f_{ij}$; 换句话说, $Z^1(\mathcal{U},\mathcal{O})=B^1(\mathcal{U},\mathcal{O})$, 从而 $H^1(\mathcal{U},\mathcal{O})\equiv 0$, 于是第一 Cousin 问题对 Stein 区域的开覆盖 $\mathcal{U}$ 可解等价于 $H^1(\mathcal{U},\mathcal{O})\equiv 0$.

现在我们给出层的精确定义.

定义 4.3 拓扑空间 X 上的**交换群层**是拓扑空间 $\mathcal{F}$, 及映射 $\pi:\mathcal{F}\longrightarrow X$ 满足:

(1) π 是局部同胚;

(2) 任意 $x\in X$, 集合 $\pi^{-1}(x)\subset\mathcal{F}$ 有交换群结构;

(3) 群上的加法运算关于 $\mathcal{F}$ 的拓扑连续.

类似可定义环层和其他代数结构, 简单起见, 我们先探讨交换群层, 而后引入其他代数结构.

对上述定义进一步解释将有助于我们确立一些记号和概念. 条件 (1) 表明对任意 $\mathbf{s}\in\mathcal{F}$, 都有其邻域 B 满足 π 在 B 上的限制是同胚 $(\pi|B):B\longrightarrow\pi(B)=U$, 这里 $U\subset X$ 是开集. 每个 $z\in U$ 有唯一的原像 $\mathbf{s}_z\in B$; 且逆映射

$(\pi|B)^{-1}: U \longrightarrow B$, 将 $z \in U \subset X$ 同胚映入 $\mathbf{s}_z \in B \subset \mathcal{F}$. 通常称 π 为 $\mathcal{F}$ 的**投影**, 称 $z \in X$ 在投影下的逆为层在 z 点的**茎**, 记为 $\mathcal{F}_z = \pi^{-1}(z)$. 前面定义中的条件 (2) 表明, 对任意 $z \in X$, 茎 $\mathcal{F}_z$ 有交换群结构. 对于条件 (3), 我们需要进一步解释. 对于 Cartesian 积 $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$, 令 $\mathcal{F} \times_\pi \mathcal{F}$ 为 $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ 的子空间, 定义如下:

$$\mathcal{F} \times_\pi \mathcal{F} := \{(\mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} | \pi(\mathbf{s}_1) = \pi(\mathbf{s}_2)\}. \tag{4.5}$$

用 $\mathcal{F}$ 茎上的群运算 $(\mathbf{s}_1,\ \mathbf{s}_2) \longrightarrow \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$ 可构造映射 $m: \mathcal{F} \times_\pi \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$; 由于 $\mathbf{s}_1$ 和 $\mathbf{s}_2$ 在同一根茎上, 上述定义合理. 现在, 层的定义中最后一个条件即为这个映射是连续的.

事实上, 某类函数的芽层就满足刚刚给出的层的一般定义. 例如, 全纯函数芽层.

对 $x \in \mathbf{C}^n$, U, U_1 是其两个邻域, f 和 f_1 分别是 U 及 U_1 上的全纯函数, 如果存在 x 的更小邻域 U' 满足 $U' \subset U \cap U_1$, 且 $f|_{U'} = f_1|_{U'}$, 我们就称 f 与 f_1 定义了 x 点相同的芽. 因此 x 点全纯函数芽可定义为

$$x \text{ 点的全纯函数} / \sim,$$

这里 $f \sim g \iff f, g$ 均为 x 点全纯函数, 也就是说, 是 x 点的某开邻域上的全纯函数, 且存在 x 的邻域 U, 满足 $f|_U = g|_U$. 不难验证, $\sim$ 是等价关系. 通常我们用 $\mathcal{O}_x$ 表示 x 点全纯函数芽全体形成的集合.

若 f 为 x 点全纯函数, 记其在 x 点的芽为 $\mathbf{f}_x$. 现在我们赋予 $\mathcal{O}_x$ 交换群结构, 令 $\mathbf{f}_x$, $\mathbf{g}_x \in \mathcal{O}_x$, $\mathbf{f}_x$, $\mathbf{g}_x$ 分别为 f 与 g 在 x 点的芽, 设 f 与 g 分别是 x 的邻域 U_1, U_2 上的全纯函数, 于是 $f|_{U_1 \cap U_2} + g|_{U_1 \cap U_2}$ 是 x 的开邻域 $U_1 \cap U_2$ 上的全纯函数, 我们将 $\mathbf{f}_x + \mathbf{g}_x$ 定义为 $f|_{U_1 \cap U_2} + g|_{U_1 \cap U_2}$ 在 x 点的芽, 不难验证, 这个定义是合理的, 也就是说, $\mathbf{f}_x + \mathbf{g}_x$ 只依赖 $\mathbf{f}_x$ 和 $\mathbf{g}_x$, 而独立于代表元 f 与 g 的选取. $\mathcal{O}_x$ 在上述运算下为交换群.

$\mathcal{O} := \bigcup\limits_{x \in \mathbf{C}^n} \mathcal{O}_x$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的全纯函数芽层, 投影映射为 $\pi: \mathcal{O} \longrightarrow \mathbf{C}^n$; $\pi(\mathcal{O}_x) = x$, 也就是, $\pi^{-1}(x) = \mathcal{O}_x$.

现在我们赋予 $\mathcal{O}$ 以拓扑, 对任意 $\mathbf{f}_x \in \mathcal{O}_x$, $\mathbf{f}_x$ 是 x 的开邻域 U 上的全纯函数 f 的芽. 对任意 $y \in U$, U 自然是 y 的开邻域, 于是 f 是 y 点的全纯函数, f 在 y 点芽记作 $\mathbf{f}_y$, 定义

$$D_f := \{\mathbf{f}_y | y \in U,\ f \text{ 是 } U \text{ 上的全纯函数}\} \tag{4.6}$$

为 $\mathbf{f}_x$ 的开邻域, 所有上述 D_f 组成 $\mathcal{O}$ 上的拓扑基, 使得 $\mathcal{O}$ 成为拓扑空间, 显然, $\pi: D_f = \{\mathbf{f}_y | y \in U,\ f \text{是 } U \text{ 上的全纯函数}\} \longrightarrow U$ 是同胚. 由于我们已说明, 对任

意 $x \in \mathbf{C}^n$, $\pi^{-1}(x) = \mathcal{O}_x$ 有交换群结构, 为验证 $\pi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的层, 只需验证定义 4.3 中的条件 (3), 即群运算 $m : \mathcal{O} \times_\pi \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$ 在 $\mathcal{O}$ 的拓扑下连续. 只需说明对任意 $\mathbf{f}_x, \mathbf{g}_x \in \mathcal{O}_x$, $\mathbf{f}_x - \mathbf{g}_x \in \mathcal{O}_x$, 且若 N_1 是 $\mathbf{f}_x - \mathbf{g}_x$ 的开邻域, 存在 $\mathbf{f}_x$ 与 $\mathbf{g}_x$ 的开邻域 N_2 和 N_3, 满足 $m(N_2 \times_\pi N_3) \subset N_1$. 不失一般性, 我们假定 $\mathbf{f}_x$ 与 $\mathbf{g}_x$ 的表示函数 f 和 g 均为 x 开邻域 U 上的全纯函数, 于是 $\mathbf{f}_x - \mathbf{g}_x$ 为 x 点的全纯函数 $f-g$ 的等价类, 即全纯函数 $f-g$ 在 x 点的芽, 于是 $B := \{(\mathbf{f}-\mathbf{g})_y | y \in U\}$ 是 $\mathbf{f}_x - \mathbf{g}_x$ 的开邻域, 由于 $\mathbf{f}_x - \mathbf{g}_x \in B$, 从而 $B \cap N_1 \neq \varnothing$, 仍然是 $\mathbf{f}_x - \mathbf{g}_x$ 的开邻域. 由于 $\pi : B \longrightarrow \pi(B)$ 是同胚, 故 $\pi : B \cap N_1 \longrightarrow \pi(B \cap N_1)$ 也是同胚, 于是 $\pi(B \cap N_1)$ 是 x 点的开邻域, 且 f, g 为 $\pi(B \cap N_1)$ 上的全纯函数. 令

$$N_2 := \{\mathbf{f}_y | y \in \pi(B \cap N_1)\},$$
$$N_3 := \{\mathbf{g}_y | y \in \pi(B \cap N_1)\}.$$

显然, 对任意 $y \in \pi(B \cap N_1)$, $\mathbf{f}_y - \mathbf{g}_y = (\mathbf{f}-\mathbf{g})_y \in B \cap N_1$, 从而群运算在 $\mathcal{O}$ 的拓扑下连续.

注意到在 $\mathcal{O}_x$ 上除了加法外, 还可定义

$$c\mathbf{f} = \mathbf{cf}, \quad \forall c \in \mathbf{C}$$

及

$$\mathbf{fg} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{g},$$

从而 $\mathcal{O}_x$ 是环.

定义 4.4 拓扑空间 X 上的**环层**是拓扑空间 $\mathcal{F}$, 及投影 $\pi : \mathcal{F} \longrightarrow X$ 满足:

(1) π 是局部同胚;

(2) 对任意 $x \in X$, 集合 $\mathcal{F}_x = \pi^{-1}(x)$ 有环结构;

(3) 环运算在 $\mathcal{F}$ 的拓扑下连续.

我们将对定义中的条件 (3) 做进一步解释. 现在 $\mathcal{F}_x$ 是环, 从而 $\mathcal{F}_x$ 上有两种运算: 加法和乘法. 条件 (3) 就是说

$$\begin{aligned} m : \mathcal{F} \times_\pi \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F}, \\ (\mathbf{s}, \mathbf{t}) &\rightarrow \mathbf{s} - \mathbf{t} \end{aligned} \tag{4.7}$$

及

$$\begin{aligned} m^* : \mathcal{F} \times_\pi \mathcal{F} &\longrightarrow \mathcal{F}, \\ (\mathbf{s}, \mathbf{t}) &\rightarrow \mathbf{s} \cdot \mathbf{t} \end{aligned} \tag{4.8}$$

均为连续映射.

不难验证 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的环层, 由于对 $m^*: \mathcal{F}\times_\pi\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}$ 连续的证明类似 $m: \mathcal{F}\times_\pi\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{F}$ 连续的证明, 我们把证明留给读者.

现在我们考察另一个层的例子, D 上的 C^∞ 函数芽层, 这里 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的区域. 对任意 $x\in D$, f 是 x 的某个开邻域上的 C^∞ 函数, $\mathbf{f}_x$ 是 f 在 x 点的芽, $\mathcal{E}_x$ 是所有在 x 点 C^∞ 的函数的芽的集合. 类似 $\mathcal{O}_x$, $\mathcal{E}_x$ 有自然的环结构. 令 $\mathcal{E}=\bigcup\limits_{x\in D}\mathcal{E}_x$, 则所有形如

$$\{\mathbf{f}_y|y\in U,\ f\ \text{是}\ U\ \text{上的}\ C^\infty\ \text{函数}\}\tag{4.9}$$

的集合作为基生成 $\mathcal{E}$ 上拓扑, 于是在映射 $\pi:\mathcal{E}\longrightarrow D$; $\pi(\mathcal{E}_x)=x$ 下, $\mathcal{E}$ 成为 D 上 C^∞ 函数芽的环层.

层 $\mathcal{E}$ 与 $\mathcal{O}$ 有本质的区别, 由全纯函数唯一性定理, 层 $\mathcal{O}$ 是 Hausdorff 空间, 而 $\mathcal{E}$ 不是 Hausdorff 空间. 我们用一个简单的例子来说明这个事实. 考虑 $\mathbf{R}$ 上 C^∞ 函数芽层 $\mathcal{E}$, 令 g 为 $\mathbf{R}$ 上的实值常函数, 选 x_0 开邻域上 C^∞ 函数 f, 满足当 $x\leqslant x_0$, $f(x)=g(x)$; 且当 $x>x_0$, $f(x)$ 不同于 $g(x)$, 见图 4.1. 于是 $\mathbf{f}_{x_0}$ 和 $\mathbf{g}_{x_0}$ 是 $\mathcal{E}_{x_0}$ 中不同元素, 但 $\mathbf{f}_{x_0}$ 与 $\mathbf{g}_{x_0}$ 不能被 $\mathcal{E}$ 中开集分开. 若 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 或 $\mathbf{C}^n$ 上 C^∞ 函数芽层, 仍然有 $\mathcal{E}$ 不是 Hausdorff 空间, 仿照一维情形, 很容易构造 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 上的反例.

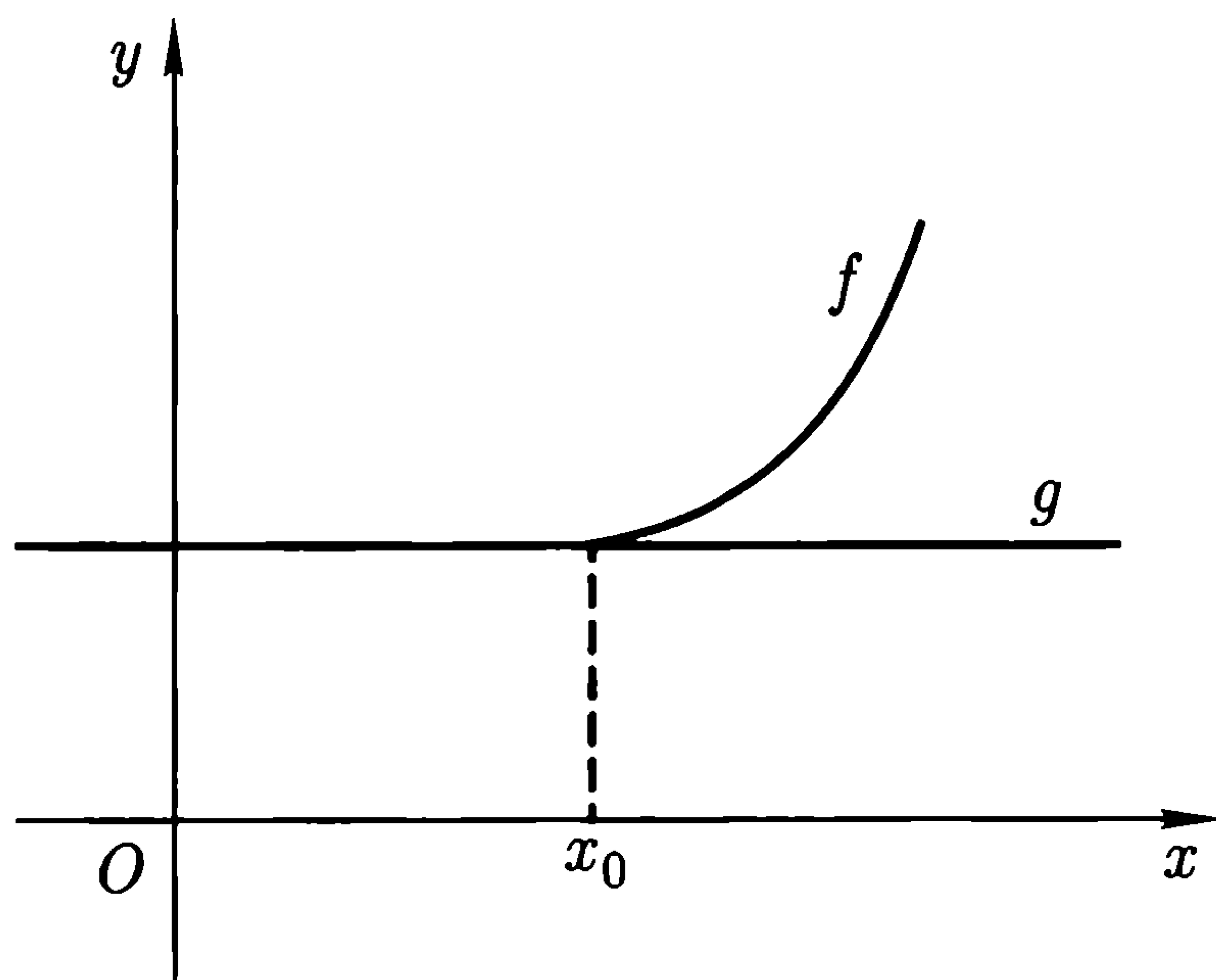


图 4.1

定义 4.5 令 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的层, U 是 X 中的开集 $s:U\to\mathcal{F}$ 是连续映射, 如果 $\pi\circ s:U\longrightarrow U$ 是恒等映射, 称连续映射 s 为 $\mathcal{F}$ **在** U **上的截影**.

记 $\Gamma(U,\mathcal{F})$ 为层 $\mathcal{F}$ 在 U 上所有截影形成的集合.

设有 $U_1,U_2\in\mathcal{U}_x, s_1\in\Gamma(U_1,\mathcal{F})$ 与 $s_2\in\Gamma(U_2,\mathcal{F})$. 如果 $s_1(x)=s_2(x)$, 则存在 x 的某个邻域 $U\subset U_1\cap U_2, s_1=s_2$ 在 U 上成立. 因为在 $s_1(x)=s_2(x)$

存在一个 $\mathcal{F}$ 上的开集 B, $\pi|_B : B \to \pi(B)$ 是同胚, 令 $U = \pi(B) \cap U_1 \cap U_2$, 则 $(\pi|_B)^{-1}|_U = s_1(U) = s_2(U)$.

命题 4.6 *若 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 上的层, U 是 X 上的开集, $s \in \Gamma(U,\mathcal{F})$, 则 $\mathrm{Im}\ s = \{s(y) \in F_y | y \in U\}$ 是 $\mathcal{F}$ 的开集.*

证明: 对任意 $y \in U$, $s(y) \in \mathrm{Im}\ s$, 存在含 $s(y)$ 的开集 A 满足, $\pi : A \longrightarrow \pi(A)$ 是同胚. 不失一般性, 假定 $\pi(A) \subset U$. 由 s 的连续性, 存在 y 的开邻域 W_y 满足, $W_y \subset U$ 且 $s(W_y) \subset A$. 由于 $\pi|_A : A \longrightarrow \pi(A)$ 是同胚, $s(W_y) = \pi^{-1}(W_y) \cap A$ 是 $\mathcal{F}$ 的开子集, 于是对任意 $y \in U$, 存在其开邻域 $s(W_y)$ 为 $\mathrm{Im}\ s$ 的子集, 从而 $\mathrm{Im}\ s$ 为 $\mathcal{F}$ 的开集. □

令 U 为 $\mathbf{C}^n$ 的开集, 则 $\Gamma(U,\mathcal{O})$ 是 U 上全纯函数集合. 对任意 $s \in \Gamma(U,\mathcal{O})$, 任意 $x \in U$, $s(x) \in \mathcal{O}_x$, 不失一般性, 取 D_f 是 $s(x)$ 的开邻域, 则有同胚 $\pi : D_f = \{\mathbf{f}_y | y \in V\} \longrightarrow V$, 这里 f 在 V 上全纯, V 是 x 的开邻域. 由 s 的连续性, 存在 x 的开邻域 W, 满足 $s(W) \subset D_f$, 从而 $s(y) = \mathbf{f}_y$, 对任意 $y \in W$, 于是 $s(y) = \mathbf{f}_y$, 从而 s 可视为 U 上全纯函数. 类似, 如果 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上 C^∞ 函数芽层, 这里 U 是 $\mathbf{C}^n$ 中开集, 则对任意 $s \in \Gamma(U,\mathcal{E})$, s 可视为 U 上 C^∞ 函数.

在前一章开始时, 我们证明了 $H^1(\mathcal{U},\mathcal{O}) = 0$, 这里 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 是 Ω 的开覆盖, Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 的 Stein 开集. 现在, 我们将给出系数在一般层上时上同调群的定义.

令 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的交换群层, U 是 X 的开集, 对任意的 s_1, $s_2 \in \Gamma(U,\mathcal{F})$, 定义截影 $s_1 + s_2 \in \Gamma(U,\mathcal{F})$ 为

$$(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x), \quad \forall x \in U. \tag{4.10}$$

由于群运算在 $\mathcal{F}$ 的拓扑下连续, 有 $s_1 + s_2$ 连续, 且显然 $\pi(s_1 + s_2) = id_U$, 从而 $s_1 + s_2$ 是 U 上截影. 在这个加法运算下, $\Gamma(U,\mathcal{F})$ 是交换群.

令 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 是拓扑空间 X 的开覆盖, 对任意非负整数 p,

$$f : \{|\sigma| = U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p} \neq \varnothing\} \longrightarrow \{\Gamma(|\sigma|,\mathcal{F})\},$$
$$U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_p} \to f_{i_0\cdots i_p},$$

这里 $f_{i_0\cdots i_p}$ 对下指标 $i_0, \cdots, i_p$ 反对称, 称 $f = \{f_{i_0\cdots i_p}\}$ 为 $(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 中的 p 维上链. 用 $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 表示 $\mathcal{U}$ 的系数在层 $\mathcal{F}$ 中的 p 维上链全体. 对任意 $\{f_{i_0\cdots i_p}\}, \{g_{i_0\cdots i_p}\} \in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, 定义加法运算

$$\{f_{i_0\cdots i_p}\} + \{g_{i_0\cdots i_p}\} = \{f_{i_0\cdots i_p} + g_{i_0\cdots i_p}\},$$

于是 $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 成为交换群, 称为 $\mathcal{U}$ 的系数在层 $\mathcal{F}$ 中的 p 维**上链群**.

现在定义算子

$$\delta_p : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}),$$
$$f \to \delta_p f,$$

这里

$$(\delta_p f)_{i_0\cdots i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} f_{i_0\cdots\widehat{i_k}\cdots i_{p+1}}. \tag{4.11}$$

在 (4.11) 右边, $f_{i_0\cdots\widehat{i_k}\cdots i_{p+1}}$ 表示先在 $U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{p+1}}$ 上的限制, 而后在 $\Gamma(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{p+1}},\mathcal{F})$ 上做加法运算. 不难验证 δ_p 是群同态, 且 $\delta_{p+1}\circ\delta_p = 0$; $p\geqslant 1$, 因为引理 4.2 的证明对交换群层依旧成立. 称 $Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \operatorname{Ker}\delta_p \subset C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$; $p\geqslant 0$ 为 $\mathcal{U}$ 的系数在层 $\mathcal{F}$ 中的 p 维**上闭链群**, $B^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \operatorname{Im}\delta_{p-1}$; $p\geqslant 1$ 为 $\mathcal{U}$ 的系数在层 $\mathcal{F}$ 中的 p 维**上边缘群**, 定义 $B^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\equiv 0$. 由于 $\delta_{p+1}\circ\delta_p\equiv 0$, $B^p(\mathcal{U},\mathcal{F})\subset Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$.

定义 4.7

$$H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \begin{cases} Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F})/B^p(\mathcal{U},\mathcal{F}), & p\geqslant 1,\\ Z^0(\mathcal{U},\mathcal{F}), & p=0,\end{cases} \tag{4.12}$$

*$H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 为 $\mathcal{U}$ 的系数在层 $\mathcal{F}$ 中的 p 维***上同调群**.

对全纯函数芽层 $\mathcal{O}$, $C^p(\mathcal{U},\mathcal{O})$, $Z^p(\mathcal{U},\mathcal{O})$, $B^p(\mathcal{U},\mathcal{O})$ 以及 $H^p(\mathcal{U},\mathcal{O})$ 分别为 $\mathcal{U}$ 的系数在层 $\mathcal{O}$ 中的 p 维上链群、上闭链群、上边缘群及上同调群.

上面定义的 $H^p(\mathcal{U},\mathcal{O})$ 依赖于 X 的开覆盖 $\mathcal{U}$ 的选取. 我们想要定义只依赖于 X 而不依赖其开覆盖的上同调群. 一般来说, 有两种方法来解决上述问题, 一种是 Čech 的方法, 另一种是 Grothendieck 的方法.

Čech 的方法是在所有开覆盖中引入一种偏序. 令 $\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{U}$ 为 X 的两个开覆盖, 称 $\mathcal{W}$ 为 $\mathcal{U}$ 的加细覆盖, 若存在映射

$$\rho : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{U},$$
$$W \to \rho(W)$$

满足 $\rho(W)\supset W$, 我们用 $\mathcal{W}\prec\mathcal{U}$ 表示 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{U}$ 的加细覆盖, 称 ρ 为 $\mathcal{W}$ 到 $\mathcal{U}$ 的加细映射. ρ 诱导了一个映射 (仍记为 ρ):

$$\rho : C^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow C^p(\mathcal{W},\mathcal{F}), \quad p=0,1,2,\cdots, \tag{4.13}$$

对任意 $f\in C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, $|\sigma| = W_{i_0}\cap\cdots\cap W_{i_p}\neq\varnothing$,

$$(\rho f)_{i_0\cdots i_p} = \rho f(W_{i_0},\cdots,W_{i_p}) = r_{|\sigma|} f\left(\rho(W_{i_0}),\cdots,\rho(W_{i_p})\right).$$

不难验证 (4.13) 是群同态, 且 ρ 与所有的 $\{\delta_p\}$ 交换, 即 $\rho\delta_p = \delta_p\rho$; $p = 0,1,2,\cdots$, 从而 ρ 限制在 $Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, $B^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 上, 分别为 $Z^p(\mathcal{U},\mathcal{F}), B^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 到 $Z^p(\mathcal{W},\mathcal{F})$, $B^p(\mathcal{W},\mathcal{F})$ 的群同态, 更进一步 ρ 诱导了群同态

$$\rho_* : H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^p(\mathcal{W},\mathcal{F}). \tag{4.14}$$

我们必须说明, 如果 $\mathcal{W} \prec \mathcal{U}$, 即存在加细映射 $\rho : \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{U}$, 一般从 $\mathcal{W}$ 到 $\mathcal{U}$ 的加细映射不唯一, 于是它诱导的从 $C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$ 到 $C^p(\mathcal{W},\mathcal{F})$ 的映射也不同, 但我们可以证明 (4.14) 中的同态 $\rho_* : H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \longrightarrow H^p(\mathcal{W},\mathcal{F})$ 对从 $\mathcal{W}$ 到 $\mathcal{U}$ 的不同加细是相同的, 即 ρ_* 仅依赖于 $\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{U}$, 独立于加细映射 ρ. 现在 X 的所有开覆盖关于加细关系 $\prec$ 成为有向集, 当 X 为 Hausdorff 空间且仿紧时, 直接极限 $H^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$

$$\check{H}^p(X,\mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) \tag{4.15}$$

定义了仅依赖于 X 的上同调群, 称 $\check{H}^p(X,\mathcal{F})$ 为系数在层 $\mathcal{F}$ 中的 p 维 Čech 上同调群.

本书中, 我们不给出 Čech 上同调方法的细节, 而将注意力集中到 Grodendick 的定义.

定义 4.8 令 $(\mathcal{F},\pi,X)$ 是层, 若对 X 的每个开集 G,

$$\Gamma(X.\mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(G,\mathcal{F}) \longrightarrow 0 \tag{4.16}$$

正合, 称 $\mathcal{F}$ 为 X 上的**松弛层**.

(4.16) 正合的意思是 G 上的每个截影均为 X 上截影的限制, 即 G 上的截影均可以延拓到全空间 X 上.

最简单的松弛层的例子是 $\mathbf{C}^n$ 上所有函数芽层, 另一个例子是 Sato 定义的超函数芽层.

定义 4.9 令 $(\mathcal{F}',\pi',X)$ 和 $(\mathcal{F},\pi,X)$ 是 X 上的两个层, 若有连续映射 $\varphi : \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}$ 满足

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}' & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F} \\ \pi' \searrow & & \swarrow \pi \\ & X & \end{array}$$

且对任意 $x \in X$,

$$\varphi|_{\pi'^{-1}(x)} : \mathcal{F}'_x = \pi'^{-1}(x) \longrightarrow \mathcal{F}_x = \pi^{-1}(x)$$

是群同态, 称 φ 为**层同态**.

由层同态的定义, 如果 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ 为拓扑空间 X 上的层, $\varphi:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}$ 及 $\psi:\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{H}$ 均为层同态, 则 $\psi\circ\varphi:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{H}$ 也是层同态. 如果 $\varphi:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}$, $\psi:\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{F}$ 均为层同态, $\varphi\circ\psi=id_{\mathcal{G}}$ 且 $\psi\circ\varphi=id_{\mathcal{F}}$, 则称 φ,ψ 为**层同构**, 即层 $\mathcal{F}$ 同构于层 $\mathcal{G}$. 我们用 $\mathcal{F}\cong\mathcal{G}$ 表示 $\mathcal{F}$ 同构于 $\mathcal{G}$.

定义 4.10 如果 $\mathcal{F}$ 是 X 上的交换群层, $\pi:\mathcal{F}\longrightarrow X$ 为投影映射, 若:

(1) $\mathcal{F}'$ 是 $\mathcal{F}$ 中开集;

(2) $\pi(\mathcal{F}')=X$;

(3) 任意 $z\in X$, 茎 $\mathcal{F}'_z$ 是 $\mathcal{F}_z$ 的子群,

则子集 $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$ 称为 $\mathcal{F}$ 的**子层**.

(类似, 可定义环层 $\mathcal{F}$ 的子层的概念; 如果每个子环 $\mathcal{F}'_z\subset\mathcal{F}_z$ 是理想, 称这样的子层为理想子层.) 如果 $\varphi:\mathcal{G}\longrightarrow\mathcal{F}$ 是 X 上两个交换群层的层同态, 则不难验证映射 φ 是开映射. 因此**像** $\varphi(\mathcal{G})\subset\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}$ 的交换群子层. 同态的**核** $\mathcal{H}\subset\mathcal{G}$ 由所有被 φ 映入 $\mathcal{F}$ 零截影的点组成. 由命题 4.6, 所有截影的像是开的, 故核 $\mathcal{H}$ 也为 $\mathcal{G}$ 的交换群子层 (在环层的情形, 核 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{F}$ 的理想子层). 如果 $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$ 是子层, 包含映射 $i:\mathcal{F}'\longrightarrow\mathcal{F}$ 显然是层同态.

定义 4.11 令 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 上的交换群 (环) 层, $\mathcal{S}$ 是其子层 (理想子层), 满足 $x\in X$, $\mathcal{F}_x\cap\mathcal{S}=\mathcal{S}_x$ 是 $\mathcal{F}_x$ 的子群 (理想子群),

$$p:\mathcal{F}\longrightarrow\bigcup_{x\in X}\mathcal{F}_x/\mathcal{S}_x \tag{4.17}$$

是投影映射, 即 $p|_{\mathcal{F}_x}:\mathcal{F}_x\longrightarrow\mathcal{F}_x/\mathcal{S}_x$; $\forall x\in X$ 是商同态. 我们通过 p 赋予 $\bigcup\limits_{x\in X}\mathcal{F}_x/\mathcal{S}_x$ 商拓扑, 则 $\mathcal{F}/\mathcal{S}=\bigcup\limits_{x\in X}\mathcal{F}_x/\mathcal{S}_x$ 成为拓扑空间. $(\mathcal{F}/\mathcal{S},\widetilde{\pi},X)$ 成为 X 上的交换群 (环) 层, 这里 $\widetilde{\pi}:\mathcal{F}/\mathcal{S}\longrightarrow X$ 定义为 $\widetilde{\pi}(\mathcal{F}_x/\mathcal{S}_x)=x$. 称层 $\mathcal{F}/\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{F}$ **相对于子层 $\mathcal{S}$ 的商层**.

定义 4.12 令 $\mathcal{F}_i$ $(i\in\mathbf{N})$ 为拓扑空间 X 上的交换群层, $d_i:\mathcal{F}_i\longrightarrow\mathcal{F}_{i+1}$ 是层同态,

$$\mathcal{F}_0\xrightarrow{d_0}\mathcal{F}_1\xrightarrow{d_1}\mathcal{F}_2\longrightarrow\cdots\longrightarrow\mathcal{F}_i\xrightarrow{d_i}\mathcal{F}_{i+1}\xrightarrow{d_{i+1}}\cdots, \tag{4.18}$$

若 $\mathrm{Im}\ d_i=d_i(\mathcal{F}_i)=\mathrm{Ker}\ d_{i+1}=d_{i+1}^{-1}(0)$, 则称 (4.18) 在 $\mathcal{F}_{i+1}$ 处**正合**; 若 (4.18) 在每个 $\mathcal{F}_i$ $(i\in\mathbf{N})$ 处正合, 则称 (4.18) 是**层正合列**.

这里 $\mathrm{Ker}\ d_{i+1}=d_{i+1}^{-1}(0)$ 是零截影在 d_{i+1} 下的逆像, 易见 $\mathrm{Im}\ d_i$ 及 $\mathrm{Ker}\ d_{i+1}$ 均为 $\mathcal{F}_{i+1}$ 的子层.

我们有以下最简单又最重要的正合列.

令 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 上的层, $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子层, 则

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{p} \mathcal{F}/\mathcal{S} \longrightarrow 0 \tag{4.19}$$

是层正合列, 这里 i 是包含映射, p 是由 (4.17) 定义的投射, 0 是零层, 即对任意 $x \in X$, 0_x 只含元素 0.

i, p 是保茎映射, 且 $i|_{\mathcal{S}_x}$, $p|_{\mathcal{F}_x}$ 是群同态. 由于 i 是单射, 知 $i^{-1}(0) = 0$, 故在 $\mathcal{S}$ 正合. 由于 p 是投射, 知 $\mathrm{Im}\ p = \mathcal{F}/\mathcal{S}$, 且 (4.19) 最后一个箭头将 $\mathcal{F}/\mathcal{S}$ 映到 0, 故在 $\mathcal{F}/\mathcal{S}$ 正合. 现在只需验证在 $\mathcal{F}$ 正合, 由于 $\mathrm{Im}\ i = \mathcal{S} \subset \mathcal{F}$, 且由 $p|_{\mathcal{F}_x} : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x/\mathcal{S}_x$ 是投射, 对任意 $x \in X$, $(p|_{\mathcal{F}_x})^{-1}(0) = \mathcal{S}_x$, 故 $\mathrm{Ker}\ p \equiv \mathcal{S}$, 知 (4.19) 为层正合列.

在本章开始时, 我们构造了 $\mathbf{C}^n$ 上的层 $\mathcal{O}$, $\mathcal{E}$, 事实上, 我们采用了从**预层**构造层的方法. 现在我们讨论 Grothendieck 从预层构造层的方法, 故先给出**预层**的精确定义.

定义 4.13 令 $I = \{a, b, c, \cdots\}$ 是**有向集**, 即有偏序 $\prec$, 满足传递性: $a \prec b$, $b \prec c \Longrightarrow a \prec c$, 且对任意 $b, c \in I$, 存在 $a \in I$, $a \prec b$, $a \prec c$. 若对任意 $a \in I$, S_a 是群, 且若 $a \prec b$, 则存在群同态 $\rho_{ba} : S_b \longrightarrow S_a$ 满足, 若 $a \prec b \prec c$, 则

$$\rho_{ba} \circ \rho_{cb} = \rho_{ca}, \quad \rho_{aa} = id, \tag{4.20}$$

称 $\{S_a, \rho_{ba}\}_{a \in I}$ 为**有向集 I 上的群系统**.

若 $\{S_a, \rho_{ba}\}_{a \in I}$ 是有向集 I 上的群系统, 则可构造以下等价关系: $f \in S_b$, $g \in S_c$, $f \sim g \iff$ 存在 $a \in I$, $a \prec c$, $c \prec b$, 且 $\rho_{ba}(f) = \rho_{ca}(g)$, (4.20) 可保证这是一个等价关系. 令 $S = \bigcup\limits_{a \in I} S_a/\sim$, 则在 S 上有自然的群结构, 令 $[f]$ 及 $[g]$ 分别为 $f \in S_b$ 及 $g \in S_c$ 的等价类, 定义

$$[f] + [g] := [\rho_{ba}(f) + \rho_{ca}(g)], \tag{4.21}$$

这里 $a \prec b$, $a \prec c$. 由 (4.20) 知 (4.21) 定义合理. 称 S 为 S_a 的直接极限, 记为

$$S = \varinjlim_{a \in I} S_a. \tag{4.22}$$

显然, 有群同态

$$\begin{aligned} \rho_a : S_a &\longrightarrow S; \quad \forall a \in I, \\ f &\rightarrow [f]; \quad \forall f \in S_a. \end{aligned} \tag{4.23}$$

定义 4.14 令 X 是拓扑空间, $\mathcal{U}_X$ 是其拓扑, 对任意 $U \in \mathcal{U}$, 赋予群 $S(U)$. 进一步假定对任意开集 U, $V \subset X$ 满足 $\varnothing \neq V \subset U$, 当 $W \subset V \subset U$, 有群同态 $\rho_{UV} : S(U) \longrightarrow S(V)$ 满足

$$\begin{cases} \rho_{UU} = id, \\ \rho_{VW} \circ \rho_{UV} = \rho_{UW}, \end{cases}$$

则称

$$S := \{S(U), \rho_{UV}\} \tag{4.24}$$

是 X 上的**预层**.

X 上的每个预层 $S = \{S(U), \rho_{UV}\}$ 都可自然地决定一个层 $\mathcal{F}$, 定义如下: 对任意 $x \in X$, 子系统 $\{S(U), \rho_{UV}, U \in \mathcal{U}_X\}$ 关于 x 的开邻域系 $\mathcal{U}_x$ 及其包含关系成为一个有向集. 于是有直接极限 $\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x\in U} S(U)$ 及映射 $\rho_{U,x} : S(U) \longrightarrow \mathcal{F}_x$. 令 $\mathcal{F} := \bigcup_{x\in X} \mathcal{F}_x$, 定义 $\pi : \mathcal{F} \longrightarrow X$ 满足 $\pi(\mathbf{f}) = x$, 当 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_x$. 任意 $f \in S(U)$ 确定了集合 $D_f := \bigcup_{x\in U} \rho_{U,x}(f) \subset \mathcal{F}$. 所有集合 $\{D_f | U \in \mathcal{U}_X,\ f \in S(U)\}$, 作为拓扑的基赋予 $\mathcal{F}$ 以拓扑. 则不难验证 $(\mathcal{F}, \pi, X)$ 是 X 上的层.

定义 4.15 令 X 是拓扑空间, $S_1 = (S_1(U), \rho^1_{UV})$, $S_2 = (S_2(U), \rho^2_{UV})$ 是 X 上的群预层. 若对任意 $U \in \mathcal{U}_X$,

$$\varphi_U : S_1(U) \longrightarrow S_2(U)$$

是群同态, 且对任意 V, $U \in \mathcal{U}_X$, 若 $V \subset U$, 则一定有

$$\varphi_V \circ \rho^1_{UV} = \rho^2_{UV} \circ \varphi_U, \tag{4.25}$$

称 $\varphi = \{\varphi_U\}_{U\in\mathcal{U}_X} : S_1 \longrightarrow S_2$ 为**预层同态**.

更进一步, 若还有另一个预层同态 $\psi = \{\psi_U\}_{U\in\mathcal{U}_X} : S_2 \longrightarrow S_1$, 满足对任意 $U \in \mathcal{U}_X$,

$$\psi_U \circ \varphi_U = id_{S_1(U)}$$

且

$$\varphi_U \circ \psi_U = id_{S_2(U)},$$

则称 $\varphi = \{\varphi_U\}_{U\in\mathcal{U}_X}$ ($\psi = \{\psi_U\}_{U\in\mathcal{U}_X}$) 是**预层同构**.

令 $\phi: S_1 \longrightarrow S_2$ 是预层同态, 这里 $S_i = \{S_i(U), \rho^i_{UV}\}$ $(i = 1, 2)$ 是拓扑空间 X 上的两个预层, $\phi = \{\phi_U\}$, 则 ϕ 按以下方式诱导了从对应 S_1 的层 $\mathcal{F}_1$, 到对应 S_2 的层 $\mathcal{F}_2$ 的同态 ϕ'. 对 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_{1x}$, 选 $f \in S_1(U)$ 满足 $\rho^1_{U,x}(f) = \mathbf{f}$, 令 $\phi'(\mathbf{f}) := \rho^2_{U,x}\phi_U(f)$. 不难验证上述定义不依赖 f 的选取, 且 ϕ' 事实上是层同态.

现在假定 $S = (S(U), \rho_{UV})$ 是拓扑空间 X 上的预层, 令 $\mathcal{F}$ 是由预层 $(S(U), \rho_{UV})$ 诱导的层, 显然 $\Gamma_{\mathcal{F}} := (\Gamma(U, \mathcal{F}), r_{UV})$ 是预层, 这里 $\Gamma(U, \mathcal{F})$ 是由 $\mathcal{F}$ 在 U 上截影形成的群, 且若 $V \subset U$, r_{UV} 是从 $\Gamma(U, \mathcal{F})$ 到 $\Gamma(V, \mathcal{F})$ 的限制同态. 一个自然的问题是, 什么时候 S 预层同构于截影预层 $\Gamma_{\mathcal{F}}$.

下面两个条件保证 S 预层同构于 $\Gamma_{\mathcal{F}}$:

(1) 对 f, $g \in S(U)$, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 U 的开覆盖, 如果有 $\rho_{UU_\alpha}(f) = \rho_{UU_\alpha}(g)$, $\alpha \in I$, 则 $f = g$;

(2) 对 $U \in \mathcal{U}_X$, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 U 的开覆盖.

如果存在 $S_\alpha \in S(U_\alpha)$, $\forall \alpha \in I$, 满足 $\rho_{U_\alpha, U_\alpha \cap U_\beta}(S_\alpha) = \rho_{U_\beta, U_\alpha \cap U_\beta}(S_\beta)$, 当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, 则存在 $S \in S(U)$ 满足

$$\rho_{UU_\alpha}(S) = S_\alpha; \quad \forall \alpha \in I.$$

不难验证, 如果 (1) 和 (2) 在任意 $U \in \mathcal{U}_X$ 上成立, 则 S 预层同构于 $\Gamma_{\mathcal{F}}$.

事实上, 条件 (1) 和 (2) 在本书以后讨论的对象中均成立.

在本章开始时, $\mathbf{C}^n$ 上的层 $\mathcal{O}$ 及 $\mathcal{E}$ 显然分别是由预层 $(\mathcal{O}(U), r_{UV})$ 及 $(\mathcal{E}(U), r_{UV})$ 诱导的层, 这里 $\mathcal{O}(U)$ 及 $\mathcal{E}(U)$ 分别是 $\mathbf{C}^n$ 的开集 U 上的全纯函数及光滑函数集, r_{UV} 是限制映射.

§4.2 层的上同调群

我们在前面已经给出了截影 $s \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ 的概念, 即 $s: U \longrightarrow \mathcal{F}$ 是连续映射且 $\pi \circ s = id_U$. 如果我们不假定映射 $s: U \longrightarrow \mathcal{F}$ 连续, 只要求 $\pi \circ s = id_U$, 则称 s 为 $\mathcal{F}$ 在 U 上的非连续截影. 记 U 上的非连续截影全体为 $\widetilde{\Gamma}(U, \mathcal{F})$, 显然, 可在这类截影上引入加法运算, 如果 $\widetilde{f}$, $\widetilde{g} \in \widetilde{\Gamma}(U, \mathcal{F})$, 则

$$(\widetilde{f} + \widetilde{g})(x) = \widetilde{f}(x) + \widetilde{g}(x).$$

在这个加法运算下, $\widetilde{\Gamma}(U, \mathcal{F})$ 是交换群. $\Gamma(U, \mathcal{F})$ 是 $\widetilde{\Gamma}(U, \mathcal{F})$ 的子群, 且 $\{\widetilde{\Gamma}(U, \mathcal{F}), r_{UV}\}$ 是预层, 这里 r_{UV} 是限制映射. 记 $\mathcal{F}^0$ 为由预层 $\{\widetilde{\Gamma}(U, \mathcal{F}), r_{UV}\}$ 诱导的层, 显然, $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}^0$ 的子层.

定义 4.16 令 $\mathcal{F}$ 为拓扑空间 X 上的层, 称由预层

$$\{\widetilde{\Gamma}(U, \mathcal{F}), r_{UV}\} \tag{4.26}$$

诱导的层 $\mathcal{F}^0$ 为相对于 $\mathcal{F}$ 的典则松弛层.

由于 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}^0$ 的子层, 我们有下面层正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow k^1 = \mathcal{F}^0/\mathcal{F} \longrightarrow 0. \tag{4.27}$$

现在用 k^1 代替 $\mathcal{F}$ 来生成 $\mathcal{F}^1$, 也就是, $\mathcal{F}^1$ 是由预层 $\{\widetilde{\Gamma}(U,k^1), r_{UV}\}$ 诱导的层, 于是有层正合列

$$0 \longrightarrow k^1 \xrightarrow{i} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{p} k^2 = \mathcal{F}^1/k^1 \longrightarrow 0, \tag{4.28}$$

逐步重复上述过程, 我们可得到层 $\mathcal{F}^2$, $\mathcal{F}^3, \cdots, \mathcal{F}^k$, $\mathcal{F}^{k+1}, \cdots$.

所有 $\mathcal{F}^i$ 都是松弛层, 且对每个 $k \in \mathbf{Z}^+$,

$$0 \longrightarrow k^i \xrightarrow{i} \mathcal{F}^i \xrightarrow{p} k^{i+1} \longrightarrow 0 \tag{4.29}$$

均为正合列, 且有下面的层同态序列,

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{iop} \mathcal{F}^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{F}^k \xrightarrow{iop} \mathcal{F}^{k+1} \xrightarrow{iop} \mathcal{F}^{k+2} \longrightarrow \cdots. \tag{4.30}$$

定义 4.17　令 $\mathcal{F}_i$, $i \in \mathbf{Z}^+$ 均为拓扑空间上的层, 如果存在层同态 $\mathcal{F}_i \xrightarrow{\lambda_i} \mathcal{F}_{i+1}$, 满足 $\lambda_{i+1} \circ \lambda_i = 0$; $\forall i \in \mathbf{Z}^+$,

$$\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\lambda_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\lambda_2} \mathcal{F}_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_k \xrightarrow{\lambda_k} \mathcal{F}_{k+1} \longrightarrow \cdots, \tag{4.31}$$

则称 (4.31) 为层的复形.

定义 4.18　令 $\mathcal{F}$ 和 $c_i(\mathcal{F})$, $i = 0, 1, 2, \cdots$ 为拓扑空间 X 上的层, 且存在下面的层正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} c_0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\lambda_0} c_1(\mathcal{F}) \xrightarrow{\lambda_1} \cdots \longrightarrow c_k(\mathcal{F}) \xrightarrow{\lambda_k} c_{k+1}(\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots, \tag{4.32}$$

这里 i 是包含层同态, 称 (4.32) 为 $\mathcal{F}$ 的**解**. 有时将 (4.32) 简记为

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \dot{c}(\mathcal{F}). \tag{4.33}$$

下面, 我们将验证 (4.30) 是层正合列, 于是 (4.30) 是 $\mathcal{F}$ 的解, 称 (4.30) 为 $\mathcal{F}$ 的**典则解**.

由于第一个层同态 i 是单射, (4.30) 在 $\mathcal{F}$ 处正合, 对

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{iop} \mathcal{F}^1 \longrightarrow \cdots,$$

由 (4.27), $\mathrm{Ker}(i \circ p) = p^{-1} \circ i^{-1}(0) = p^{-1}(0) = \mathcal{F}$, $\forall l \in \mathbf{Z}^+$,

$$\mathcal{F}^{l-1} \xrightarrow{iop} \mathcal{F}^l \xrightarrow{iop} \mathcal{F}^{l+1},$$

$(i\circ p)(\mathcal{F}^{l-1})=i(p(\mathcal{F}^{l-1}))=i(k^l)=k^l$, 且由 (4.29), $\text{Ker}(i\circ p)=p^{-1}\circ i^{-1}(0)=p^{-1}(0)=k^l$.

令 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ 是拓扑空间 X 上的层, $\lambda:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}$ 是层同态, 于是对 $\forall U\in\mathcal{U}_X$, 可按以下方式诱导截影群的群同态 $\lambda_U:\Gamma(U,\mathcal{F})\longrightarrow\Gamma(U,\mathcal{G})$, 对 $\forall f\in\Gamma(U,\mathcal{F})$,

$$(\lambda_U f)(x):=\lambda(f(x));\quad \forall x\in U.$$

由于 λ 保茎连续, 知 $\lambda_U(f)$ 连续且 $\pi\circ(\lambda_U(f))=id|_U$, 即 $\lambda_U(f)\in\Gamma(U,\mathcal{G})$. 为避免记号过于复杂, 我们在不引起混淆的情况下, 用 λ 代替 λ_U, 对 $\forall f_1$, $f_2\in\Gamma(U,\mathcal{F})$, $\lambda(f_1+f_2)(x)=\lambda((f_1+f_2)(x))=\lambda(f_1(x)+f_2(x))=\lambda f_1(x)+\lambda f_2(x)=(\lambda(f_1))(x)+(\lambda(f_2))(x)$, $\forall x\in U$, 即$\lambda(f_1+f_2)=\lambda(f_1)+\lambda(f_2)$.

命题 4.19　令

$$0\longrightarrow\mathcal{F}\xrightarrow{\lambda}\mathcal{G}\xrightarrow{\mu}\mathcal{H}\longrightarrow 0 \tag{4.34}$$

是层的正合列, 则对 $\forall U\in\mathcal{U}_X$,

$$0\longrightarrow\Gamma(U,\mathcal{F})\xrightarrow{\lambda_U}\Gamma(U,\mathcal{G})\xrightarrow{\mu_U}\Gamma(U,\mathcal{H}) \tag{4.35}$$

是截影群正合列.

证明: $\text{Ker}\,\lambda_U=0$, 这是因为 $\forall f\in\Gamma(U,\mathcal{F})$, $\lambda_U(f)=0$, 即对 $\forall x\in U$, $\lambda(f(x))=0$, 由于 λ 是单射, 故 $f(x)=0$. $\forall x\in U$, $f\equiv 0$, 因此 (4.35) 在 $\Gamma(U,\mathcal{F})$ 处正合. 由于 $\mu\circ\lambda=0$, 由 μ_U 和 λ_U 的定义知 $\mu_U\circ\lambda_U=0$, 因此 $\text{Im}\,\lambda_U\subset\text{Ker}\,\mu_U$. 对 $\forall g\in\Gamma(U,\mathcal{G})$, 如果 $\mu_U(g)=0$, 即 $\mu(g(x))=0$, $\forall x\in U$. 由于 (4.34) 正合, $g(x)\in\text{Im}\,\lambda$, $\forall x\in U$, 即 $\text{Im}\,g\subset\text{Im}\,\lambda$, 因此存在 $f\in\Gamma(U,\mathcal{F})$ 满足 $\lambda_U(f)=g$. □

一般, (4.35) 中的 μ_U 不是满射. 我们有以下反例.

例: $X=\Delta^*=\{z\in\mathbf{C}^1|0<|z|<1\}$ 是 $\mathbf{C}^1$ 中的去心单位圆盘, $\mathcal{O}$ 是全纯函数芽层, $\mathcal{O}^*$ 为非零全纯函数芽层, Z 是整数芽层, 则我们有下列层正合列

$$0\longrightarrow Z\xrightarrow{i}\mathcal{O}\xrightarrow{e}\mathcal{O}^*\longrightarrow 0. \tag{4.36}$$

这里 i 是包含同态, $e(\mathbf{f}_x)=(\exp\,(2\pi i f))_x$, 这里 $\mathbf{f}_x$ 是 f 在 x 处的芽且 f 在 x 的邻域全纯, $(\exp\,(2\pi i f))_x$ 是 $\exp\,(2\pi i f)$ 在 x 处的芽. 不难验证 (4.36) 是层正合列. 现在我们考虑下面的群同态

$$0\longrightarrow\Gamma(\Delta^*,Z)\xrightarrow{i_{\Delta^*}}\Gamma(\Delta^*,\mathcal{O})\xrightarrow{e_{\Delta^*}}\Gamma(\Delta^*,\mathcal{O}^*)\longrightarrow 0. \tag{4.37}$$

对全纯函数 $z\in\Gamma(\Delta^*,\mathcal{O}^*)$, 没有 $g\in\Gamma(\Delta^*,\mathcal{O})$ 满足 $\exp(2\pi i g)=z$. 事实上, 仅有的可能的解是 $g=\dfrac{1}{2\pi i}\log z$, 但 $\dfrac{1}{2\pi i}\log z$ 不是 Δ^* 上的单值全纯函数.

引理 4.20 令

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\lambda} \mathcal{G} \xrightarrow{\mu} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

为拓扑空间 X 上的层正合列, 且 $\mathcal{F}$ 是松弛层, 则对任意 $U \in \mathcal{U}_X$,

$$0 \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{F}) \xrightarrow{\lambda_U} \Gamma(U,\mathcal{G}) \xrightarrow{\mu_U} \Gamma(U,\mathcal{H}) \longrightarrow 0 \tag{4.38}$$

正合.

证明: 显然, 只需证明 μ_U 正合. 对任意 $h \in \Gamma(U,\mathcal{H})$, 由于 μ 是满射, 对任意 $x_0 \in U$, 存在 $\mathbf{g}_{x_0} \in \mathcal{G}_{x_0}$, $\mu(\mathbf{g}_{x_0}) = h(x_0)$. 由于 μ 连续, 存在 x_0 的开邻域 U_{x_0}, 满足 $U_{x_0} \subset U$, 及截影 $s \in \Gamma(U_{x_0},\mathcal{G})$, 满足 $s(x_0) = \mathbf{g}_{x_0}$, $\mu_{U_{x_0}}(s) \in \Gamma(U_{x_0},\mathcal{H})$, 且 $(\mu_{U_{x_0}}(s))(x_0) = \mathbf{g}_{x_0} = h(x_0)$, 适当缩小 U_{x_0}, 有

$$\mu_{U_{x_0}}(s) = h|_{U_{x_0}}.$$

现在假定 s_0 是 $\mathcal{G}$ 在满足 $\mu_V(s_0) = h|_V$ 的最大开集 V 上的截影, 前面的讨论保证 s_0 的存在, 如果 $V = U$, 则引理成立; 如果 $V \neq U$, 令 $x_1 \in \partial V$. 有前面的讨论, 存在 x_1 的开邻域 V_1 及 $s_1 \in \Gamma(V_1,\mathcal{G})$ 满足

$$\mu_{V_1\cap V}(s_0|_{V_1\cap V} - s_1|_{V_1\cap V}) = h|_{V_1\cap V} - h|_{V_1\cap V} = 0.$$

由命题 4.19, 存在截影 $f \in \Gamma(V_1 \cap V,\mathcal{F})$ 满足 $\lambda_{V_1\cap V}(f) = s_0|_{V_1\cap V} - s_1|_{V_1\cap V}$. 由于 $\mathcal{F}$ 松弛, f 可延拓为 U 上的截影. 仍然用 f 表示其延拓, 则有新截影 $s_2 \in \Gamma(V_1 \cup V,\mathcal{F})$,

$$s_2 = \begin{cases} s_0, & V, \\ s_1 + \lambda(f|_{V_1}), & V_1 \end{cases}$$

且 $\mu_{V_1\cap V}(s_2) = h|_{V_1\cap V}$, 与 s_0 满足 $\mu_V(s_0) = h|_V$ 的最大开集上的截影矛盾, 由此存在 U 上的截影 s_3, 满足 $\mu_U(s_3) = h|_U$. □

推论 4.21 令

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

是拓扑空间 X 上的层正合列, 且 $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}$ 是松弛层, 则 $\mathcal{F}''$ 也是松弛层.

证明: 由定义, 只需证明对 X 的每个开集 U,

$$\Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{r_U} \Gamma(U,\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

是正合列, 也就是, 限制同态 r_U 是满射. 由引理 4.20, 由于 $\mathcal{F}'$ 松弛, (4.39) 的第一、二行为正合列,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(X,\mathcal{F}') & \xrightarrow{\alpha_X} & \Gamma(X,\mathcal{F}) & \xrightarrow{\beta_X} & \Gamma(X,\mathcal{F}'') & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow r_U & & \downarrow r_U & & \\ 0 & \longrightarrow & \Gamma(U,\mathcal{F}') & \xrightarrow{\alpha_U} & \Gamma(U,\mathcal{F}) & \xrightarrow{\beta_U} & \Gamma(U,\mathcal{F}'') & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array} \tag{4.39}$$

由于 $\mathcal{F}$ 松弛, (4.39) 中间一列正合, 由于 $r_U \circ \beta_X = r_U \circ \beta_U$, 且 β_X 是满射, (4.39) 右边一列也正合. □

定义 4.22 令 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 上的层, 且

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\lambda_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\lambda_1} \cdots \longrightarrow \mathcal{F}^k \xrightarrow{\lambda_k} \mathcal{F}^{k+1} \longrightarrow \cdots$$

是由 (4.30) 给出的典则解, 则可诱导群同态序列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{i_*} \Gamma(X,\mathcal{F}^0) \xrightarrow{\lambda_{0*}} \Gamma(X,\mathcal{F}^1) \xrightarrow{\lambda_{1*}} \cdots \\ \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}^k) \xrightarrow{\lambda_{k*}} \Gamma(X,\mathcal{F}^{k+1}) \xrightarrow{\lambda_{k+1*}} \cdots . \end{aligned} \tag{4.40}$$

由于 $\lambda_k \circ \lambda_{k-1} = 0;\ k \geqslant 1,\ \lambda_0 \circ i = 0,\ \lambda_{k*} \circ \lambda_{k-1*} = 0;\ k \geqslant 1,\ \lambda_{0*} \circ i_* = 0$, 定义

$$H^k(X,\mathcal{F}) = \frac{\text{Ker } \lambda_{k*}}{\text{Im } \lambda_{k-1*}}; \quad k \in \mathbf{Z}^+ \tag{4.41}$$

及

$$H^0(X,\mathcal{F}) = \text{Ker } \lambda_{0*}, \tag{4.42}$$

称 (4.41) 是系数在层 $\mathcal{F}$ 上的 k **维上同调群**.

由命题 4.19, 有下列截影群序列

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{i_*} \Gamma(X,\mathcal{F}^0) \xrightarrow{\lambda_{0*}} \Gamma(X,\mathcal{F}^1) \longrightarrow \cdots$$

在 $\Gamma(X,\mathcal{F}^0)$ 处正合, 因此 $\text{Ker } \lambda_{0*} = \text{Im } i_*$, 即, $H^0(X,\mathcal{F}) \equiv \Gamma(X,\mathcal{F})$.

由于 $\mathcal{F}$ 的典则解仅依赖 $\mathcal{F}$, (4.41) 及 (4.42) 定义的系数在 $\mathcal{F}$ 上的上同调群仅依赖 $\mathcal{F}$. 由 Čech 方法定义的上同调群在仿紧拓扑空间情形同构于前面定义的上同调群.

现在令 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 上的层且

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} c^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{d_0} c^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{d_1} \cdots \longrightarrow c^k(\mathcal{F}) \xrightarrow{d_k} c^{k+1}(\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \tag{4.43}$$

是 $\mathcal{F}$ 的一个解, 则有

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{i_*} \Gamma(X,c^0(\mathcal{F})) \xrightarrow{d_{0*}} \Gamma(c^1(\mathcal{F})) \xrightarrow{d_{1*}} \cdots \\ \longrightarrow \Gamma(X,c^k(\mathcal{F})) \xrightarrow{d_{k*}} \Gamma(X,c^{k+1}(\mathcal{F})) \longrightarrow \cdots . \end{aligned} \tag{4.44}$$

由于 $\mathrm{Ker}\ d_k = \mathrm{Im}\ d_{k-1}$, 从而 $d_{k*} \circ d_{k-1*} \equiv 0$, 因此 (4.44) 是群复形, 于是我们定义下列上同调群

$$H^k(X,\dot{c}(\mathcal{F})) = \frac{\mathrm{Ker}\ d_{k*}}{\mathrm{Im}\ d_{k-1*}}$$

及

$$H^0(X,\dot{c}(\mathcal{F})) = \mathrm{Ker}\ d_{0*}.$$

称 $H^k(X,\dot{c}(\mathcal{F}))$; $k=0,1,2,\cdots$ 为对应解 $\dot{c}(\mathcal{F})$ $(0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \dot{c}(\mathcal{F}))$ 的 k 维上同调群, 当 $k=0$, 不难验证

$$H^0(X,\dot{c}(\mathcal{F})) \cong \Gamma(X,\mathcal{F}).$$

一般来讲, $H^k(X,\dot{c}(\mathcal{F})) \cong H^k(X,\mathcal{F})$, $k \in \mathbf{Z}^+$ 并不一定成立.

定理 4.23　令 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 上的松弛层, 则

$$H^n(X,\mathcal{F}) \equiv 0; \quad n \in \mathbf{Z}^+.$$

证明: 令

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\lambda_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\lambda_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\lambda_2} \cdots \longrightarrow \mathcal{F}^k \xrightarrow{\lambda_k} \mathcal{F}^{k+1} \xrightarrow{\lambda_{k+1}} \cdots$$

是典则解. 显然, $\mathcal{F}^0$, $\mathcal{F}^1,\cdots,\mathcal{F}^k,\cdots$ 均为松弛层.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & \\
 & & & & \searrow & \nearrow & & & \searrow & \nearrow & & & \\
 & & & & & k^1 & & & & k^3 & & & \\
 & & & \lambda_0 \nearrow & & & \searrow & \nearrow & & & \searrow & & \\
0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow & & \mathcal{F}^0 & \xrightarrow{\lambda_0} & & & \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\lambda_1} & & \mathcal{F}^2 \longrightarrow & & & \mathcal{F}^3 \longrightarrow \cdots & \\
 & & & & & & \searrow & \nearrow & & & & \searrow & \\
 & & & & & & & k^2 & & & & & k^4 \\
 & & & & & & \nearrow & \searrow & & & & & \searrow \\
 & & & & & & 0 & 0 & & & & & 0
\end{array} \tag{4.45}$$

回忆 (4.30) 中如何构造层 $\mathcal{F}$ 的正合列的, 现在 (4.45) 中每个斜线均为层正合列. 由引理 4.20, 由于 $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^0$ 是松弛层, 则 k^1 也是松弛层, 而从 k^1, $\mathcal{F}^1$ 是松

弛层, 知 k^2 也是松弛层, 相继利用斜线均为层正合列, 可知 k^1, k^2, $k^3,\cdots$ 均为松弛层, 于是 (4.45) 诱导了 X 上的截影群的正合序列, 由推论 4.21, 此正合列各行均为层正合列,

$$p_*(\Gamma(X,\mathcal{F}^0))=\Gamma(X,k^1),\ \lambda_{0*}(\Gamma(X,\mathcal{F}^0))=i_*p_*(\Gamma(X,\mathcal{F}^0))=i_*(\Gamma(X,k^1)),$$

$$\mathrm{Ker}\,\lambda_{1*}=\lambda_{1*}^{-1}(0)=p_*^{-1}i_*^{-1}(0)=p_*^{-1}(0)=i_*(\Gamma(X,k^1)).$$

因此 $H^1(X,\mathcal{F})=\dfrac{\mathrm{Ker}\ \lambda_{1*}}{\mathrm{Im}\ \lambda_{0*}}=0$. 对任意 $n\in\mathbf{Z}^+$,

$$(\lambda_{n-1*})(\Gamma(X,\mathcal{F}^{n-1}))=i_*p_*(\Gamma(X,\mathcal{F}^{n-1}))=i_*\Gamma(X,k^n) \tag{4.46}$$

且 $\mathrm{Ker}\,\lambda_{n*}=\lambda_{n*}^{-1}(0)\equiv p_*^{-1}i_*^{-1}(0)=p_*^{-1}(0)=i_*\Gamma(X,k^n)$, 从而 $H^n(X,\mathcal{F})=0$. □

令 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ 是拓扑空间 X 上的两个层, $\mu:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}$ 是层同态, $0\longrightarrow\mathcal{F}\xrightarrow{i}\mathcal{F}^0\xrightarrow{\lambda_0}\mathcal{F}^1\xrightarrow{\lambda_1}\cdots\longrightarrow\mathcal{F}^k\longrightarrow\cdots$ 以及 $0\longrightarrow\mathcal{G}\xrightarrow{i}\mathcal{G}^0\xrightarrow{\lambda_0}\mathcal{G}^1\xrightarrow{\lambda_1}\cdots\longrightarrow\mathcal{G}^k\longrightarrow\cdots$ 分别为其典则解, 则 $\mu:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}$ 可诱导它们的典则解之间的层同态, 即, 有层同态 $\mu:\mathcal{F}^k\longrightarrow\mathcal{G}^k$; $k=0,1,2,\cdots$ 满足

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}^k & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G}^k\\ \lambda_k\downarrow & & \downarrow\lambda_k\\ \mathcal{F}^{k+1} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G}^{k+1}\end{array} \tag{4.47}$$

交换. 我们先分析以下情形

$$\begin{array}{ccc}0 & & 0\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G}\\ i\downarrow & & \downarrow i\\ \mathcal{F}^0 & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G}^0\\ p\downarrow & & \downarrow p\\ k^1(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\mu} & k^1(\mathcal{G})\end{array} \tag{4.48}$$

对 X 中的任意开集 U, 考虑 $\mu:\mathcal{F}\longrightarrow\mathcal{G}$, 则有 $\mu_U:\hat{\Gamma}(U,\mathcal{F})\longrightarrow\hat{\Gamma}(U,\mathcal{G})$, 对任意 $\hat{f}\in\hat{\Gamma}(U,\mathcal{F})$, $(\mu_U\hat{f})(x):=\mu\hat{f}(x)$. 显然 μ_U 是从 $\hat{\Gamma}(U,\mathcal{F})$ 到 $\hat{\Gamma}(U,\mathcal{G})$ 的群同态, 对任意 $x\in U$, $\hat{\mathbf{f}}_x\in\mathcal{F}_x^0$ 是 $\hat{f}$ 在 x 点的芽. 现在我们定义 $\mu:\mathcal{F}^0\longrightarrow\mathcal{G}^0$ 为 $\mu(\hat{\mathbf{f}}_x):=(\mu_U\hat{f})_x$, 当然, 我们必须验证 μ 的定义合理, 这与先前方法类似, 就不重复了.

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G}\\ i\downarrow & & \downarrow i\\ \mathcal{F}^0 & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G}^0\end{array} \tag{4.49}$$

由于 $\mathbf{f}_x \in \mathcal{F}_x$, 假定 $\mathbf{f}_x$ 是截影 $f \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ 的芽, 由于 $\Gamma(U, \mathcal{F})$ 是 $\hat{\Gamma}(U, \mathcal{F})$ 的子群, 事实上 $\mu(\mathbf{f}_x) = (\mu_U f)_x$, 于是显然 (4.48) 交换. 更进一步

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G} \\ i\downarrow & & \downarrow i \\ \mathcal{F}^0 & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G}^0 \\ p\downarrow & & \downarrow p \\ k^1(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\mu} & k^1(\mathcal{G}) \end{array} \tag{4.50}$$

$\mu : k^1(\mathcal{F}) \longrightarrow k^1(\mathcal{G})$ 是由 (4.49) 诱导的商层. 为避免记号复杂, 我们仍然用 μ 表示商同态.

由商层的定义,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^0 & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G}^0 \\ p\downarrow & & \downarrow p \\ k^1(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\mu} & k^1(\mathcal{G}) \end{array}$$

交换, 从而

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G} \\ p\circ i\downarrow & & \downarrow p\circ i \\ k^1(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\mu} & k^1(\mathcal{G}) \end{array}$$

交换. 类似的讨论可知, 以下图表交换

$$\begin{array}{ccc} k^1(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\mu} & k^1(\mathcal{G}) \\ p\downarrow & & \downarrow p \\ \mathcal{F}^1 & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G}^1 \\ i\downarrow & & \downarrow i \\ k^2(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\mu} & k^2(\mathcal{G}) \end{array} \tag{4.51}$$

由 (4.50) 及 (4.51) 可知, 我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}^0 & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G}^0 \\ \lambda_0\downarrow & & \downarrow\lambda_0 \\ \mathcal{F}^1 & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ k^2(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\mu} & k^2(\mathcal{G}) \end{array}$$

重复前面的过程, 我们可分别得到 $\mathcal{F}$ 及 G 的典则解之间的层同态, 且 (4.47) 交换.

定理 4.24 令

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \longrightarrow 0 \tag{4.52}$$

是拓扑空间 X 上的正合列, 则我们有下列上同调群的正合列

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_*} H^0(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_*} H^0(X,\mathcal{H}) \\
&\xrightarrow{\delta_*} H^1(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \\
&\xrightarrow{\delta_*} H^{k-1}(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_*} H^{k-1}(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_*} H^{k-1}(X,\mathcal{H}) \\
&\xrightarrow{\delta_*} H^k(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_*} H^k(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_*} H^k(X,\mathcal{H}) \\
&\xrightarrow{\delta_*} H^{k+1}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \cdots,
\end{aligned} \tag{4.53}$$

这里 α_*, β_* 是分别由层同态 α, β 诱导的上同调群同态, 连接同态 δ_* 的定义将在证明中给出.

证明: 首先我们有以下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{H} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^0 & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G}^0 & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{H}^0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \lambda_0 & & \downarrow \lambda_0 & & \downarrow \lambda_0 & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^1 & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G}^1 & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{H}^1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^{k-1} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G}^{k-1} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{H}^{k-1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \lambda_{k-1} & & \downarrow \lambda_{k-1} & & \downarrow \lambda_{k-1} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^k & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G}^k & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{H}^k & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \lambda_k & & \downarrow \lambda_k & & \downarrow \lambda_k & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^{k+1} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G}^{k+1} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{H}^{k+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array} \tag{4.54}$$

在上面的层同态图表中, 所有正方形交换, 也就是,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^k & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G}^k & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{H}^k & \longrightarrow & 0 \\ & & \lambda_k \downarrow & & \downarrow \lambda_k & & \downarrow \lambda_k & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^{k+1} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{G}^{k+1} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{H}^{k+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

$\forall k = 0, 1, 2, \cdots$, $\lambda_k \circ \alpha = \alpha \circ \lambda_k$, $\lambda_k \circ \beta = \beta \circ \lambda_k$. 更进一步, (4.54) 中所有行正合.

首先我们证明 $k = 0$ 的情形, 即

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}^0 \longrightarrow 0 \tag{4.55}$$

正合. 如果 $\alpha(\hat{\mathbf{f}}_x) = 0$, 即 $(\alpha_U \hat{f})_x = 0$, 这里 $\hat{f} \in \hat{\Gamma}(U, \mathcal{F})$, 这意味着存在 x 的开邻域 V, $V \subset U$, $\alpha_U \hat{f}|_V \equiv 0$, 即, $\alpha(\hat{f}(y)) = 0$, $\forall y \in V$. 由于 α 是单射, 知 $\hat{f}(y) = 0$, $\forall y \in V$, 从而 $\hat{\mathbf{f}}_x = 0$, 因此 (4.55) 在 $\mathcal{F}^0$ 处正合.

对任意 $\hat{\mathbf{h}}_x \in (\mathcal{H}^0)_x$, 由定义, 存在 $\hat{h} \in \hat{\Gamma}(U, \mathcal{H}^0)$, $U \in \mathcal{U}_x$, $(\hat{h})_x = \hat{\mathbf{h}}_x$, 由于 $\beta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ 是满射, 存在 $\hat{\mathbf{g}} \in \hat{\Gamma}(U, \mathcal{G}^0)$ 满足 $\beta_U(\hat{g}) = \hat{h}$, 更进一步, $\beta(\hat{\mathbf{g}}_x) = \hat{\mathbf{h}}_x$, 因此 (4.55) 中的 β 是满射.

由于 $\beta \circ \alpha = 0$, $\alpha(\mathcal{F}^0) \subset \mathrm{Ker}\ \beta$. 现在只需证明 $\alpha(\mathcal{F}^0) \supset \mathrm{Ker}\ \beta$. 对任意 $\hat{\mathbf{g}}_x \in (\mathcal{G}^0)_x$, $\beta(\hat{\mathbf{g}}_x) = 0$, 由定义, 存在 $\hat{g} \in \hat{\Gamma}(U, \mathcal{G})$, $\hat{\mathbf{g}}_x$ 是 $\hat{g}$ 在 x 处的芽, 且 $\beta(\hat{\mathbf{g}}_x) = (\beta(\hat{g}))_x$. 这意味着, 存在 $V \in \mathcal{U}_x$, 满足 $\beta(\hat{g})|_V \equiv 0$, 即对任意 $y \in V$, $\beta(\hat{g}(y)) = 0$, 从而存在 $\mathbf{f}_y \in \mathcal{F}_y$, $\alpha(\mathbf{f}_y) = \hat{g}(y)$. 现在选取 $\hat{f} \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ 满足 $\hat{f}(y) = \mathbf{f}_y$; $y \in V$, 则 $\alpha_V(\hat{f}) = \hat{g}|_V$, 因此 $\alpha(\hat{f})_x = (\hat{g})_x = \mathbf{g}_x$, 知 (4.55) 正合. 更进一步, 有下列序列

$$0 \longrightarrow k_1(\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha} k_1(\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta} k_1(\mathcal{H}) \longrightarrow 0, \tag{4.56}$$

这里 α, β 分别表示商同态 $\alpha : \mathcal{F}^0/\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}^0/\mathcal{G}$, $\beta : \mathcal{G}^0/\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}^0/\mathcal{H}$. 由定义知 α 是单射, 且 β 是满射. 由于 (4.55) 正合, 知 (4.56) 中 $\beta \circ \alpha = 0$, 只需证明 $\mathrm{Ker}\ \beta \subset \mathrm{Im}\ \alpha$ 在 (4.56) 中成立. 假定 $[\hat{\mathbf{a}}] \in (k_1(\mathcal{G}))_x = (\mathcal{G}^0)_x/\mathcal{G}_x$ 且 $\beta([\hat{\mathbf{a}}]) = 0$, 也就是, 其代表元 $\hat{\mathbf{a}} \in (\mathcal{G}^0)_x$ 满足 $\beta(\hat{\mathbf{a}}) \in \mathcal{H}_x$, 由 $\beta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ 是满射, 可知存在 $\mathbf{a}_1 \in \mathcal{G}_x$, $\beta(\mathbf{a}_1) = \beta(\hat{\mathbf{a}})$ 满足 $\beta(\hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}_1) = 0$, 由 (4.55) 的正合性知, 存在 $\hat{\mathbf{c}} \in \mathcal{F}_x$ 满足, 在 (4.55) 中有 $\alpha(\hat{\mathbf{c}}) = \hat{\mathbf{a}} - \mathbf{a}_1$, 且在 (4.56) 中有 $\alpha([\hat{\mathbf{c}}]) = \hat{\mathbf{a}}$, 故 (4.56) 是正合列. 继续使用从 (4.54) 正合推出 (4.55) 及 (4.56) 正合的方法, 可知 $0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}^1 \longrightarrow 0$ 及 $0 \longrightarrow k^2(\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha} k^2(\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta} k^2(\mathcal{H}) \longrightarrow 0$ 正合, 重复这个步骤, 知 (4.54) 各行均正合, 且

$$0 \longrightarrow k^s(\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha} k^s(\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta} k^s(\mathcal{H}) \longrightarrow 0; \quad s \in \mathbf{Z}^+$$

正合.

现在我们考虑由 (4.54) 诱导的截影群图表

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \longrightarrow & \Gamma(X,\mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(X,\mathcal{G}) & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(X,\mathcal{H}) & \\
 & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i & \\
0 \longrightarrow & \Gamma(X,\mathcal{F}^0) & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(X,\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(X,\mathcal{H}^0) & \longrightarrow 0 \\
 & & & & & & \\
0 \longrightarrow & \Gamma(X,\mathcal{F}^{k-1}) & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(X,\mathcal{G}^{k-1}) & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(X,\mathcal{H}^{k-1}) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \lambda_{k-1} & & \downarrow \lambda_{k-1} & & \downarrow \lambda_{k-1} & \\
0 \longrightarrow & \Gamma(X,\mathcal{F}^{k}) & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(X,\mathcal{G}^{k}) & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(X,\mathcal{H}^{k}) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \lambda_{k} & & \downarrow \lambda_{k} & & \downarrow \lambda_{k} & \\
0 \longrightarrow & \Gamma(X,\mathcal{F}^{k+1}) & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(X,\mathcal{G}^{k+1}) & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(X,\mathcal{H}^{k+1}) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \lambda_{k+1} & & \downarrow \lambda_{k+1} & & \downarrow \lambda_{k+1} & \\
0 \longrightarrow & \Gamma(X,\mathcal{F}^{k+2}) & \xrightarrow{\alpha} & \Gamma(X,\mathcal{G}^{k+2}) & \xrightarrow{\beta} & \Gamma(X,\mathcal{H}^{k+2}) & \longrightarrow 0
\end{array}
\tag{4.57}
$$

简单起见, 我们仍然用 α. β. λ_k: $k=0,1,2,\cdots$ 表示 (4.57) 中的截影群的诱导同态.

由于 $\mathcal{F}^0$, $\mathcal{F}^1,\cdots,\mathcal{F}^k,\cdots$ 均为松弛层, 知 (4.57) 各行正合, 且 (4.57) 所有正方形交换, 即 $\beta\circ\lambda_k=\lambda_k\circ\beta$ 且 $\alpha\circ\lambda_k=\lambda_k\circ\alpha$, $k=0,1,2,\cdots$.

现在给出 $\delta_*: H^k(X,\mathcal{H})\longrightarrow H^{k+1}(X,\mathcal{F})$ 的定义. 假定 $\hat{h}\in\Gamma(X,\mathcal{H}^k)\cap\operatorname{Ker}\lambda_k$, 用 $[\hat{h}]$ 表示 $\hat{h}$ 在 $H^k(X,\mathcal{H})$ 中的等价类, 由于 $\hat{h}\in\Gamma(X,\mathcal{H}^k)$ 且 $\beta_*:\Gamma(X,\mathcal{G}^k)\longrightarrow\Gamma(X,\mathcal{H}^k)$ 是满射, 存在 $\hat{g}\in\Gamma(X,\mathcal{G}^k)$ 满足 $\beta(\hat{g})=\hat{h}$, $\lambda_k(\hat{g})\in\Gamma(X,\mathcal{G}^{k+1})$, $\beta\circ\lambda_k(\hat{g})=\lambda_k\circ\beta(\hat{g})=\lambda_k(\hat{h})=0$. 从而由 (4.57) 中各行正合, 知存在 $\hat{f}\in\Gamma(X,\mathcal{F}^{k+1})$ 满足 $\alpha(\hat{f})=\lambda_k(\hat{g})$. 由于 α 是单射, $\alpha\circ\lambda_{k+1}(\hat{f})=\lambda_{k+1}\circ\alpha(\hat{f})=\lambda_{k+1}\circ\lambda_k(\hat{g})=0$, 因此 $\lambda_{k+1}(\hat{f})=0$, 即 $\hat{f}\in\operatorname{Ker}\lambda_{k+1}$, 可定义 $\delta_*([\hat{h}])=[\hat{f}]$.

我们需验证 δ_* 的定义合理, 首先假定 δ_* 独立于 $\hat{g}$ 的选取. 若还有 $\hat{g}_1$ 满足 $\beta(\hat{g}_1)=\hat{h}$, 则存在 $\hat{f}_1\in\Gamma(X,\mathcal{F})$, $\hat{g}_1-\hat{g}=\alpha(\hat{f}_1)$, 因此 $\lambda_k(\hat{g}_1)=\lambda_k(\hat{g})+\lambda_k\circ\alpha(\hat{f}_1)=\alpha\circ\lambda_k(\hat{f}_1)+\lambda_k(\hat{g})$, 于是 $\alpha(\hat{f}+\lambda_k(\hat{f}_1))=\lambda_k(\hat{g}_1)$. 由前面 δ_* 的定义, $\delta_*([\hat{h}])=[\hat{f}+\lambda_k\hat{f}_1]=[\hat{f}]$. 现在我们验证 δ_* 独立于 $\hat{h}$ 的选取, 假定有另一个 $\hat{h}_1$, $[\hat{h}_1]=[\hat{h}]$, 则 $\hat{h}_1=\hat{h}+\lambda_{k-1}(\hat{h}')$, 这里 $\hat{h}'\in\Gamma(X,\mathcal{H}^{k-1})$, 故存在 $\hat{g}_1\in\Gamma(X,\mathcal{G}^{k-1})$ 满足 $\hat{h}'=\beta(\hat{g}_1)$ 且 $\hat{h}'=\hat{h}+\lambda_{k-1}\circ\beta(\hat{g}_1)=\hat{h}+\beta\circ\lambda_{k-1}(\hat{g}_1)$, 即 $\beta(\hat{g}+\lambda_{k-1}(\hat{g}_1))=\hat{h}_1$. 于是不管用 h 还是 h_1 定义 $\delta_*([h])$, 都得到相同的 $\lambda_k(\hat{g})$,

于是得到相同的 $\delta_*([h])$.

现在需证明对任意 $k=0,1,2,\cdots$, (4.53) 中各行正合.

首先我们证明 (4.53) 在 $H^k(X,\mathcal{G})$ 处正合, 由于 $\beta\circ\alpha=0$, 故 $\beta_*\circ\alpha_*=0$, 故只需证明 $\mathrm{Ker}\ \beta_*\subset\mathrm{Im}\ \alpha_*$, $\forall[\hat{g}]\in H^k(X,\mathcal{G})$, 且 $\beta_*([\hat{g}])=0$. 这表明 $\beta(\hat{g})\in\mathrm{Im}\ \lambda_{k-1}$, 也就是, 存在 $h'\in\Gamma(X,\mathcal{H}^{k-1})$ 满足 $\beta(\hat{g})=\lambda_{k-1}(\hat{h}')$. 由于 (4.57) 各行正合, 存在 $g'\in\Gamma(X,\mathcal{G}^{k-1})$ 满足 $\beta(\hat{g}')=\hat{h}'$, 于是 $\beta(\hat{g})=\lambda_{k-1}\circ\beta(\hat{g}')=\beta\circ\lambda_{k-1}(\hat{g}')$, 即 $\beta(\hat{g}-\lambda_{k-1}(\hat{g}'))=0$, 故存在 $\hat{f}\in\Gamma(X,\mathcal{F}^k)$ 满足 $\alpha(\hat{f})=(\hat{g}-\lambda_{k-1}(\hat{g}'))$,

$$\alpha\circ\lambda_k(\hat{f})=\lambda_k\circ\alpha(\hat{f})=\lambda_k(\hat{g}-\lambda_k(\hat{g}'))=\lambda_k(\hat{g})=0.$$

这里最后一个等式是因为 $[\hat{g}]\in H^k(X,\mathcal{G})$. 由于 α 是单射, 故 $\lambda_k(\hat{f})=0$, 由 $\alpha(\hat{f})=(\hat{g}-\lambda_{k-1}(\hat{g}'))$, 可知 $\alpha_*([\hat{f}])=[\hat{g}-\lambda_{k-1}(\hat{g}')]=[\hat{g}]$.

现在首先验证 (4.53) 在 $H^k(X,\mathcal{F})$ 处正合. 对任意 $[\hat{h}]\in H^{k-1}(X,\mathcal{H}), \delta_*([\hat{h}])=[\hat{f}]$, 满足 $\alpha(\hat{f})=\lambda_{k-1}(\hat{g})$, $\hat{g}\in\Gamma(X,\mathcal{G}^{k-1})$, 从而 $\alpha_*(\delta_*[\hat{h}])=\alpha_*([f])=[\alpha\hat{f}]=[\lambda_{k-1}(\hat{g})]=0$, 即 $\mathrm{Im}\ \delta_*\subset\mathrm{Ker}\ \alpha_*$. $\forall[\hat{f}]\in H^k(X,\mathcal{F})$, $\alpha_*([\hat{f}])=0$, 即 $\alpha(\hat{f})\in\lambda_{k-1}(\Gamma(X,\mathcal{G}^{k-1}))$ 且 $\lambda_k(\hat{f})\equiv 0$, 故存在 $\hat{g}\in\Gamma(X,\mathcal{G}^{k-1})$ 满足 $\lambda_{k-1}(\hat{g})=\alpha(\hat{f})$, 且 $\hat{h}=\beta(\hat{g})\in\Gamma(X,\mathcal{H}^{k-1})$, $\lambda_{k-1}(\hat{h})=\lambda_{k-1}\circ\beta(\hat{g})=\beta(\lambda_{k-1}(\hat{g}))=\beta\circ\alpha(\hat{f})=0$, 于是 $\hat{h}\in\mathrm{Ker}\ \lambda_{k-1}$. 由 δ_* 的定义, $\delta_*([\hat{h}])=[\hat{f}]$, 于是 $\mathrm{Im}\ \delta_*\supset\mathrm{Ker}\ \alpha_*$, 从而 (4.53) 在 $H^k(X,\mathcal{F})$ 处正合.

其次验证 (4.53) 在 $H^k(X,\mathcal{H})$ 处正合. 对任意 $[\hat{g}]\in H^k(X,\mathcal{G})$, $\delta_*\circ\beta_*([\hat{g}])=\delta_*([\beta(\hat{g})])$, 由于 $\lambda_k\circ\beta(\hat{g})=\beta(\lambda_k(\hat{g}))=0$, 从 δ_* 的定义可知, $\delta_*([\beta(\hat{g})])=0$, 即 $\mathrm{Im}\ \beta_*\subset\mathrm{Ker}\ \delta_*$.

最后我们证明 $\mathrm{Ker}\ \delta_*\subset\mathrm{Im}\ \beta_*$. 对任意 $[\hat{h}]\in H^k(X,\mathcal{H})$ 及 $\delta_*([\hat{h}])=0$, 由 δ_* 的定义知, 存在 $\hat{g}\in\Gamma(X,\mathcal{G}^k)$, $\beta(\hat{g})=\hat{h}$ 及 $\hat{f}\in\Gamma(X,\mathcal{F}^k)$, $\alpha\circ\lambda_k(\hat{f})=\lambda_k(\hat{g})$, 从而 $\lambda_k(\alpha(\hat{f})-\hat{g})=0$; 即 $\hat{g}-\alpha(\hat{f})\in\mathrm{Ker}\ \lambda_k$, $\beta_*([\hat{g}-\alpha\hat{f}])=[\beta(\hat{g})-\beta\circ\alpha(\hat{f})]=[\beta(\hat{g})]=[\hat{h}]$, 故 $\mathrm{Ker}\ \delta_*\subset\mathrm{Im}\ \beta_*$. □

下面的定义有助于我们计算一些层的上同调群.

定义 4.25　令 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间上的层, 且

$$0\longrightarrow\mathcal{F}\xrightarrow{i}\mathcal{L}^0\xrightarrow{d_0}\mathcal{L}^1\xrightarrow{d_1}\mathcal{L}^2\longrightarrow\cdots\tag{4.58}$$

是 $\mathcal{F}$ 的一个解, 如果每个 $\mathcal{L}^i$; $i=0,1,2,\cdots$ 均为零调层, 即

$$H^k(X,\mathcal{L}^0)=0;\quad k\in\mathbf{Z}^+,\quad i=0,1,2,\cdots,$$

则称 (4.58) 是 $\mathcal{F}$ **的零调解**.

定理 4.26 令 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间上的层, 且 $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \dot{\mathcal{L}}$ 是 $\mathcal{F}$ 的零调解, 则

$$H^k(X, \dot{\mathcal{L}}(\mathcal{F})) = H^k(X, \mathcal{F}); \quad k = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明: 当 $k=0$, 易知 $H^0(X, \dot{\mathcal{L}}) = H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$. 假定定理对 $k \leqslant l-1$ 成立, 我们想证明 $k = l$ 时定理成立. 从

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{d_1} \cdots, \tag{4.59}$$

令 $k_1 = \text{Im } d_0 = \text{Ker } d_1$, 我们有下列短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{d_0} k_1 \longrightarrow 0 \tag{4.60}$$

及 k_1 的解

$$0 \longrightarrow k_1 \xrightarrow{i} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{L}^2 \xrightarrow{d_2} \mathcal{L}^3 \longrightarrow \cdots. \tag{4.61}$$

由定理 4.24 及 (4.60) 知

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}) &\xrightarrow{i_*} H^0(X,\mathcal{L}^0) \xrightarrow{d_{0*}} H^0(X,k_1) \\ &\xrightarrow{\delta_*} H^1(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{i_*} H^1(X,\mathcal{L}^0) \xrightarrow{d_{0*}} \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\xrightarrow{\delta_*} H^s(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{i_*} H^s(X,\mathcal{L}^0) \xrightarrow{d_{0*}} H^s(X,k_1) \\ &\xrightarrow{\delta_*} H^{s+1}(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{i_*} H^{s+1}(X,\mathcal{L}^0). \end{aligned} \tag{4.62}$$

由于 $\mathcal{L}^0$ 是零调层, 故 $H^1(X, \mathcal{L}^0) = 0$.

$$H^1(X,\mathcal{F}) \equiv H^0(X,k_1)/d_{0*}(H^0(X,\mathcal{L}^0)). \tag{4.63}$$

由 (4.59), 我们有截影群复形

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{i_*} \Gamma(X,\mathcal{L}^0) \xrightarrow{d_{0*}} \Gamma(X,\mathcal{L}^1) \xrightarrow{d_{1*}} \Gamma(X,\mathcal{L}^2) \longrightarrow \cdots \tag{4.64}$$

及

$$H^1(X,\dot{\mathcal{L}}(\mathcal{F})) = \frac{\text{Ker } d_{1*}}{\text{Im } d_{0*}} = \frac{\text{Ker } d_{1*}}{d_{0*}(H^0(X,\mathcal{L}^0))}. \tag{4.65}$$

由于 (4.61) 诱导的 X 上的截影群的复形在 $\mathcal{L}^1$ 处正合, 故 $\text{Ker } d_{1*} = i_*(\Gamma(X, k_1)) = i_*(H^0(X,k_1))$. 由于 i_* 是单射, 比较 (4.63) 及 (4.65), 有

$$H^1(x, \dot{\mathcal{L}}(\mathcal{F})) = H^1(X,\mathcal{F}).$$

在 (4.62) 中, 由于 $\mathcal{L}^0$ 是零调层, $H^s(X,\mathcal{L}^0) = H^{s+1}(X,\mathcal{L}^0) = 0$; $s \in \mathbf{Z}^+$, 故

$$H^s(X,k_1) = H^{s+1}(X,\mathcal{F}); \quad \forall s \in \mathbf{Z}^+. \tag{4.66}$$

由 (4.61), 我们得到截影群的复形

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, k_1) \xrightarrow{i_*} \Gamma(X, \mathcal{L}^1) \xrightarrow{d_{1*}} \Gamma(X, \mathcal{L}^2) \xrightarrow{d_{2*}} \cdots . \tag{4.67}$$

比较 (4.64) 及 (4.67), 知

$$H^s(X, \dot{\mathcal{L}}(k_1)) = H^{s+1}(X, \dot{\mathcal{L}}(\mathcal{F})); \quad s \in \mathbf{Z}^+. \tag{4.68}$$

故由 (4.66), (4.68) 及归纳假设可知

$$H^l(X, \mathcal{F}) = H^{l-1}(X, k_1) = H^{l-1}(X, \dot{\mathcal{L}}(k_1)) = H^l(X, \dot{\mathcal{L}}(\mathcal{F})); \quad l-1 \in \mathbf{Z}^+.$$

定理得证. □

定义 4.27 令 X 是拓扑空间, $(\mathcal{F}, \pi, X)$ 及 $(\mathcal{G}, \pi', X)$ 是 X 上的两个交换群层, 我们按下述方法可定义层 $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$: $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \oplus \mathcal{G}_x$, 且其群运算为群的直和的群运算,

$$\pi \oplus \pi' : \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} \longrightarrow X,$$

$$(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})_x = \mathcal{F}_x \oplus \mathcal{G}_x \mapsto x; \quad \forall x \in X.$$

$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ 的拓扑由 $\{\Gamma(U, \mathcal{F}) \oplus \Gamma(U, \mathcal{G}) | \forall U \in \mathcal{U}_X\}$ 作为子基生成, 称 $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ 为 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 的直和.

更进一步, 令 $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ 是拓扑空间 X 上的群族, I 是指标集, 则我们可类似定义 $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ 的直积,

$$\mathcal{F} := \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i.$$

这里 $\mathcal{F}_x := \prod_{i \in I} (\mathcal{F}_i)_x$, $\pi : \mathcal{F} \longrightarrow X$ 由 $\pi(\mathcal{F}_x) = x$ 给出, $\mathcal{F}$ 的拓扑由所有

$$\{p_i^{-1}(A_i) | A_i \text{ 是 } \mathcal{F}_i \text{ 的开集 } \mathcal{F}_i,\ i \in I\}$$

作为子基生成, 这里 $p_i : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_i$ 是投影同态. 对于 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{G}$ 的直和, $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \in (\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})_x$ 等价于 $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_x$ 且 $\mathbf{g} \in \mathcal{G}_x$, 对于直积 $\mathcal{F} = \prod_{i \in I} \mathcal{F}_i$, $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_i) \in \mathcal{F}_x$ 等价于每个 $\mathbf{f}_i \in (\mathcal{F}_i)_x$.

定义 4.28 令 X 是拓扑空间, G 是 X 的局部闭集, 也就是, $\forall x \in G$, 存在 $U \in \mathcal{U}_X$ 满足 $G \cap U = U \cap F$, 这里 F 是 X 的闭集, 如果 $\mathcal{F}$ 是 G 上的层, $\widetilde{\mathcal{F}|_G}$ 是预层

$$(\widetilde{\mathcal{F}}(W), \rho|_{WV})_{W \in \mathcal{U}_X}$$

所决定的 X 上的层, 这里 $\widetilde{\mathcal{F}}(W) = \Gamma(W \cap G, \mathcal{F})$, ρ_{WV} 是限制同态, 若 $W \cap G = \varnothing$, 定义 $\widetilde{\mathcal{F}}(W) \equiv 0$, 称 $\widetilde{\mathcal{F}|_G}$ 为 $\mathcal{F}|_G$ 的平凡延拓.

定理 4.29　令 $\mathcal{L}$ 是拓扑空间 X 上的松弛层, $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 是 X 的开覆盖, 则

$$H^k(\mathcal{U},\mathcal{L})=0;\quad \forall k\in\mathbf{Z}^+.$$

证明: 令 $i_0,i_1,\cdots,i_k\in I$ 是 I 中的 $k+1$ 个不同指标, 满足 $U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_k}\neq\varnothing$,

$$\mathcal{L}_{i_0\cdots i_k}:=(\widetilde{\mathcal{L}|_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_k}}}),$$

这里 $\sim$ 表示 $\mathcal{L}|_{U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_k}}$ 的平凡延拓. 显然 $\mathcal{L}_{i_0\cdots i_k}$ 仍然是松弛层, 对 $G\in\mathcal{U}_X$,

$$\Gamma(G,\mathcal{L}_{i_0\cdots i_k})\cong\Gamma(G\cap U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_k},\mathcal{L}).$$

令

$$\widetilde{\mathcal{L}}^k=\prod_{i_0,\cdots,i_k}\mathcal{L}_{i_0\cdots i_k},$$

则 $\widetilde{\mathcal{L}}^k$ 是拓扑空间 X 的层, 于是我们有层同态

$$d_k:\widetilde{\mathcal{L}}^k\longrightarrow\widetilde{\mathcal{L}}^{k+1},$$

$$\prod_{i_0,\cdots,i_k}(\mathbf{f}_{i_0\cdots i_k})_x\mapsto\prod_{i_0,\cdots,i_{k+1}}(\mathbf{g}_{i_0\cdots i_{k+1}})_x,$$

这里 $(\mathbf{g}_{i_0\cdots i_{k+1}})_x=\sum\limits_{s=0}^{k+1}(-1)^s(f_{i_0\cdots\widehat{i_s}\cdots i_{k+1}})_x$. 于是有 $\mathcal{L}$ 的复形

$$0\longrightarrow\mathcal{L}\xrightarrow{i}\widetilde{\mathcal{L}}^0\xrightarrow{d_0}\widetilde{\mathcal{L}}^1\xrightarrow{d_1}\widetilde{\mathcal{L}}^2\longrightarrow\cdots\longrightarrow\widetilde{\mathcal{L}}^k\xrightarrow{d_k}\widetilde{\mathcal{L}}^{k+1}\longrightarrow\cdots.\tag{4.69}$$

显然, $d_k\circ d_{k-1}=0,\ k\in\mathbf{Z}^+$, 且 $\operatorname{Ker}d_0=\operatorname{Im}i$. 由于对任意 $x\in X$, $(\widetilde{\mathcal{L}}^0)_x=\prod\limits_{i\in I}(\widetilde{\mathcal{L}}_i)_x$, 故当 $x\in U_i$, $(\mathcal{L}_i)_x=\mathcal{L}_x$, 而当 $x\notin U_i$, $(\widetilde{\mathcal{L}}_i)_x=0_x$. 从而 $i:\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}^0$, $\forall\mathbf{f}\in\mathcal{L}_x$, $i(\mathbf{f}_x)=\prod\limits_{i\in I}(\mathbf{g}_{i\cdot x})$, 这里 $\mathbf{g}_{i\cdot x}=\mathbf{f}_x$, 当 $x\in U_i$; 而 $\mathbf{g}_{i\cdot x}=0_x$, 当 $x\notin U_i$. 故 $i:\mathcal{L}\longrightarrow\mathcal{L}^0$ 是单射. 如果 $\prod\limits_{i\in I}(\mathbf{f}_i)_x\in\mathcal{L}^0_x$, $d_0(\prod\limits_{i\in I}(\mathbf{f}_i)_x)=\prod\limits_{i,j\in I}(\mathbf{g}_{ij})_x$, 这里 $(\mathbf{g}_{ij})_x=(\mathbf{f}_j)_x-(\mathbf{f}_i)_x$, 于是如果 $d_0(\prod\limits_{i\in I}(\mathbf{f}_i)_x)=0$, 则当 $x\in U_i\cap U_j$, $(\mathbf{f}_j)_x=(\mathbf{f}_i)_x$, 从而 $\operatorname{Ker}d_0\equiv\operatorname{Im}i$, 于是序列在 $\widetilde{\mathcal{L}}^0$ 处正合. 现在我们要证明 (4.69) 在 $\widetilde{\mathcal{L}}^k$; $k\in\mathbf{Z}^+$ 处正合, 对任意 $\mathbf{f}_x=\prod\limits_{i_0,\cdots,i_k}(\mathbf{f}_{i_0\cdots i_k})_x\in\widetilde{\mathcal{L}}^k_x$, 且 $d_k(\prod\limits_{i_0,\cdots,i_k}(\mathbf{f}_{i_0\cdot i_k})_x)=0$, 选 $j\in I$ 及

$x \in U_j$, $\mathbf{h} := \prod\limits_{i_0,\cdots,i_{k-1}} (\mathbf{h}_{i_0\cdots i_{k-1}})_x \in \widetilde{\mathcal{L}}_x^{k-1}$, 这里 $(\mathbf{h}_{i_0\cdots i_{k-1}})_x = (\mathbf{f}_{ji_0\cdots i_{k-1}})_x$, 故

$$\begin{aligned} d_{k-1}(\mathbf{h}) &= \prod_{i_0,\cdots,i_k} (\sum_v (-1)^v \mathbf{h}_{i_0\cdots\widehat{i_v}\cdots i_k}) = \prod_{i_0,\cdots,i_k} \left(\sum_{v=0}^{k} (-1)^v (\mathbf{f}_{ji_0\cdots\widehat{i_v}\cdots i_k})_x\right) \\ &= \prod_{i_0,\cdots,i_k} \left(\left(\sum_{v=0}^{k} (-1)^v (\mathbf{f}_{ji_0\cdots\widehat{i_v}\cdots i_k})_x\right) - (\mathbf{f}_{i_0\cdots i_k})_x + (\mathbf{f}_{i_0\cdots i_k})_x\right) \\ &= \prod_{i_0,\cdots,i_k} (\mathbf{f}_{i_0\cdots i_k})_x, \end{aligned}$$

这里最后一个等式成立是因为 $d_k(\mathbf{f}_x) = 0$. 故 (4.69) 是 $\mathcal{L}$ 的解, 将其简记为 $0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \dot{\widetilde{\mathcal{L}}}$.

$$\begin{aligned} \Gamma(X, \widetilde{\mathcal{L}}^k) &= \Gamma(X, \prod_{i_0,\cdots,i_k} \mathcal{L}_{i_0\cdots i_k}) = \prod_{i_0,\cdots,i_k} \Gamma(X, \mathcal{L}_{i_0\cdots i_k}) \\ &= \prod_{i_0,\cdots,i_k} \Gamma(U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_k}, \mathcal{L}), \end{aligned}$$

故 $\Gamma(X, \widetilde{\mathcal{L}}^k)$ 中任意元素均在 $C^k(\mathcal{U}, \mathcal{L})$ 中, 故 (4.69) 诱导的 X 上截影群序列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}) \xrightarrow{i} \Gamma(X, \widetilde{\mathcal{L}}^0) \xrightarrow{d_0} \Gamma(X, \widetilde{\mathcal{L}}^1) \longrightarrow \cdots \\ \longrightarrow \Gamma(X, \widetilde{\mathcal{L}}^k) \xrightarrow{d_k} \Gamma(X, \widetilde{\mathcal{L}}^{k+1}) \longrightarrow \cdots \end{aligned} \tag{4.70}$$

恰是

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{L}) \xrightarrow{i} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{L}) \xrightarrow{d_0} C^2(\mathcal{U}, \mathcal{L}) \longrightarrow \cdots \\ \longrightarrow C^{k+1}(\mathcal{U}, \mathcal{L}) \xrightarrow{d_k} C^{k+2}(\mathcal{U}, \mathcal{L}) \longrightarrow \cdots, \end{aligned}$$

这里 $\mathcal{L}$ 松弛, $\widetilde{\mathcal{L}}^0, \widetilde{\mathcal{L}}^1, \cdots, \widetilde{\mathcal{L}}^k, \cdots$ 也是松弛层, 故 (4.69) 是零调解. 由定理 4.26, (4.69) 给出 X 上的系数在层 $\mathcal{L}$ 上的上同调群,

$$H^k(X, \dot{\widetilde{\mathcal{L}}}) = H^k(X, \mathcal{L}); \quad k \in \mathbf{Z}^+.$$

由于 $\mathcal{L}$ 松弛, 由定理 4.23, $H^k(X, \mathcal{L}) = 0$. 另一方面, $H^k(X, \dot{\mathcal{L}}) = H^k(\mathcal{U}, \mathcal{L})$, 故

$$H^k(\mathcal{U}, \mathcal{L}) \equiv 0; \quad k \in \mathbf{Z}^+. \qquad \square$$

上述定理表明, 若 $\mathcal{L}$ 是松弛层, $H^k(\mathcal{U}, \mathcal{L}) = H^k(X, \mathcal{L})$; $k = 0, 1, 2, \cdots$ 对 X 的任意开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 成立. 下面的 Leray 定理给出系数在一般层 $\mathcal{F}$ 上的这两个上同调群等价的必要条件. J. Leray 是一个伟大的法国数学家, 他是层论的奠基者之一.

定理 4.30 令 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 上的层, $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 是 X 上的局部有限开覆盖, 且相对于层 $\mathcal{F}$ 零调, 则存在同构

$$H^k(\mathcal{U},\mathcal{F})\cong H^k(X,\mathcal{F});\quad k=0,1,2,\cdots,$$

这里覆盖 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 零调是指

$$H^q(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_p},\mathcal{F})=0;\quad 对任意\ q>0,\ 且\ p\geqslant 0.$$

证明: 现在

$$0\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow\widetilde{\mathcal{F}}^0\longrightarrow\cdots\longrightarrow\widetilde{\mathcal{F}}^k\longrightarrow\widetilde{\mathcal{F}}^{k+1}\longrightarrow\cdots\tag{4.71}$$

是类似于 (4.69) 的解. 由于 $\widetilde{\mathcal{F}}^k=\prod\limits_{i_0,\cdots,i_k}\mathcal{F}_{i_0\cdots i_k}$ 且 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 是 X 的局部有限开覆盖, 故

$$\begin{aligned}H^q(X,\widetilde{\mathcal{F}}^k)&=\prod_{i_0,\cdots,i_k}H^q(X,\mathcal{F}_{i_0\cdots i_k})\\&=\prod_{i_0,\cdots,i_k}H^q(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_k},\mathcal{F}).\end{aligned}$$

由定理的假定, $H^q(X,\widetilde{\mathcal{F}}^k)=0,\ \forall q>0$ 及 $k\geqslant 0$, 故 (4.71) 是 $\mathcal{F}$ 的零调解, 且由定理 4.26,

$$H^q(X,\dot{\widetilde{\mathcal{F}}})\equiv H^q(X,\mathcal{F});\quad q>0.$$

从定理 4.29 的证明知, $H^q(X,\dot{\widetilde{\mathcal{F}}})\equiv H^q(\mathcal{U},\mathcal{F})$, 定理得证. □

前面我们已经讨论过环层, 现在我们来介绍环层上的模层.

定义 4.31 令 $(\mathcal{R},\pi,X)$ 是拓扑空间 X 上的环层, 且 $(\mathcal{F},\pi',X)$ 是 X 上的群层, 若对任意 $x\in X$, $\mathcal{F}_x$ 是 $\mathcal{R}_x$-模, 且运算

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\times_{\pi\times\pi'}\mathcal{F}&\longrightarrow\mathcal{F},\\(\mathbf{r},\mathbf{f})&\mapsto\mathbf{r}\cdot\mathbf{f}\end{aligned}$$

是连续映射, 则称 $(\mathcal{F},\pi',X)$ 是 $\mathcal{R}$-**模层**, 这里 $\mathcal{R}\times_{\pi\times\pi'}\mathcal{F}=\{(\mathbf{r},\mathbf{f})|\mathbf{r}\in\mathcal{R},\ \mathbf{f}\in\mathcal{F},\ \pi(\mathbf{r})=\pi'(\mathbf{f})\}$.

有很多模层的例子. 例如, 若令 $\mathcal{E}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的光滑函数芽层, $\mathcal{E}^{p,q}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的光滑 (p,q)-形式芽层, 则 $\mathcal{E}^{p,q}$ 是 $\mathcal{E}$-模层. 另外可将环层 $\mathcal{R}$ 本身看成 $\mathcal{R}$-模层, 则 $\mathcal{R}$ 也是 $\mathcal{R}$-模层, 现在 $m\mathcal{R}=\underbrace{\mathcal{R}\oplus\cdots\oplus\mathcal{R}}_{m\ 次}$ 自然是 $\mathcal{R}$-模层. 假定 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{R}$-模层, $\mathcal{F}'$ 是 $\mathcal{F}$ 的子层, 如果 $\mathcal{F}'$ 也是 $\mathcal{R}$-模层, 则 $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ 也是 $\mathcal{R}$-模层.

定义 4.32 令 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ 是拓扑空间 X 上的两个 $\mathcal{R}$-模层, $\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ 是层同态, 且 $\lambda|_{\mathcal{F}_x} : \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$ 是 $\mathcal{R}_x$-模同态, 则称 λ 是 $\mathcal{R}$-模层同态.

定理 4.33 令 $X = \mathbf{C}^n$ (或 $\mathbf{C}^n$ 中区域), $\mathcal{E}$ 是 X 上的光滑函数芽层, $\mathcal{F}$ 为任意一个 X 上的 $\mathcal{E}$-模, 则 $\mathcal{F}$ 零调.

证明: 首先我们引入 Grothendieck 的典则同态

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \cdots .$$

由于 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{E}$-模层, 则不难验证 $\mathcal{F}^k$; $k = 0, 1, 2, \cdots$ 也是 $\mathcal{E}$-模层, 且由

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{p} k_1 = \mathcal{F}^0/\mathcal{F} \longrightarrow 0$$

可知 $k_1 = \mathcal{F}^0/\mathcal{F}$ 也是 $\mathcal{E}$-模层. 由定理 4.24, 上面短正合列诱导了上同调群的正合列

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{\delta_*} H^0(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{i_*} H^0(X,\mathcal{F}^0) \xrightarrow{p_*} H^0(X,k_1) \\ &\xrightarrow{\delta_*} H^1(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{i_*} H^1(X,\mathcal{F}^0) \xrightarrow{p_*} \cdots \\ &\xrightarrow{\delta_*} H^k(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{i_*} H^k(X,\mathcal{F}^0) \xrightarrow{p_*} H^k(X,k_1) \\ &\xrightarrow{\delta_*} H^{k+1}(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{i_*} H^{k+1}(X,\mathcal{F}^0) \longrightarrow \cdots . \end{aligned} \tag{4.72}$$

由于 $\mathcal{F}^0$ 是松弛层, $H^k(X,\mathcal{F}^0) = H^{k+1}(X,\mathcal{F}^0) = 0$; $k \geqslant 1$, 故 $H^k(X,k_1) = H^{k+1}(X,\mathcal{F})$. 由于 k_1 也是 $\mathcal{E}$-模层, 考虑下列短正合列

$$0 \longrightarrow k_1 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow k_2 \longrightarrow 0.$$

我们仍然有

$$H^k(X,k_1) = H^{k-1}(X,k_2); \quad k-1 > 0,$$

依次类推, 只需证明任意 $\mathcal{E}$-模层 $\mathcal{F}$, $H^1(X,\mathcal{F}) = 0$.

若能证明 $p_* : H^0(X,\mathcal{F}^0) \longrightarrow H^0(X,k_1)$ 是满射, 则

$$H^1(X,\mathcal{F}) = \delta_*(H^0(X,k_1)) = \delta_* \circ p_*(H^0(X,\mathcal{F}^0)) = 0.$$

这里 $p : \mathcal{F} \longrightarrow k_1 = \mathcal{F}^0/\mathcal{F}$ 是满同态. 于是对任意 $s \in H^0(X,k_1) = \Gamma(X,k_1)$, $x \in X$, 取 $U_x \in \mathcal{U}_X$ 和截影 $f_x \in \Gamma(U_x,\mathcal{F}^0)$ 满足 $p_*(f) = r_{X,U_x}(s) = s|_{U_x}$. 现在 $\{U_x\}_{x\in X}$ 是 X 的开覆盖, 由于 X 仿紧, 有 $\{U_x\}_{x\in X}$ 的局部有限加细覆盖 $\{V_i\}_{i\in I}$, 令 $\{\rho_i\}_{i\in I}$ 是从属于 $\{V_i\}_{i\in I}$ 的单位分解, 则 $\rho_i s = p_*(\rho_i f_{x_i})$, 这里 x_i 满足 $V_i \subset U_{x_i}$, $\displaystyle\sum_{i\in I} \rho_i f_{x_i} \in \Gamma(X,\mathcal{F}^0)$, 于是 $p_*\left(\displaystyle\sum_{i\in I} \rho_i f_{x_i}\right) = \displaystyle\sum_{i\in I} \rho_i s = s$, 定理得证. □

我们发现定理的证明仅用到单位分解, 故当 X 是仿紧光滑流形或更一般的满足单位分解定理成立的空间时, 定理仍然成立.

现在我们来讨论 **Dolbeault 上同调定理**, 首先我们来证明一些引理.

引理 4.34 令 G 是 $\mathbf{C}^1$ 中的区域, 其边界 ∂G 是分片光滑的有限长曲线. 如果 $f \in C^\infty(\overline{G})$, 则对任意 $z \in G$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\partial G}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} + \int_G \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{\xi}}d\xi \wedge \overline{d\xi}}{\xi - z}\right). \tag{4.73}$$

证明: 令 $\Omega(\xi, z) = \dfrac{1}{\xi - z}d\xi$, 这个 (1,0)-形式是 $\mathbf{C}^1$ 中区域的 Cauchy 核,

$$d(f(\xi)\Omega(\xi, z)) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{\xi}}d\overline{\xi} \wedge d\xi}{\xi - z}, \quad \text{在 } G\backslash\{z\} \text{ 上}.$$

令 B_ϵ 是以 z 为圆心、半径为 $\epsilon > 0$ 的圆盘, ϵ 充分小, 满足 $B_\epsilon \subset \overline{B}_\epsilon \subset G$. 我们在 $G\backslash\overline{B}_\epsilon$ 上对 $d(f(\xi)\Omega(\xi, z))$ 应用 Stokes 公式,

$$\begin{aligned}\int_{G\backslash\overline{B}_\epsilon}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{\xi}}d\overline{\xi} \wedge d\xi}{\xi - z} &= \int_{\partial G}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} - \int_{\partial B_\epsilon}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} \\ &= \int_{\partial G}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} - \int_{\partial B_\epsilon}\frac{(f(\xi) - f(z))d\xi}{\xi - z} - f(z)\int_{\partial B_\epsilon}\frac{1}{\xi - z}d\xi.\end{aligned}$$

由于 $\displaystyle\int_{\partial B_\epsilon}\frac{1}{\xi - z}d\xi = 2\pi i$, 且 $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0}\int_{\partial B_\epsilon}\frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}d\xi \equiv 0$,

$$\int_G \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{\xi}}d\overline{\xi} \wedge d\xi}{\xi - z} = \lim_{\epsilon \to 0}\int_{G\backslash\overline{B}_\epsilon}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{\xi}}d\overline{\xi} \wedge d\xi}{\xi - z} = \int_{\partial G}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} - 2\pi i f(z).$$

故 (4.73) 成立.

当 f 为 G 上的全纯函数时, (4.73) 右边最后一项为零, 故 (4.73) 给出单复变函数中的 Cauchy 公式. □

由 (4.73), 当 $g \in C^\infty(\overline{G})$, 令

$$u(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{g d\xi \wedge d\overline{\xi}}{\xi - z},$$

我们能证明

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = g(z).$$

首先我们证明 $g(z)$ 有紧支集情形, 令 $-t=\xi-z$, 则

$$\int_G \frac{g(\xi)d\xi\wedge d\overline{\xi}}{\xi-z} = -\int_{G'} \frac{g(z-t)dt\wedge d\overline{t}}{t}.$$

这里 G' 是新参数 t 的定义域, $g(z-t)$ 在 G' 中有紧支集, 我们可以改变积分中的 $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(z)}{\partial \overline{z}} &= -\int_{G'} \frac{\partial g(z-t)}{\partial \overline{z}} t^{-1} dt\wedge d\overline{t} \\ &= \int_G \frac{\partial g(\xi)}{\partial \overline{\xi}} (\xi-z)^{-1} d\xi\wedge d\overline{\xi} = g(z).\end{aligned}$$

最后一个等式成立是由于 g 有紧支集及 (4.73).

当 g 没有紧支集时, 对任意 $z_0\in G$, 选 $V\subset G$, $V\in\mathcal{U}_{z_0}$, 取 $\mathbf{C}$ 上的 C^∞ 函数 ψ, 满足 $\psi|_V\equiv 1$, $\operatorname{Supp}\psi\subset G$.

现在令 $\phi=\psi g+(1-\psi)g$,

$$u_1 := \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{\psi g}{\xi-z} d\xi\wedge d\overline{\xi}$$

及

$$u_2 := \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{(1-\psi)g}{\xi-z} d\xi\wedge d\overline{\xi}.$$

显然 $u=u_1+u_2$, 对 $z\in V$, 由前面的证明

$$\frac{\partial u_1}{\partial \overline{z}} = (\psi g)(z) = g(z)$$

且

$$\frac{\partial u_2}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{(1-\psi)g}{\xi-z} d\xi\wedge d\overline{\xi}\right).$$

由于 $\operatorname{Supp}[(1-\psi)g]\cap V=\varnothing$, 被积函数正则, 故 $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ 可与积分项交换, 但在 $G\backslash V$ 上有

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{(1-\psi(\xi))g(\xi)}{\xi-z} = 0.$$

故 $\dfrac{\partial u_2}{\partial \overline{z}}\equiv 0$. 于是 $\forall z_0\in G$, 存在 $V\in\mathcal{U}_{z_0}$ 满足 $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}}=g(z)$.

引理 4.35 (Dolbeault 引理) 令 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的区域, $\mathcal{O}$ 是全纯函数芽层, $\mathcal{E}^{p,q}$ 是 $C^\infty(p,q)$-形式芽层, 故

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{i} \mathcal{E}^{0,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{0,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{0,2} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{0,3} \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{0,n} \qquad (4.74)$$

是层 $\mathcal{O}$ 的零调解.

证明: 由于对任意 $p \leqslant n$, $\mathcal{E}^{0,p} \cong \binom{n}{p}\mathcal{E}$; 对任意 $p > n$, $\mathcal{E}^{0,p} \equiv 0$, 故所有 $\mathcal{E}^{0,p}$ 均为 $\mathcal{E}$-模层, 由引理 4.34, 所有 $\mathcal{E}^{0,p}$ 为零调层.

由于 $\overline{\partial}\circ\overline{\partial} = 0$, 为证明 (4.74) 正合, 只需证明对任意 $x \in \Omega$, $\mathbf{w}_x \in \mathcal{E}_x^{0,p}$, $p \leqslant n$, 如果 $\overline{\partial}(\mathbf{w}_x) = 0$, 则存在 $\mathbf{b}_x \in \mathcal{E}_x^{0,p}$ 满足 $\overline{\partial}(\mathbf{b}_x) = \mathbf{w}_x$.

现在我们对 $\dim_{\mathbf{C}}\Omega$ 归纳, 当 $\dim_{\mathbf{C}}\Omega = 1$, 这是前面引理的结论, 因为对任意 $\mathbf{w}_x \in \mathcal{E}_x^{0,1}$, 存在 $V \in \mathcal{U}_x$ 满足 w 是 V 上的 $C^\infty(0,1)$-形式, 且 $\mathbf{w}_x = (w)_x$. 考虑 $w = gd\overline{z}$; $g \in C^\infty(\overline{V})$, 取 $u = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_V \dfrac{gd\xi \wedge d\overline{\xi}}{\xi - z}$, 则有 $\overline{\partial}u = w$ 在 V 上成立, 故 $\overline{\partial}(\mathbf{u}_x) = \mathbf{w}_x$.

现在假定引理对 $\dim_{\mathbf{C}}\Omega = n-1$ 成立, 我们想证明对 $\dim_{\mathbf{C}}\Omega = n$ 也成立.

令 $w = d\overline{z}_n \wedge \alpha + \beta$, 这里 α, β 不包含 $d\overline{z}_n$, 令 $\alpha = \sum \alpha_{i_1\cdots i_{p-1}} dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_{p-1}}$, 这里 $\alpha_{i_1\cdots i_{p-1}}$ 是 x 的邻域 $\overline{V}$ 上的 C^∞ 函数, 故存在 C^∞ 函数 $\gamma_{i_1\cdots i_{p-1}}$ 满足

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_n}\gamma_{i_1\cdots i_{p-1}} \equiv \alpha_{i_1\cdots i_{p-1}}.$$

令

$$\gamma = \sum \gamma_{i_1\cdots i_{p-1}} dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_{p-1}},$$

则

$$\overline{\partial}\gamma = d\overline{z}_n \wedge \alpha - \phi,$$

这里 ϕ 不包含 $d\overline{z}_n$. 故

$$w - \overline{\partial}\gamma = \beta + \phi,$$

从而 $w - \overline{\partial}\gamma$ 不包含 $d\overline{z}_n$, 且 $\overline{\partial}(w - \overline{\partial}\gamma) = 0$, 故 $w - \overline{\partial}\gamma$ 对 z_n 全纯. 将 z_n 看成参数, 由归纳假定, 存在 V 上的 $C^\infty(0,p)$-形式 η 满足

$$\overline{\partial}\eta = w - \overline{\partial}\gamma$$

且 η 对 z_n 全纯, 于是 $w = \overline{\partial}\eta + \overline{\partial}\gamma = \overline{\partial}(\eta + \gamma)$, 故对任意的 $x \in \Omega$, (4.74) 在 $\mathcal{E}^{0,p}$ 处正合. □

定理 4.36

$$H^p(\Omega, \mathcal{O}) \cong H^p(\Gamma(\Omega, \mathcal{E}^{0,\cdot})); \quad p > 0,$$

这里 $H^p(\Gamma(\Omega, \mathcal{E}^{0,\cdot}))$ 是由解 (4.74) 诱导的上同调群.

定理 4.36 可由引理 4.35 及定理 4.24 给出.

推论 4.37 若 Ω 是复流形, 我们有

$$H^p(\Omega, \mathcal{O}) \cong H^p(\Gamma(\Omega, \mathcal{E}^{0,\cdot})); \quad p > 0.$$

现在我们继续研究除法问题, 前面我们仅给出除法问题当 $n=2$ 时的证明. 令 $\mathcal{R}=\mathbb{C}\{z_1,\cdots,z_n\}$, 我们引入 $\mathcal{R}$-模正合列

$$0\longrightarrow\binom{n}{n}\mathcal{R}\longrightarrow\binom{n}{n-1}\mathcal{R}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\binom{n}{1}\mathcal{R}\longrightarrow\sum_{v=1}^{n}z_v\mathcal{R}\longrightarrow 0.$$

类似, 我们有 $\mathcal{O}$-模正合列

$$0\longrightarrow\binom{n}{n}\mathcal{O}\longrightarrow\binom{n}{n-1}\mathcal{O}\longrightarrow\cdots\longrightarrow\binom{n}{1}\mathcal{O}\longrightarrow\sum_{v=1}^{n}z_v\mathcal{O}\longrightarrow 0.$$

除法问题是指, 是否有

$$\Gamma\left(\Omega,\binom{n}{1}\mathcal{O}\right)\longrightarrow\Gamma\left(\Omega,\sum_{v=1}^{n}z_v\mathcal{O}\right)\longrightarrow 0 \tag{4.75}$$

正合.

定理 4.38　令 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的 Stein 区域, 且 $0\in\Omega$, f 是 Ω 中的全纯函数满足 $f(0)=0$, 则存在 Ω 上的全纯函数 $f_1,\cdots,f_n$ 满足

$$f(z)=\sum_{v=1}^{n}z_v f_v(z).$$

证明: 在 $z=0$ 点, 由于 $f(0)=0$, 故 f 在 0 的某个邻域上有 Taylor 展开 $f(z)=\sum_{v=1}^{n}z_v f_v(z)$. 对 $z\neq 0$, 不失一般性, 假定 $z_1\neq 0$, 则有 $f(z)=z_1\dfrac{f(z)}{z_1}$ 在 z 的邻域定义合理, 于是不仅有 $f\in\Gamma(\Omega,\mathcal{O})$, 还有 $f\in\Gamma\left(\Omega,\sum_{v=1}^{n}z_v\mathcal{O}\right)$. 现在我们

想在 Ω 是 Stein 区域的情形证明 (4.75) 正合. 我们考虑下列层正合列图表

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \searrow & & \nearrow & & \\
 & & & & & K^1 & & & \\
 & & & & \nearrow & & \searrow & & \\
0 \longrightarrow & \binom{n}{n}\mathcal{O} \longrightarrow & & \binom{n}{n-1} & \longrightarrow & & \binom{n}{n-2}\mathcal{O} \longrightarrow \cdots & & \\
 & & & \nearrow & & & & \searrow & \\
 & & \binom{n}{n}\mathcal{O} & & & & & & K^2 \\
 & & \nearrow & & & & & & \searrow \\
 & 0 & & & & & & & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \nearrow & & \\
 & & & K^{n-1} & & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \\
\longrightarrow \binom{n}{2}\mathcal{O} \longrightarrow & & \binom{n}{1}\mathcal{O} \longrightarrow & & & & \sum_{v=1}^{n} z_v\mathcal{O} \longrightarrow 0 \\
 & & \nearrow & & & & \\
 & K^{n-2} & & & & & \\
 & \nearrow & & & & & \\
0 & & & & & &
\end{array}
\tag{4.76}
$$

$0 \longrightarrow \binom{n}{n}\mathcal{O} \longrightarrow \binom{n}{n-1}\mathcal{O} \longrightarrow k^1 \longrightarrow 0$ 的正合可诱导上同调群正合列

$$
\begin{aligned}
&\longrightarrow H^p(\Omega,\mathcal{O}) \longrightarrow H^p\left(\Omega, \tbinom{n}{n-1}\mathcal{O}\right) \longrightarrow H^p(\Omega,k^1) \\
&\longrightarrow H^{p+1}(\Omega,\mathcal{O}) \longrightarrow \cdots .
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

由定理 4.36, $H^p(\Omega,\mathcal{O}) \equiv H^p(\Gamma(\Omega,\mathcal{E}^{0,\cdot}))$, $\forall p > 0$. 由上一节主要结论, 知 $H^p(\Gamma(\Omega,\mathcal{E}^{0,\cdot})) \equiv 0$; $\forall p > 0$, 故 $H^p(\Omega,\mathcal{O}) \equiv 0$; $\forall p > 0$. 对 $\forall m \in \mathbf{Z}^+$,

$$
m\mathcal{O} := \underbrace{\mathcal{O} \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}}_{m\text{ 次}},
$$

$$
H^p(\Gamma(\Omega,m\mathcal{O})) = \underbrace{H^p(\Gamma(\Omega,\mathcal{O})) \oplus \cdots \oplus H^p(\Gamma(\Omega,\mathcal{O}))}_{m\text{ 次}}; \quad p > 0.
$$

故由 (4.77),

$$H^p(\Omega, k^1) = 0; \quad p > 0.$$

事实上, 如果 $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ 是层正合列, 当 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ 零调时, $\mathcal{H}$ 也是零调, 前面已证的 $H^p(\Omega, k^1) = 0$; $p > 0$ 事实上可以推出定理成立. 应用到 (4.76) 中每条斜线上, 知 k^1, $k^2, \cdots$ 均零调. 考虑短正合列

$$0 \longrightarrow k^{n-2} \longrightarrow \binom{n}{1}\mathcal{O} \longrightarrow k^{n-1} = \sum_{v=1}^{n} z_v \mathcal{O} \longrightarrow 0, \tag{4.78}$$

由于 k^{n-2} 零调, 于是

$$0 \longrightarrow \Gamma(\Omega, k^{n-2}) \longrightarrow \Gamma\left(\Omega, \binom{n}{1}\mathcal{O}\right) \longrightarrow \Gamma\left(\Omega, \sum_{v=1}^{n} z_v \mathcal{O}\right) \longrightarrow 0$$

正合. □

第五章　$\overline{\partial}$ 方程解的一致估计

我们在第三章中讨论了 $\overline{\partial}$ 方程的 L^2 估计, 即对超定方程 $\overline{\partial}u = f, \overline{\partial}f = 0$, 若

$$||f||^2_{\Omega,\varphi} < \infty,$$

则存在解且满足自然的 L^2 估计

$$||u||^2_{\Omega,\varphi} \leqslant C||f||^2_{\Omega,\varphi}. \tag{5.1}$$

这里 Ω 是有界拟凸域, φ 是 Ω 上的多次调和函数, C 仅依赖于 Ω 的直径.

本章我们将继续讨论拟凸域上 $\overline{\partial}$ 问题:

我们将证明, 如果 $f \in C^\infty_{(0,1)}(\Omega)$ 满足 $\overline{\partial}f = 0$, 则存在解 $\overline{\partial}u = f$ 满足 L_∞ 估计, 即

$$||u||_\infty \leqslant C||f||_\infty. \tag{5.2}$$

这里 $||\cdot||_\infty = \operatorname*{Sup}_{\Omega}|\cdot|$, C 是独立于 f 的常数, 即 (5.2) 为某种一致估计, 这类估计可方便地应用到一些问题中.

这类问题起源于对 **Cauchy 核**的研究.

令 Ω 是 $\mathbf{C}$ 中的区域, $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Dolbeault 引理隐含着, $\forall z \in \Omega$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega}\frac{\dfrac{\partial f}{\partial\overline{\xi}}}{\xi - z}d\overline{\xi}\wedge d\xi. \tag{5.3}$$

若 $\bar{\partial}f=0$, 上述公式就是单复变中的 Cauchy 公式.

$$\Omega(\xi,z)=\frac{d\xi}{\xi-z}$$

是通常的 Cauchy 核. 分析 (5.3) 的证明, 我们发现

(1) 核 $\Omega(\xi,z)$ 是 $\Omega\backslash\{z\}$ 上的闭 (1,0)-形式.

(2) $\xi=z$ 是核 $\Omega(\xi,z)$ 的具有适当奇性的奇点.

(3) 积分

$$\int_{\partial B_\epsilon}\Omega(\xi,z)$$

是独立于 ϵ 的常数, 这里 B_ϵ 是以 z 为圆心、半径为 ϵ 的圆盘.

如果有 $\Omega(\xi,z)$ 满足 (1)—(3), 则 (5.3) 不依赖 $\Omega(\xi,z)$ 的具体表达式而成立. 注意到 (5.3) 右边第一项对 z 全纯, 令 $g=\dfrac{\partial f}{\partial\bar{\xi}}$, 则

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Omega\frac{g(\xi)d\bar{\xi}\wedge d\xi}{\xi-z}\right)=g(z),\quad\forall z\in\Omega. \tag{5.4}$$

换句话说,

$$u=\frac{-1}{2\pi i}\int_\Omega\frac{g(\xi)}{\xi-z}d\bar{\xi}\wedge d\xi \tag{5.5}$$

为 $\bar{\partial}$ 方程

$$\bar{\partial}u=gd\bar{z}$$

的一个解.

我们得到的 $\bar{\partial}$ 方程的解由核的积分表示 (5.4) 给出. 由于

$$\int_\Omega\left|\frac{d\bar{\xi}\wedge d\xi}{\xi-z}\right|<C,\quad\forall z\in\Omega, \tag{5.6}$$

我们可以立刻得到一致估计.

因此, 为从 (5.3) 得到 $\bar{\partial}$ 方程解的积分表示, 以及解的一致估计, 只需构造核 $\Omega(\xi,z)$ 满足 (1)—(3), 且

(4) $\Omega(\xi,z)$ 对 z 全纯.

在 $n>1$ 时, 我们同样希望找到满足 (1)—(4) 的核, 从而可以得到 $\bar{\partial}$ 方程的积分表示解. 通常的工具是 Bochner-Martinelli 核 (B-M 核). 下面我们给出 B-M 核的起源:

最早起源于 **C** 上的 Newton 位势的经典公式,

$$\frac{1}{2\pi}\Delta\log\ r=\delta_0, \tag{5.7}$$

这里 δ_0 是分布意义下的 δ 函数, 即

$$(\delta_0,\ \varphi) = \varphi(0); \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{C}).$$

公式 (5.7) 也是分布意义下的等式. 对于单个复变量, 有 $\Delta = 4\dfrac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}$, 故 (5.7) 可表示为

$$\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{z}\right) = \delta_0. \tag{5.8}$$

现在我们给出 (5.8) 的详细证明. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{C})$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{C}} \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{z}\right)\varphi &= -\int_{\mathbf{C}} \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\varphi \\ &= -\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbf{C}\setminus B_\epsilon}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\varphi \\ &= -\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbf{C}\setminus B_\epsilon}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\varphi}{z}\right)\end{aligned} \tag{5.9}$$

且

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{C}\setminus B_\epsilon}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\varphi}{z}\right) &= \frac{1}{\pi}\int_{\partial B_\epsilon}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(r)\cdot\frac{1}{z}\varphi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\partial B_\epsilon}\frac{z}{2r}\cdot\frac{\varphi}{z} = \frac{1}{2\pi\epsilon}\int_{\partial B_\epsilon}\varphi.\end{aligned} \tag{5.10}$$

(5.10) 中的第一个和第二个等式成立分别是由于散度公式及 $\dfrac{\partial r}{\partial \overline{z}} = \dfrac{z}{2r}$. 由 (5.9) 及 (5.10), 我们有

$$\int_{\mathbf{C}} \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{1}{z}\right)\varphi = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\epsilon}\int_{\partial B_\epsilon}\varphi = \varphi(0).$$

于是 (5.8) 成立.

由 (5.7) 及 (5.8), 我们自然地猜测 $n > 1$ 时在 Current 意义下

$$\left(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|\xi|\right)^n = \delta_{(0,\cdots,0)}. \tag{5.11}$$

若将原点平移到 z, (5.11) 就变为

$$\left(\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|\xi - z|\right)^n = \delta_z. \tag{5.12}$$

(5.12) 也是 Current 意义下的等式, (5.12) 的左边可表示为

$$-\overline{\partial}_\xi\left(\left(\frac{i}{\pi}\right)^n \partial_\xi \log|\xi - z| \wedge (\partial_\xi\overline{\partial}_\xi \log|\xi - z|)^{n-1}\right). \tag{5.13}$$

由于 $\partial_\xi \log|\xi-z| \wedge (\partial_\xi\overline{\partial}_\xi \log|\xi-z|)^{n-1}$ 在 $\xi=z$ 点的奇性的阶是 $2n-1$, (5.13) 中, 除了第一个 $\overline{\partial}_\xi$ 算子要在分布意义下计算外, 其余的 $\partial_\xi, \overline{\partial}_\xi$ 均可在普通意义下计算 (具体可参见对应无界多次调和函数的 Lelong 数的定义). 现在

$$\begin{aligned}\partial_\xi \log|\xi-z|^2 &= \frac{1}{|\xi-z|^2}\sum_{i=1}^n(\overline{\xi}_i-\overline{z}_i)d\xi_i\\ &= \sum_{i=1}^n g_i(\xi,z)d\xi_i,\end{aligned}$$

这里 $g_i(\xi,z)=|\xi-z|^{-2}(\overline{\xi}_i-\overline{z}_i);\ i=1,\cdots,n.$

$$\overline{\partial}_\xi\partial_\xi \log|\xi-z|^2 = \sum_{i=1}^n \overline{\partial}_\xi g_i(\xi,z)\wedge d\xi_i$$

且

$$\begin{aligned}&\partial_\xi \log|\xi-z|^2\wedge(\overline{\partial}_\xi\partial_\xi\log|\xi-z|^2)^{n-1}\\ =&(n-1)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}g_i\overline{\partial}_\xi g_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\overline{\partial}_\xi g_i}\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}_\xi g_n\right)\\ &\wedge d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n.\end{aligned} \tag{5.14}$$

令

$$\Omega(\xi,z)=\left(\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}g_i\overline{\partial}_\xi g_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\overline{\partial}_\xi g_i}\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}_\xi g_n\right)\wedge d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n, \tag{5.15}$$

这里 $\widehat{\overline{\partial}_\xi g_i}$ 表示略去 $\overline{\partial}_\xi g_i$. 比较 (5.14) 及 (5.15), 知

$$\Omega(\xi,z)=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(n-1)!}(\partial_\xi\log|\xi-z|^2\wedge(\overline{\partial}_\xi\partial_\xi\log|\xi-z|^2)^{n-1})d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n \tag{5.16}$$

且

$$K_{B-M}(\xi,z)=\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n(n-1)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\Omega(\xi,z)=C_0\Omega(\xi,z) \tag{5.17}$$

满足

$$\overline{\partial}_\xi K_{B-M}=\delta_{(0,\cdots,0)}.$$

这里 $C_0=\left(\dfrac{1}{2\pi i}\right)^n(n-1)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, 称 $K_{B-M}(\xi,z)$ 为 **Bochner-Martinelli 核**.

下面的定理是 (5.3) 的自然推广.

定理 5.1 (Bochner–Martinelli)　令 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的区域, ∂D 是分片 C^1 的, 如果 $f \in C^\infty(\overline{D})$, 则

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\xi) K_{B-M}(\xi, z) - \int_D \overline{\partial} f(\xi) \wedge K_{B-M}(\xi, z). \tag{5.18}$$

证明: 我们按照证明 (5.3) 的步骤来证明 (5.18), 故只需验证 $K_{B-M}(\xi, z)$ 满足条件 (1)—(3).

条件 (1): $K_{B-M}(\xi, z)$ 在去心区域 $\Omega \backslash \{z\}$ 上是闭形式, 由于 $g_i(\xi, z) = \frac{\overline{\xi}_i - \overline{z}_i}{|\xi - z|^2}$, 故

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - z_i) g_i(\xi, z) = 1,$$

则在 $\Omega \backslash \{z\}$ 上有

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - z_i) \overline{\partial}_\xi g_i(\xi, z) = 0.$$

即 $\{\overline{\partial}_\xi g_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 线性独立, 于是

$$\overline{\partial}_\xi g_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}_\xi g_n = 0.$$

现在

$$\Omega(\xi, z) = \left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} g_i \overline{\partial}_\xi g_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\overline{\partial}_\xi g_i} \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}_\xi g_n \right) \wedge d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n,$$

故在去心区域 $\Omega \backslash \{z\}$ 上

$$\overline{\partial}_\xi \Omega(\xi, z) \equiv 0. \tag{5.19}$$

于是 $K_{B-M}(\xi, z) = C_0 \Omega(\xi, z)$ 在去心区域 $\Omega \backslash \{z\}$ 上是闭形式.

条件 (2): 从 $K_{B-M}(\xi, z)$ 或 $\Omega(\xi, z)$ 的表达式可以看出, 它们在 $\xi = z$ 点的奇性的阶是 $2n-1$, 由于 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的有界区域, 故

$$\int_D |K_{B-M}(\xi, z)| < +\infty. \tag{5.20}$$

条件 (3): 令 $B_\epsilon(z)$ 是复 n 维, 以 z 为球心、半径为 ϵ 的球, 只需验证

$$\int_{\partial B_\epsilon(z)} K_{B-M}(\xi, z) = 1.$$

由于

$$\partial_\xi \log |\xi - z|^2 = \frac{1}{|\xi - z|^2} \partial_\xi |\xi - z|^2,$$

$$\overline{\partial}_\xi \partial_\xi \log|\xi - z|^2 = \frac{1}{|\xi - z|^2}\overline{\partial}_\xi \partial_\xi |\xi - z|^2 - \frac{\overline{\partial}_\xi |\xi - z|^2 \wedge \partial_\xi |\xi - z|^2}{|\xi - z|^4}.$$

故

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial B_\epsilon(z)} \partial_\xi \log|\xi - z|^2 \wedge \left(\overline{\partial}_\xi \partial_\xi \log|\xi - z|^2\right)^{n-1} \\
&= \int_{\partial B_\epsilon(z)} \frac{1}{|\xi - z|^{2n}} \partial_\xi |\xi - z|^2 \wedge \left(\overline{\partial}_\xi \partial_\xi |\xi - z|^2\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{\epsilon^{2n}} \int_{\partial B_\epsilon(z)} \partial_\xi |\xi - z|^2 \wedge \left(\overline{\partial}_\xi \partial_\xi |\xi - z|^2\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{\epsilon^{2n}} \int_{B_\epsilon(z)} \left(\overline{\partial}_\xi \partial_\xi |\xi - z|^2\right)^{n} \\
&= \frac{1}{\epsilon^{2n}} \int_{B_\epsilon(z)} \left(\sum_{i=1}^n d\overline{\xi}_i \wedge d\xi_n\right)^n = (2\pi i)^n.
\end{aligned}$$

由 (5.17) 知 K_{B-M} 满足条件 (3). □

现在我们完成了 Bochner-Martinelli 公式 (5.18) 的证明, 但上述公式不能用来解决 $\overline{\partial}$ 方程. 如果想用这种类型的公式解决 $\overline{\partial}$ 方程, 我们需要当 $\xi \in \partial D$ 时, $K_{B-M}(\xi, z)$ 对 z 全纯. 但 $K_{B-M}(\xi, z)$ 并不满足我们需要的条件. 观察

$$K_{B-M}(\xi, z)\ (\Omega(\xi, z))$$

可知

$$1 = \sum_{i=1}^n (\xi_i - z_i) g_i(\xi, z) = \sum_{i=1}^n (\xi_i - z_i) \frac{\overline{\xi}_i - \overline{z}_i}{|\xi - z|^2}. \tag{5.21}$$

在 (5.21) 中, $g_i(\xi, z);\ i = 1, \cdots, n$ 不是关于 z 的全纯函数, 这是

$$K_{B-M}(\xi, z)$$

不能对 z 全纯的主要因素. 如果我们能找到类似 (5.21) 中 1 的分解, 且 $g_i(\xi, z); i = 1, \cdots, n$ 均对 z 全纯, 则 $\overline{\partial}$ 方程解的积分表示问题即可解决.

我们将使用除法问题 (第二 Cousin 问题), 及 D 强拟凸的假定来构造需要的 1 的分解.

令 $D := \{z \in \mathbf{C}^n | \rho < 0\}$ 是有界强拟凸域, 即 $\rho \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $d\rho|_{\partial\Omega} \neq 0$, 且 ρ 是 ∂D 上的强多次调和函数. 因此当 $\xi \in \partial D$ 且 $z \in \Omega$ 充分靠近 ξ 时, 由 Taylor 展开

$$\begin{aligned}
\rho(z) = \rho(\xi) &+ \sum_{i=1}^n \rho_i(\xi)(z_i - \xi_i) + \sum_{i=1}^n \overline{\rho_i(\xi)}(\overline{z_i - \xi_i}) \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \left(\rho_{ij}(\xi)(z_i - \xi_i)(z_j - \xi_j) + \overline{\rho_{ij}}(\overline{z_i - \xi_i})(\overline{z_j - \xi_j})\right)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\rho_{i\bar{j}}(\xi)(z_i-\xi_i)(\overline{z_j-\xi_j})+o(|\xi-z|^2)$$
$$=\rho(\xi)-2\mathrm{Re}\,F(\xi,z)+\sum_{i,j=1}^{n}\rho_{i\bar{j}}(\xi)(z_i-\xi_i)(\overline{z}_j-\overline{\xi}_j)+o(|\xi-z|^2)$$
$$\geqslant\rho(\xi)-2\mathrm{Re}\,F(\xi,z)+\lambda_0|\xi-z|^2+o(|\xi-z|^2).$$

这里

$$\rho_i(\xi)=\frac{\partial\rho}{\partial z_i}(\xi),\ \rho_{ij}=\frac{\partial^2\rho}{\partial z_i\partial z_j}(\xi),\ \rho_{i\bar{j}}=\frac{\partial^2\rho}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}(\xi),$$

称

$$F(\xi,z)=-\sum_{i=1}^{n}\rho_i(\xi)(z_i-\xi_i)-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\rho_{ij}(\xi)(z_i-\xi_i)(z_j-\xi_j)\tag{5.22}$$

为 **Levi 多项式**, 由于 ρ 在 ∂D 的邻域上强多次调和, 且 ∂D 紧, 故可取 $\lambda_0>0$,

$$\sum_{i,j=1}^{n}\rho_{i\bar{j}}(\xi)(z_i-\xi_i)(\overline{z}_i-\overline{\xi}_i)\geqslant\lambda_0|\xi-z|^2,\quad\forall\xi\in\partial D.$$

当 z 充分靠近 ξ 时, 适当缩小 λ_0, 有

$$\rho(z)\geqslant\rho(\xi)-2\mathrm{Re}\,F(\xi,z)+\lambda_0|\xi-z|^2.$$

由于 $\rho(z)<0;\ z\in D$ 且 $\rho(\xi)=0;\ \xi\in\partial D$, 故

$$2\mathrm{Re}\,F(\xi,z)\geqslant\lambda_0|\xi-z|^2>0.\tag{5.23}$$

(5.23) 隐含当 $\xi\in\partial D$ 且 z 充分靠近 ξ 时, $F(\xi,z)\neq0$, 于是有全纯函数 $F(\xi,z)$, $F(\xi,\xi)=0;\ \xi\in\partial D$ 且 $F(\xi,z)\neq0;\ \xi\in\partial D,\ z\in D$. 现在选取 C^∞ 函数 h, 满足 $\mathrm{Supp}\,h\subset U$, $h|_V\equiv1$, 这里 U 是 $\xi\in\partial D$ 的小邻域, 选 V 为 $\xi\in\partial D$ 的更小邻域, 满足 $V\subset\overline{V}\subset U$. 令 $\tilde{\rho}=\rho-\epsilon h$, 当 ϵ 充分小时, 在 $\tilde{\rho}$ 的零点处, 有

$$\left(\frac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}\right)=\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}\right)-\epsilon\left(\frac{\partial^2 h}{\partial z_i\partial\overline{z}_j}\right)\geqslant C_1I,$$

这里 C_1 是正常数, I 是 $n\times n$ 单位矩阵.

令 $\tilde{D}=\{z\in\mathbf{C}^n|\tilde{\rho}<0\}$, 则 $D\subset\tilde{D}$, 这里 $\tilde{D}$ 仍然是强拟凸域. 现在我们在 $\tilde{D}$ 上解如下的第二 Cousin 问题, 则在 $\tilde{D}$ 上有 $\Phi(\xi,z)$, 它在 ξ 的某邻域上与 $F(\xi,z)$ 有相同零点, 在 $\tilde{D}$ 的其他部分无零点. 故存在关于 z 的非零全纯函数 $H(\xi,z)$, 在 ξ 的邻域上, 有

$$\Phi(\xi,z)=H(\xi,z)F(\xi,z).$$

特别的, 当 $z \in D$, $\xi \in \partial D$ 时,

$$\Phi(\xi, z) \neq 0.$$

对 $\Phi(\xi, z)$ 解除法问题, 知存在 $\tilde{D}$ 上全纯函数 $P_1(\xi, z), \cdots, P_n(\xi, z)$ 满足

$$\Phi(\xi, z) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - z_i) P_i(\xi, z).$$

由于在 $\xi \in \partial D$ 的某邻域上, $\Phi(\xi, z)$ 与 $F(\xi, z)$ 仅差一个无零点全纯函数因子, 且在下面讨论核的估计时, 奇性只发生在 $z = \xi$. 所以为简单起见, 我们可用 $F(\xi, z)$ 代替 $\Phi(\xi, z)$ (见图 5.1), 也就是说, 假定它们在 $\xi \in \partial D$ 附近有相同的零点分布, 在 D 的内部无零点. 现在

$$F(\xi, z) = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - z_i) \cdot P_i(\xi, z),$$

故

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{P_i(\xi, z)}{F(\xi, z)} (\xi_i - z_i) = 1 \tag{5.24}$$

且

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(\xi, z)(\xi_i - z_i) = 1. \tag{5.25}$$

因此, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - z_i) \left(\lambda g_i + (1 - \lambda) \frac{P_i(\xi, z)}{F(\xi, z)} \right) = 1. \tag{5.26}$$

Grauert-Lieb 首先考虑 (5.26), 且构造 $\lambda(\xi, z)$, 利用

$$\lambda(\xi, z) g_i(\xi, z) + (1 - \lambda(\xi, z)) \frac{P_i(\xi, z)}{F(\xi, z)}$$

得到 $\bar{\partial}$ 方程解的基本核.

几乎在同一时间 (1969, 1970), Henkin 考虑在 (5.1) 中加入参数 λ 来构造基本核, 也就是现在的 **Henkin 核**. 现在我们介绍他的方法: 令

$$G_i(\lambda, \xi, z) = \lambda g_i(\xi, z) + (1 - \lambda) \frac{P_i(\xi, z)}{F(\xi, z)}, \tag{5.27}$$

固定 $z \in \Omega$, 视 $(\xi, \lambda) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{R}$ 为变量, 由于 $\sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - z_i) G_i = 1$, 故

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{\partial}_\xi G_i + d_\lambda G_i)(\xi_i - z_i) = 0.$$

定义 $d := d_\lambda + d_\xi = d_\lambda + \partial_\xi + \bar\partial_\xi$, 由上式可知:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - z_i)(dG_i - \partial_\xi G_i) = 0,\\
&\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - z_i)dG_i = 0 \ (\mathrm{mod}\ d\xi_1, \cdots, d\xi_n),\\
&dG_1 \wedge \cdots \wedge dG_n = 0 \ (\mathrm{mod}\ d\xi_1, \cdots, d\xi_n).
\end{aligned} \tag{5.28}
$$

现在考虑 $d(f(\xi)\Omega(\lambda,\xi,z))$ 在关于 (ξ,λ) 的区域上的积分, 也就是在由 $[0,1]$ 和 $\partial\Omega$ 生成的柱面, 与底面 $(\lambda = 1, \xi \in \Omega\backslash B_\epsilon)$ 上积分 (见图 5.2). $\Omega(\lambda,\xi,z)$ 的定义将在后面定理证明中给出.

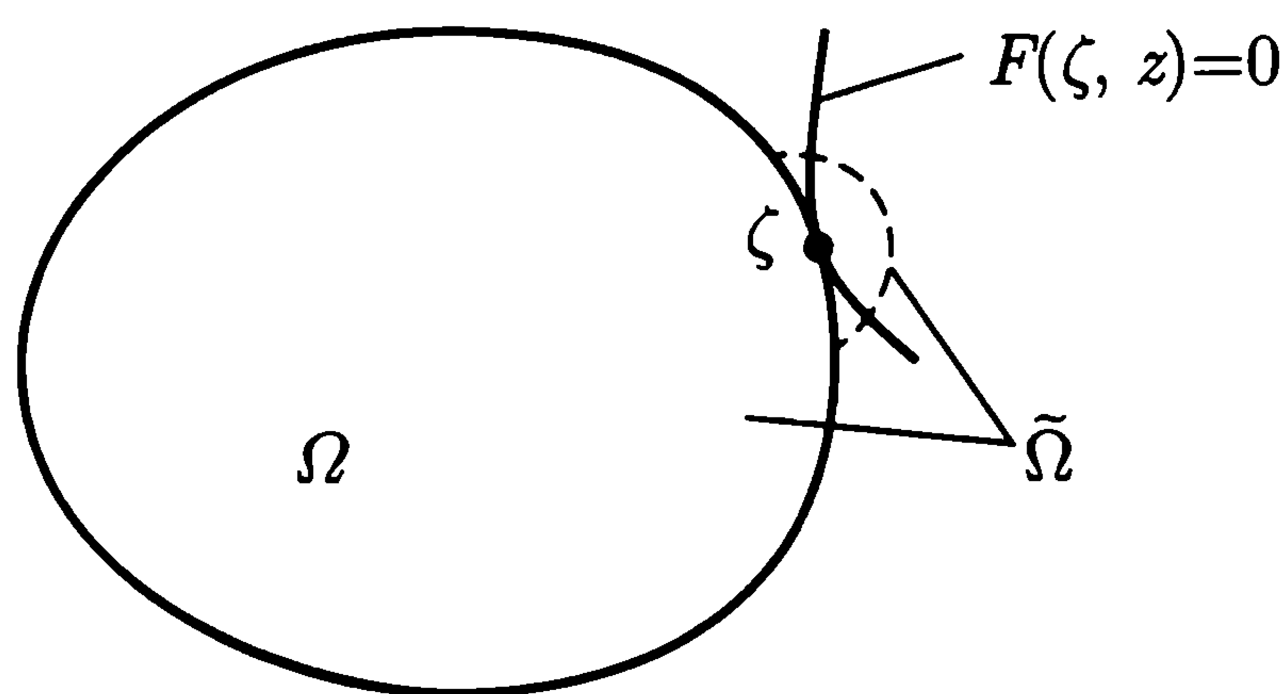


图 5.1

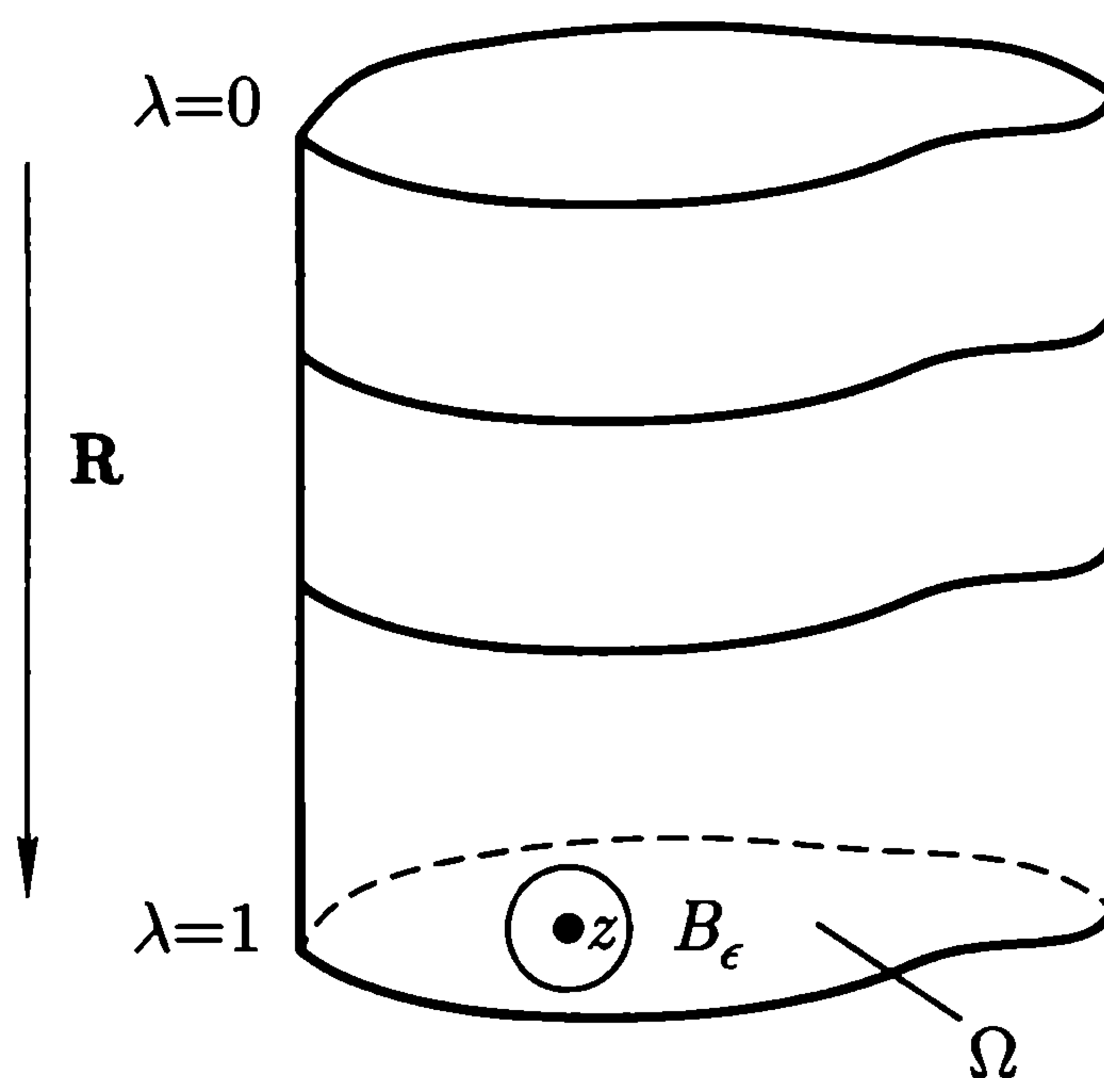


图 5.2

由于 $\Omega(\lambda,\xi,z)$ 是 d 闭的, 令

$$
K(\lambda,\xi,z) = C_0\Omega(\lambda,\xi,z), \tag{5.29}
$$

这里 $C_0 = \left(\dfrac{1}{2\pi i}\right)^n (n-1)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, 则由 (5.28)

$$
d(f(\xi)K(\lambda,\xi,z)) = \bar\partial_\xi f(\xi)K(\lambda,\xi,z).
$$

对上式使用 Stokes 公式, 有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\substack{\lambda\in[0,1]\\ \xi\in\partial\Omega}} \bar\partial_\xi f(\xi) \wedge K(\lambda,\xi,z) - \int_{\Omega\backslash B_\epsilon} \bar\partial_\xi f(\xi) \wedge K(\lambda,\xi,z)\\
&= -\int_{\substack{\lambda=0\\ \xi\in\partial\Omega}} f(\xi)K(\lambda,\xi,z) + \int_{\substack{\lambda=1\\ \xi\in\partial B_\epsilon}} f(\xi)K(\lambda,\xi,z).
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

当 $\lambda = 0$ 时, $G_i = \dfrac{P_i}{F}$, 所以 $K(0,\xi,z)$ 是关于 z 的全纯函数; 当 $\lambda = 1$ 时, $G_i = g_i$,

$K(1,\xi,z)=K_{B-M}(\xi,z)$. 因此

$$\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\substack{\lambda=1\\ \Omega\setminus B_\epsilon}}\overline{\partial}_\xi f(\xi)\wedge K(1,\xi,z)\\
=&\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega\setminus B_\epsilon}\overline{\partial} f(\xi)\wedge K_{B-M}(\xi,z)\\
=&\int_\Omega \overline{\partial} f(\xi)\wedge K_{B-M}(\xi,z),\\
&\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\xi\in\partial B_\epsilon} f(\xi)K(1,\xi,z)\\
=&\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\xi\in\partial B_\epsilon} f(\xi)K_{B-M}(\xi,z)\\
=&\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\xi\in\partial B_\epsilon}(f(\xi)-f(z))K_{B-M}(\xi,z)+f(z)\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\xi\in\partial B_\epsilon}K_{B-M}(\xi,z).
\end{aligned}$$

代入 (5.30), 有

$$\begin{aligned}
&\int_{\substack{\lambda\in[0,1]\\ \xi\in\partial\Omega}}\overline{\partial}_\xi f\wedge K(\lambda,\xi,z)-\int_\Omega\overline{\partial}_\xi f\wedge K_{B-M}(\xi,z)\\
=&-\int_{\xi\in\partial\Omega}f(\xi)K(0,\xi,z)+f(z),
\end{aligned}$$

即

$$f(z)=\int_{\xi\in\partial\Omega}\overline{\partial}_\xi f\wedge\int_0^1 K(\lambda,\xi,z)-\int_\Omega\overline{\partial}_\xi f\wedge K_{B-M}(\xi,z)+\int_{\partial\Omega}f(\xi)K(0,\xi,z).$$

由于 $K(0,\xi,z)$ 对 z 全纯, 若令 $g=\overline{\partial}_\xi f(\xi)$, 则

$$u(z):=\int_{\xi\in\partial\Omega}g\wedge\int_0^1 K(\lambda,\xi,z)d\lambda-\int_\Omega g\wedge K_{B-M}(\xi,z) \tag{5.31}$$

满足

$$\overline{\partial}u=g. \tag{5.32}$$

即 (5.31) 是 $\overline{\partial}$ 方程 (5.32) 的积分公式解, 称其为 Henkin 公式.

利用 (5.31), 我们可以得到 $\overline{\partial}$ 方程解的一致估计.

定理 5.2 (Henkin) *设 Ω 是强拟凸域, $g\in C^\infty_{(0,1)}(\overline{\Omega})$ 满足 $\overline{\partial}g=0$, 则存在 $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$, 满足 $\overline{\partial}u=g$ 且*

$$\|u\|_\infty\leqslant c\|g\|_\infty.$$

证明: 由 (5.31)

$$u(z)=\int_{\xi\in\partial\Omega}g(\xi)\wedge\int_0^1 K(\lambda,\xi,z)d\lambda-\int_\Omega g(\xi)\wedge K_{B-M}(\xi,z),$$

则有 $\overline{\partial}u=g$. 由 (5.20)

$$\left|\int_\Omega g(\xi)\wedge K_{B-M}(\xi,z)\right|<\text{const}\|g\|_\infty.$$

故只需证明

$$\left|\int_0^1 K(\lambda,\xi,z)\right|=|c_0|\cdot\left|\int_0^1\Omega(\lambda,\xi,z)d\lambda\right|$$

对 $\forall\xi\in\partial\Omega$ 及 $\forall z\in\Omega$ 一致有界.

由定义,

$$\Omega(\lambda,\xi,z)=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}G_i dG_1\wedge\cdots\wedge\widehat{dG_i}\wedge\cdots\wedge dG_n\wedge d\xi_1\wedge d\xi_2\wedge\cdots\wedge d\xi_n$$

且

$$dG_i=\overline{\partial}_\xi G_i+\partial_\xi G_i+d_\lambda G_i=\overline{\partial}_\xi G_i+\partial_\xi G_i+\frac{\partial G_i}{\partial\lambda}d\lambda,$$

由于 $\partial_\xi G_i\wedge d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n\equiv 0$, 故

$$\begin{aligned}\Omega(\lambda,\xi,z)&=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}G_i\left(\overline{\partial}_\xi G_1+\frac{\partial G_1}{\partial\lambda}d\lambda\right)\wedge\cdots\wedge\left(\widehat{\overline{\partial}_\xi G_i+\frac{\partial G_i}{\partial\lambda}d\lambda}\right)\\&\quad\wedge\cdots\wedge\left(\overline{\partial}_\xi G_n+\frac{\partial G_n}{\partial\lambda}d\lambda\right)\wedge d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j<i}(-1)^{i+j}G_i\frac{\partial G_j}{\partial\lambda}d\lambda\wedge\overline{\partial}_\xi G_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\overline{\partial}_\xi G_j}\\&\quad\wedge\cdots\wedge\widehat{\overline{\partial}_\xi G_i}\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}_\xi G_n\wedge d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n\\&\quad+\sum_{i=1}^n\sum_{j>i}(-1)^{i+j+1}G_i\frac{\partial G_j}{\partial\lambda}d\lambda\wedge\overline{\partial}_\xi G_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\overline{\partial}_\xi G_i}\\&\quad\wedge\cdots\wedge\widehat{\overline{\partial}_\xi G_j}\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}_\xi G_n\wedge d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n\\&=\left(\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\begin{vmatrix}G_i & G_j\\ \dfrac{\partial G_i}{\partial\lambda} & \dfrac{\partial G_j}{\partial\lambda}\end{vmatrix}d\lambda\wedge\overline{\partial}_\xi G_1\wedge\cdots\wedge\widehat{\overline{\partial}_\xi G_i}\right.\\&\quad\left.\wedge\cdots\wedge\widehat{\overline{\partial}_\xi G_j}\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}_\xi G_n\right)\wedge d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n.\end{aligned}$$

在 $\Omega(\lambda,\xi,z)$ 的展开式中,

$$d\lambda\wedge d\bar\xi_{v_1}\wedge\cdots\wedge d\bar\xi_{v_{n-2}}\wedge d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n,\quad v_1<v_2<\cdots<v_{n-2}$$

前面的系数是行列式

$$D_{v_1\cdots v_{n-2}}=\begin{vmatrix} G_1 & & G_n\\ \dfrac{\partial G_1}{\partial\lambda} & & \dfrac{\partial G_n}{\partial\lambda}\\ \dfrac{\partial G_1}{\partial\bar\xi_{v_1}} & & \dfrac{\partial G_n}{\partial\bar\xi_{v_1}}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial G_1}{\partial\bar\xi_{v_{n-2}}} & \cdots & \dfrac{\partial G_n}{\partial\bar\xi_{v_{n-2}}}\end{vmatrix}.\tag{5.33}$$

现在, 我们来简化 $D_{v_1\cdots v_{n-2}}$:

$$G_i=\lambda g_i+(1-\lambda)\frac{P_i}{F}=\lambda\frac{\bar\xi_i-\bar z_i}{|\xi-z|^2}+(1-\lambda)\frac{P_i}{F},$$
$$\frac{\partial G_i}{\partial\lambda}=\frac{\bar\xi_i-\bar z_i}{|\xi-z|^2}-\frac{P_i}{F},$$

故

$$G_i+(1-\lambda)\frac{\partial G_i}{\partial\lambda}=\frac{\bar\xi_i-\bar z_i}{|\xi-z|^2},\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

从而 $D_{v_1\cdots v_{n-2}}$ 化为

$$D_{v_1\cdots v_n}=-\begin{vmatrix} \dfrac{\bar\xi_1-\bar z_1}{|\xi-z|^2} & \cdots & \dfrac{\bar\xi_n-\bar z_n}{|\xi-z|^2}\\ \dfrac{P_1}{F} & & \dfrac{P_n}{F}\\ \dfrac{\partial G_1}{\partial\bar\xi_{v_1}} & & \dfrac{\partial G_n}{\partial\bar\xi_{v_1}}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial G_1}{\partial\bar\xi_{v_{n-2}}} & & \dfrac{\partial G_n}{\partial\bar\xi_{v_{n-2}}}\end{vmatrix}.\tag{5.34}$$

更进一步, 考虑到

$$\frac{\partial G_i}{\partial\bar\xi_v}=\frac{\lambda}{|\xi-z|^2}\frac{\partial}{\partial\bar\xi_v}(\bar\xi_i-\bar z_i)-\lambda\frac{\bar\xi_i-\bar z_i}{|\xi-z|^4}\frac{\partial}{\partial\bar\xi_v}|\xi-z|^2$$
$$+\frac{(1-\lambda)}{F}\frac{\partial P_i}{\partial\bar\xi_v}-\frac{(1-\lambda)P_i}{F^2}\frac{\partial F}{\partial\bar\xi_v},$$

且 $\dfrac{\partial G_i}{\partial \bar\xi_v}$ 的表达式的第二及最后一项分别有因子 $\dfrac{\bar\xi_i - \bar z_i}{|\xi - z|^2}$ 及 $\dfrac{P_i}{F}$; $1 \leqslant i \leqslant n$, 故它们不影响 $D_{v_1\cdots v_{n-2}}$ 的值, 从而

$$D_{v_1\cdots v_{n-2}} = (-1)\begin{vmatrix} \dfrac{\bar\xi_1-\bar z_1}{|\xi-z|^2} & & \dfrac{\bar\xi_n-\bar z_n}{|\xi-z|^2} \\ \dfrac{P_1}{F} & & \dfrac{P_n}{F} \\ \dfrac{\lambda}{|\xi-z|^2}\delta^1_{v_1}+\dfrac{1-\lambda}{F}\dfrac{\partial P_1}{\partial\bar\xi_{v_1}} & & \dfrac{\lambda}{|\xi-z|^2}\delta^n_{v_1}+\dfrac{1-\lambda}{F}\dfrac{\partial P_n}{\partial\bar\xi_{v_1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\lambda}{|\xi-z|^2}\delta^1_{v_{n-2}}+\dfrac{1-\lambda}{F}\dfrac{\partial P_1}{\partial\bar\xi_{v_{n-2}}} & & \dfrac{\lambda}{|\xi-z|^2}\delta^n_{v_{n-2}}+\dfrac{1-\lambda}{F}\dfrac{\partial P_n}{\partial\bar\xi_{v_{n-2}}} \end{vmatrix},$$

这里 δ^i_j 是通常的 Kronecker 符号.

我们只需证明上述行列式的积分对 $\xi \in \partial\Omega$ 及 $z \in \Omega$ 一致有界. 注意到行列式 $D_{v_1\cdots v_{n-2}}$ 的奇点仅出现在 $z = \xi \in \partial\Omega$ 处, 积分是否一致有界, 完全取决于 z 趋向于 $\xi \in \partial\Omega$ 时积分的行为.

由于 $|F| \geqslant c|\xi - z|^2$, 这里 c 是正常数, 故 $D_{v_1\cdots v_{n-2}}$ 在 $\xi = z$ 的奇性的阶在第一行为 1, 其余均为 2, 所以关键是要证明

$$\int_{\xi\in\partial\Omega} \frac{1}{|\xi - z|^{1+2(n-2)}|F|} = \int_{\xi\in\partial\Omega} \frac{1}{|\xi - z|^{2n-3}|F|} \tag{5.35}$$

对 $z \in \Omega$ 一致有界.

当 $z \to \xi$ 时,

$$F(\xi, z) = \sum_i \rho_i(\xi)(\xi_i - z_i) - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\rho_{ij}(\xi)(z_i - \xi_i)(z_j - \xi_j),$$

$$d_\xi F(\xi, z)|_{\xi=z} = \sum_i \rho_i(\xi)d\xi_i = \sum_i \frac{\partial\rho}{\partial\xi_i}d\xi_i = \partial\rho.$$

现在选取 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ 点新的局部坐标, 满足 $\mathrm{Re}\ \xi_1 = \rho(\xi)$, 即 $\rho = \dfrac{\xi_1 + \bar\xi_1}{2}$, 于是

$$\partial\rho = \frac{1}{2}\partial\xi_1 = \frac{1}{2}d\xi_1 = \frac{1}{2}(d\ \mathrm{Re}\ \xi_1 + i\ d\ \mathrm{Im}\ \xi_1)$$

且

$$d_\xi \mathrm{Im}\ F(\xi, z)|_{z=\xi} = \mathrm{Im}(d_\xi F(\xi, z)|_{z=\xi}) = \mathrm{Im}\ \partial\rho.$$

由上述两式可知

$$d_\xi(\mathrm{Im}\ \xi_1) = 2\mathrm{Im}\ \partial\rho = 2d_\xi \mathrm{Im}\ F(\xi, z)|_{z=\xi},$$

因此可用局部坐标

$$(\text{Im } F, \text{Re } \xi_2, \text{Im } \xi_2, \cdots, \text{Re } \xi_n, \text{Im } \xi_n)$$

代替

$$(\text{Im } \xi_1, \text{Re } \xi_2, \text{Im } \xi_2, \cdots, \text{Re } \xi_n, \text{Im } \xi_n).$$

且由 (5.23), $|\text{Re } F| \geqslant \alpha|\xi - z|^2$, 这里 α 是正常数, 且 $|F| \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|\text{Re } F| + |\text{Im } F|)$, 故积分 (5.35) 可由

$$\frac{2\sqrt{2}}{\alpha}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{|\xi - z|^{2n-3}(|\xi - z|^2 + |\text{Im } \xi_1|)}$$

控制.

而上述积分在差一个常数因子意义下等同于

$$\int_{r<1}\frac{dx_1\cdots dx_N}{r^{N-2}(r^2 + |x_1|)};\quad N = 2n - 1. \tag{5.36}$$

故只需验证 (5.36) 有界. 利用球坐标 $x_1 = r\sin\theta_1, \cdots$, 只需估计

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{drd\theta}{r + |\sin\theta|}.$$

存在常数 $k > 0$, 满足在原点附近 $|\sin\theta| \geqslant k\theta$, 而

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{drd\theta}{r + k\theta} = \int_0^{2\pi}(\ln(1 + k\theta) - \ln(k\theta))d\theta < +\infty.$$

于是就证明了定理 5.2. □

第六章　解析簇

本章我们主要探讨定义在 $\mathbf{C}^n$ 中的区域或整个 $\mathbf{C}^n$ 中的一些全纯函数的公共零点的局部性质. 这在很大程度依赖于对全纯函数芽的局部结构的分析. 为此, 我们将证明关于全纯函数芽的 Hilbert 零点定理.

§6.1　全纯函数的局部环

用 ${}_n\mathcal{O}_0=\mathbb{C}\{z_1,\cdots,z_n\}$ 表示在 $\mathbf{C}^n$ 原点附近全纯的函数环. 我们主要讨论

$$\{z\in\mathbf{C}^n|f_1(z)=\cdots=f_k(z)=0\}$$

在 $\mathbf{C}^n$ 原点附近的结构, 这里 $f_1,\cdots,f_k\in{}_n\mathcal{O}_0$.

若 $n=1$, 则问题平凡. 这是因为, 不恒为零的全纯函数的零点是孤立的, 且总可以局部表示为

$$f(z)=z^kg(z);\quad g(0)\neq 0.$$

自然数 k 表示其在点 0 的阶.

若 $n>1$, 问题就复杂了.

对 $f\in{}_n\mathcal{O}_0$, 且 $f(0,\cdots,0)=0$, 若 $f(0,\cdots,0,z_n)$ 不恒为 0, 则称 f 关于 z_n **正则**, 精确地说, 就是 $f(0,\cdots,0,z_n)$ 在复直线 $(0,\cdots,0,\mathbf{C})$ 中 f 有定义的部分不恒为零.

若 f 在原点附近不恒为零, 则存在很多通过原点的复直线, 满足 f 在某一条上的限制不恒为零. 故对原点附近不恒为零的函数 f, 必存在原点附近的线性

坐标变换, 使得 f 关于 z_n 正则. 记 $z'=(z_1,\cdots,z_{n-1})$, $z=(z',z_n)$, $f\in {}_n\mathcal{O}_0$. 若 f 关于 z_n 正则, 且 $f(0,0)=0$, 则有 $f(0,z_n)$ 在 $z_n=0$ 的 Taylor 展开

$$f(0,z_n)=z_n^k\varphi(z_n);\quad \varphi(0)\neq 0,$$

这里 $k\in\mathbf{Z}^+$, 有时称 f 关于 z_n 是 k 阶正则的. 给定充分小的 $z'\neq 0$, $f(z',z_n)$ 的零点一般不同于 $f(0,z_n)$. 对于 $f(0,z_n)$, 当 $k\geqslant 2$ 时, $z_n=0$ 是其 k 重零点, 对于充分小的 z', 虽然 $f(z',z_n)$ 仍有 k 个零点 (记重数), 但一般来说, 它们并不相同.

将 $f(0,z_n)$ 看成是关于单变量 z_n 的全纯函数, 由于其零点孤立, 故存在 $\delta_n>0$, 使其在半径为 δ_n 的闭圆盘 $\overline{\Delta}_{\delta_n}:=\{z_n\in\mathbf{C}\big||z_n|\leqslant\delta_n\}$ 中, 除 $z_n=0$ 外, 无其他零点. 令 $\epsilon=\inf\limits_{|z_n|=\delta_n}|f(0,z_n)|>0$, 由 $f(z',z_n)$ 的连续性, 存在 $\delta_1,\cdots,\delta_{n-1}$, 使得当 $|z_1|<\delta_1,\cdots,|z_{n-1}|<\delta_{n-1}$ 时,

$$|f(z',z_n)-f(0,z_n)|<\epsilon\leqslant|f(0,z_n)| \tag{6.1}$$

在紧集 $\{z_n\in\mathbf{C}\big||z_n|=\delta_n\}$ 上成立. 取定 $|z_i|<\delta_i$; $i=1,\cdots,n-1$. 由单复变 Rouché 定理及 (6.1), $f(z',z_n)$ 与 $f(0,z_n)$ 在 $\Delta_{\delta_n}=\{z_n\in\mathbf{C}\big||z_n|<\delta_n\}$ 中零点个数相同. 也就是说, $f(z',z_n)$ 记重数在 Δ_{δ_n} 中恰有 k 个零点. $f(z',z_n)$ 的几何图像类似于图 6.1. 图 6.1 中 $|z'|<\delta'$ 表示 $|z_1|<\delta_1,\cdots,|z_{n-1}|<\delta_{n-1}$.

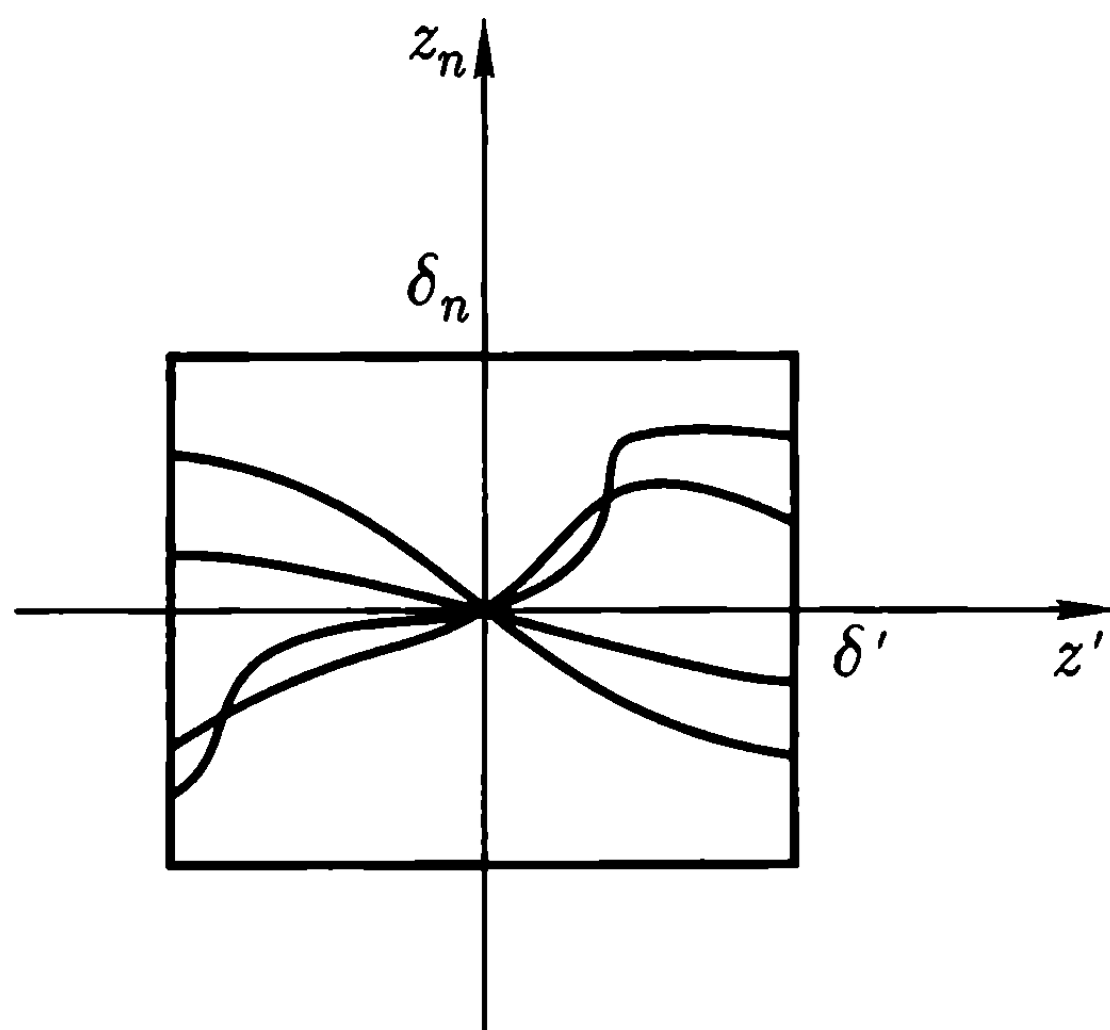


图 6.1

下面的 Weierstrass 预备定理精确地描述了关于 z_n 正则的全纯函数在 $\mathbf{C}^n$ 原点附近的零点分布.

定义 6.1 称 $h\in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 为关于 z_n 的 k 阶 **Weierstrass 多项式**, $k>0$, 若

$$h=z_n^k+a_1(z')z_n^{k-1}+\cdots+a_{k-1}(z')z_n+a_k(z'),$$

这里 $a_i\in {}_{n-1}\mathcal{O}_0$ 且 $a_i(0)=0$; $1\leqslant i\leqslant k$.

定理 6.2 (Weierstrass 预备定理) 令 $f \in {}_n\mathcal{O}_0$ 且 f 关于 z_n 正则, 则在 $\mathbf{C}^n$ 中原点附近有

$$f(z', z_n) = (z_n^k + a_{k-1}(z')z_n^{k-1} + \cdots + a_1(z')z_n + a_0(z'))u(z', z_n), \tag{6.2}$$

这里 $u(0,0) \neq 0$, $a_{k-1}, \cdots, a_1$, $a_0 \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0$ 且 $a_{k-1}(0) = \cdots = a_0(0) = 0$.

证明: 由前面的分析, f 在集合

$$\{(z', z_n) \in \mathbf{C}^n \big| |z_1| < \delta_1, \cdots, |z_{n-1}| < \delta_{n-1},\ |z_n| = \delta_n\}$$

中无零点, 故若 $|z_i| < \delta_i$; $i = 1, \cdots, n-1$, 方程 $f(z', z_n) = 0$ 有 k 个根

$$\varphi_1(z'), \cdots, \varphi_k(z'), \quad |\varphi_i(z')| < \delta_n; \quad i = 1, \cdots, k.$$

对 $l \in \mathbf{Z}^+$,

$$b_l(z') := \sum_{i=1}^k \varphi_i(z')^l = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\delta_n} \frac{\xi^l \dfrac{\partial f}{\partial z_n}(z', \xi)}{f(z', \xi)} d\xi. \tag{6.3}$$

(6.3) 表明 $\sum\limits_{i=1}^k \varphi_i(z')^l$, $l \in \mathbf{Z}^+$ 均为区域 $D_{\delta'} := \{z' \in \mathbf{C}^{n-1} \big| |z_1| < \delta_1, \cdots, |z_{n-1}| < \delta_{n-1}\}$ 上的全纯函数.

现在令

$$\begin{aligned} h(z', z_n) &= \prod_{i=1}^k (z_n - \varphi_i(z')) \\ &= z_n^k + a_{k-1}(z')z_n^{k-1} + \cdots + a_1(z')z_n + a_0(z'), \end{aligned} \tag{6.4}$$

$a_0(z'), \cdots, a_{k-1}(z')$ 是 $\varphi_1(z'), \cdots, \varphi_k(z')$ 的对称多项式. 于是, 由代数中的对称多项式定理, $\{a_0(z'), \cdots, a_{k-1}(z')\}$ 中每一个均可表示为 $\{b_l(z');\ 1 \leqslant l \leqslant k\}$ 的不含常数项的多项式. 例如

$$\begin{aligned} a_{k-1}(z') &= \sum_{i=1}^k \varphi_i(z') = b_1(z'), \\ a_{k-2}(z') &= \sum_{1 \leqslant i, j \leqslant k} \varphi_i(z')\varphi_j(z') \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^k \varphi_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^k \varphi_i^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}(b_1(z')^2 - b_2(z')). \end{aligned}$$

由于 $b_l(z')$; $1 \leqslant l \leqslant k$ 全纯, 知 $a_i(z')$; $i = 0, \cdots, k-1$ 全纯. 且因为 $\varphi_i(0) = 0$; $1 \leqslant i \leqslant k$, 故 $b_l(0) = 0$; $l \in \mathbf{Z}^+$, 因此 $a_i(0) = 0$; $0 \leqslant i \leqslant k-1$.

考虑商 $u = f/h$, 任给 $z' \in D_{\delta'}$, $u(z', z_n)$ 是 Δ_{δ_n} 上的无零点的全纯函数. $\forall \lambda < 1$, 令 M 是 $|f|$ 在

$$\{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n \big| |z_1| \leqslant \lambda\delta_1, \cdots, |z_{n-1}| \leqslant \lambda\delta_{n-1},\ |z_n| = \delta_n\}$$

上的极大值, m 是 $|h|$ 在

$$\{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n \big| |z_1| \leqslant \lambda\delta_1, \cdots, |z_{n-1}| \leqslant \lambda\delta_{n-1},\ |z_n| = \delta_n\}$$

上的极小值, 由单复变全纯函数的极大模原理, 在

$$\{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n \big| |z_1| \leqslant \lambda\delta_1, \cdots, |z_{n-1}| \leqslant \lambda\delta_{n-1},\ |z_n| \leqslant \delta_n\}$$

上, $|u| \leqslant \dfrac{M}{m}$. 由 Riemann 延拓定理, u 在

$$\{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n \big| |z_1| < \lambda\delta_1, \cdots, |z_{n-1}| < \lambda\delta_{n-1},\ |z_n| < \delta_n\}$$

上全纯. 令 λ 趋于 1, 知 u 是

$$\{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbf{C}^n \big| |z_1| < \delta_1, \cdots, |z_{n-1}| < \delta_{n-1},\ |z_n| < \delta_n\}$$

上的全纯函数. □

Weierstrass 预备定理告诉我们, 若 $f \in {}_n\mathcal{O}_0$ 且关于 z_n 正则, 则有 Weierstrass 多项式 h 及无零点全纯函数 u, 使得在 $\mathbf{C}^n$ 原点的某个开邻域上, $f = hu$.

事实上 ${}_n\mathcal{O}_0$ 是 $\mathbf{C}^n$ 原点处全纯函数芽形成的环. 于是 Weierstrass 预备定理表明, 若 $\mathbf{f} \in {}_n\mathcal{O}_0$ 且 $\mathbf{f}$ 关于 z_n 是 k 阶正则的, 则 $\mathbf{f}$ 可分解为 k 阶 Weierstrass 多项式 $\mathbf{h}$ 与 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中某个单位的乘积. 所谓单位就是环 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中的可逆元, 即 $\mathbf{C}^n$ 原点处非零的全纯函数芽. $\mathbf{f}$ 关于 z_n 是 k 阶正则的, 是指存在其代表元 f 关于 z_n 是 k 阶正则的. 类似, $\mathbf{h}$ 是关于 z_n 的 k 阶正则 Weierstrass 多项式, 是指存在代表元 h 是关于 z_n 的 k 阶正则 Weierstrass 多项式.

一个有趣的事实是, 隐函数定理是 Weierstrass 预备定理的直接推论. 这是因为, 若 $\mathbf{f} \in {}_n\mathcal{O}_0$ 关于 z_n 是 1 阶正则的, 必有 $\dfrac{\partial f}{\partial z_n}(0) \neq 0$, 由 Weierstrass 预备定理, 有唯一分解

$$f(z_1, \cdots, z_n) = u(z_1, \cdots, z_n) \cdot (z_n - a_1(z_1, \cdots, z_{n-1})),$$

这里 $\mathbf{u} \in {}_n\mathcal{O}_0$ 是单位且 $\mathbf{a_1} \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0$ 不是单位. 因此, 在原点附近 $f(z_1, \cdots, z_n) = 0$ 等价于 $z_n = a_1(z_1, \cdots, z_{n-1})$.

定理 6.3 (Weierstrass 除法定理) 令 $\mathbf{h} \in {}_n\mathcal{O}_0[z_n]$ 是关于 z_n 的 k 阶正则 Weierstrass 多项式, 则任意 $\mathbf{f} \in {}_n\mathcal{O}_0$ 均可唯一表示为 $\mathbf{f} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{r}$, 这里 $\mathbf{g} \in {}_n\mathcal{O}_0$, $\mathbf{r} \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 是阶小于 k 的多项式. 更进一步, 如果 $\mathbf{f} \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$, 则 $\mathbf{g} \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$.

证明: 分别选取 $\mathbf{f}$ 与 $\mathbf{h}$ 的代表元 f 和 h, 使得它们在开多圆盘 $\Delta(0;r)$ 中全纯. 更进一步, 选取 $\Delta(0;r)$ 中的闭多圆盘 $\overline{\Delta}(0;\delta)$, 使得 $h(z)$ 在

$$\{|z_1| < \delta_1, \cdots, |z_{n-1}| < \delta_{n-1},\ |z_n| = \delta_n\}$$

上恒不为零. 从而

$$g(z_1, \cdots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\delta_n} \frac{f(z_1, \cdots, z_{n-1}, \xi)}{h(z_1, \cdots, z_{n-1}, \xi)} \frac{d\xi}{\xi - z_n}$$

在 $\Delta(0;\delta)$ 上全纯. 更进一步, $r(z) = f(z) - g(z)h(z)$ 在相同的多圆盘上全纯, 且有如下积分表示

$$\begin{aligned}
&r(z_1, \cdots, z_n) \\
=&\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\delta_n} f(z_1, \cdots, z_{n-1}, \xi) \frac{d\xi}{\xi - z_n} \\
&- \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\delta_n} h(z_1, \cdots, z_n) \frac{f(z_1, \cdots, z_{n-1}, \xi)}{h(z_1, \cdots, z_{n-1}, \xi)} \frac{d\xi}{\xi - z_n} \\
=&\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\delta_n} \frac{f(z_1, \cdots, z_{n-1}, \xi)}{h(z_1, \cdots, z_{n-1}, \xi)} \left[\frac{h(z_1, \cdots, z_{n-1}, \xi) - h(z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n)}{\xi - z_n} \right] d\xi.
\end{aligned}$$

由 Weierstrass 多项式的定义, 上式最后一项方括号里的表达式形如

$$\frac{(\xi^k - z_n^k) + a_1(z_1, \cdots, z_{n-1})(\xi^{k-1} - z_n^{k-1}) + \cdots + a_{k-1}(z_1, \cdots, z_n)(\xi - z_n)}{(\xi - z_n)}$$

是关于 z_n 的 $k-1$ 阶多项式. 这是 $r(z)$ 的表达式中唯一会出现 z_n 的项, 从而 $r(z)$ 关于 z_n 至多 $k-1$ 阶, 于是就得到除法公式的存在性.

现在证明唯一性, 若 $\mathbf{f} = \mathbf{g}\mathbf{h} + \mathbf{r} = \mathbf{g}_1\mathbf{h} + \mathbf{r}_1$, 假定上式中出现的芽的代表元在同一个开多圆盘 $\Delta(0;r)$ 上全纯, 则在 $\Delta(0;r)$ 上有

$$r(z) - r_1(z) = h(z) \cdot (g_1(z) - g(z)).$$

类似本章开始时的讨论, 利用 Rouché 定理, 可选取更小的多圆盘 $\Delta(0;\delta)$, 任意固定

$$(z_1, \cdots, z_{n-1}) \in \Delta(0; \delta_1, \cdots, \delta_{n-1}),$$

$h(z_1,\cdots,z_n)$ 在 $|z_n|<\delta_n$ 上恰有 k 个零点. 由于 $r(z)-r_1(z)$ 关于 z_n 的阶至多是 $k-1$, 若它关于 z_n 有 k 个零点, 则必恒为零, 从而 $r(z)-r_1(z)\equiv 0$. 由于 ${}_n\mathcal{O}_0$ 是整环, 故没有零因子, 于是 $g_1(z)-g(z)\equiv 0$, 这就证明了唯一性.

定理最后的结论可由代数中系数在环中的多项式的除法公理得出. □

Weierstrass 的两个定理可帮助我们对环 ${}_n\mathcal{O}_0$ 有更深的认识.

定义 6.4 称 $\mathbf{f}\in {}_n\mathcal{O}_0$ 在 ${}_n\mathcal{O}_0$ **中可约**, 若 $\mathbf{f}=\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2$, 且 $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ 不是 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中的单位; 不然, 则称其在 ${}_n\mathcal{O}_0$ **中不可约**. 称 $\mathbf{f}\in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 在 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ **中可约**, 若 $\mathbf{f}=\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2$, 且 $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ 不是 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 中的单位; 不然, 则称其在 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 中**不可约**.

引理 6.5 Weierstrass 多项式 $\mathbf{h}\in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 在 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中可约当且仅当它在 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 中可约; 如果 $\mathbf{h}$ 不可约, 则它的所有因子在差一个 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 中单位的意义下是 Weierstrass 多项式.

证明: 首先, 假定 $\mathbf{h}$ 在 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中可约, 令 $\mathbf{h}=\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_j\in_n\mathcal{O}_0, j=1,2$ 不是 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中单位. 由于 $\mathbf{h}$ 是关于 z_n 正则的 Weierstrass 多项式, 知 $\mathbf{g}_1$ 与 $\mathbf{g}_2$ 均关于 z_n 正则. 由 Weierstrass 预备定理, $\mathbf{g}_j=\mathbf{u}_j\mathbf{h}_j, j=1,2$, $\mathbf{u}_j\in {}_n\mathcal{O}_0$ 是单位, 且 $\mathbf{h}_j\in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 是 Weierstrass 多项式; 于是 $\mathbf{h}=(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2)(\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2)$. 但由于 $\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2$ 也是 Weierstrass 多项式, Weierstrass 预备定理中的唯一性部分保证 $\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2=\mathbf{1}$ 且 $\mathbf{h}_1\mathbf{h}_2=\mathbf{h}$. 因此 $\mathbf{h}$ 多项式可约, 且其因子是 Weierstrass 多项式.

其次, 假定 $\mathbf{h}$ 在 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 中可约, 记 $\mathbf{h}=\mathbf{g}_1\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_j\in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n], j=1,2$ 不是 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 中单位. 若 $\mathbf{g}_1$ 是 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中单位, 则 $\mathbf{h}/\mathbf{g}_1=\mathbf{g}_2$, 应用 Weierstrass 除法定理, $\mathbf{1}/\mathbf{g}_1\in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$, 这与 $\mathbf{g}_1$ 不是 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 中单位矛盾, 因此 $\mathbf{g}_1$ 不是 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中单位. 类似, $\mathbf{g}_2$ 也不是 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中单位, 故 $\mathbf{h}$ 也在 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中可约. □

定义 6.6 **唯一因子分解整环 (UFD)** 是指一个满足下列条件的含幺元的整环: 每个不可逆元均可分解为有限个不可约因子的乘积; 分解在差一个单位及因子间排列的顺序的意义下唯一.

定理 6.7 ${}_n\mathcal{O}_0$ 是唯一因子分解整环.

证明: 我们对维数 n 归纳证明. 若 $n=0$, 环 ${}_0\mathcal{O}_0=\mathbf{C}$ 是域, 自然是唯一因子分解整环. 故假定定理对 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ 成立. 由 Gauss 定理, 多项式环 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 是唯一因子分解整环. 若 $\mathbf{f}\in {}_n\mathcal{O}_0$ 不是单位, 可通过适当的线性坐标变换, 使 $\mathbf{f}$ 关于 z_n 正则. 于是, 由 Weierstrass 预备定理, $\mathbf{f}=\mathbf{u}\mathbf{h}$, 这里 $\mathbf{u}\in {}_n\mathcal{O}_0$ 是单位, $\mathbf{h}\in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 是 Weierstrass 多项式. 多项式 $\mathbf{h}$ 在差一个 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 中单位及因子间排列顺序的意义下, 可唯一分解为不可约多项式的乘积. 由引理 6.5, 我们就得到了 $\mathbf{f}$ 在 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中, 差一个 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中单位及因子间排列顺序的意义下的唯一分

解. 故定理得证. □

定义 6.8 Noether 环是指它的每个理想均是有限生成的含幺元的交换环.

定理 6.9 ${}_n\mathcal{O}_0$ 是 Noether 环.

证明: 我们仍然对维数 n 归纳证明. 若 $n=0$, 环 ${}_0\mathcal{O}_0=\mathbf{C}$ 是域, 自然是 Noether 环. 故假定 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$ 是 Noether 环. 由 Hilbert 基定理, 多项式环 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 是 Noether 环. 对任意理想 $\mathcal{A}\subset{}_n\mathcal{O}_0$, 选 $\mathbf{g}\in\mathcal{A}$. 通过 $\mathbf{C}^n$ 的线性坐标变换, 使 $\mathbf{g}$ 关于 z_n 正则. 由 Weierstrass 预备定理, 在差一个 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中单位的意义下, 我们可进一步假定 $\mathbf{g}\in\mathcal{A}\cap{}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 是 Weierstrass 多项式. 由于 $\mathcal{A}\cap{}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 是环 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 中的理想, 由归纳假设, 可取有限个元素 $\mathbf{g}_1,\cdots,\mathbf{g}_k$ 为其生成元. 只需证明 $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}_1,\cdots,\mathbf{g}_k$ 可生成理想 $\mathcal{A}$. 这是因为若 $\mathbf{f}\in\mathcal{A}$, 利用 Weierstrass 除法定理, 有 $\mathbf{f}=\mathbf{gh}+\mathbf{r}$, 这里 $\mathbf{r}\in{}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$, 显然 $\mathbf{r}$ 又在 $\mathcal{A}$ 中, 故在 $\mathcal{A}\cap{}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 中, 于是存在 $\mathbf{h}_j\in{}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$, 使得 $\mathbf{r}=\mathbf{h}_1\mathbf{g}_1+\cdots+\mathbf{h}_k\mathbf{g}_k$. 故 $\mathbf{f}=\mathbf{hg}+\mathbf{h}_1\mathbf{g}_1+\cdots+\mathbf{h}_k\mathbf{g}_k$, 定理得证. □

对 $\mathbf{f}\in{}_n\mathcal{O}_0$, 若 $\mathbf{f}$ 不是 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中的单位, Weierstrass 预备定理可清晰地描述其零点. 对 $\mathbf{f}_1,\cdots,\mathbf{f}_l\in{}_n\mathcal{O}_0$, 我们想讨论它们的公共零点集, 注意到若 $\mathbf{g}_1,\cdots,\mathbf{g}_t\in{}_n\mathcal{O}_0$ 且 $\mathbf{g}_i$, $1\leqslant i\leqslant t$ 在由 $\mathbf{f}_1,\cdots,\mathbf{f}_l$ 生成的理想 $(\mathbf{f}_1,\cdots,\mathbf{f}_l)$ 中, 且 $\mathbf{f}_j\in(\mathbf{g}_1,\cdots,\mathbf{g}_t)$, $1\leqslant j\leqslant l$, 则 $\mathbf{g}_1,\cdots,\mathbf{g}_t$ 与 $\mathbf{f}_1,\cdots,\mathbf{f}_l$ 在 $\mathbf{C}^n$ 原点附近有相同的零点集, 故简单起见, 我们将问题转化为讨论理想 $I\subset{}_n\mathcal{O}_0$ 的公共零点集. 我们形式上用 $\operatorname{loc} I=\{x|f(x)=0,\ \forall f\in I\}$ 表示理想 I 的零点集, 也就是说是 I 中所有元素的公共零点集, 但如果想真正理解 $\operatorname{loc} I$, 必然要用到 ${}_n\mathcal{O}_0$ 是 Noether 环这个性质, 故 I 是有限生成理想, 于是 $\operatorname{loc} I$ 是 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中有限个元的公共零点.

即使如此, 考虑到 I 中元的全纯函数表示, 它们的定义域均为 $\mathbf{C}^n$ 中原点的邻域, 因此其公共定义域可能只是原点本身, 如此说来, I 的零点集就只是 $\mathbf{C}^n$ 的原点了, 也就没有讨论价值. 事实上, $\operatorname{loc} I$ 是为研究解析簇定义的, 严格来说, $\operatorname{loc} I$ 只是**解析簇的芽**, 也就是说, $\operatorname{loc} I$ 是解析簇的等价类, 我们需要定义一个等价关系, 使得 I 的任意两组生成元 (当然均有限) 对应的两个公共零点集, 即两个解析簇是等价的. 为此, 我们定义, 若 V_1, V_2 是两个解析簇, 如果存在 $\mathbf{C}^n$ 中原点的邻域 U, 满足 $V_1\cap U=V_2\cap U$, 则 V_1, V_2 等价, 也就是说, 它们表示相同的芽. 于是, 严格来说, $\operatorname{loc} I$ 只是定义了一个解析簇的芽.

我们下面给出解析簇的芽的精确定义.

定义 6.10 令 X, Y 是 $\mathbf{C}^n$ 中两个集合, 如果存在 $\mathbf{C}^n$ 原点的开邻域 U, 满足 $U\cap X=U\cap Y$, 则称 X 与 Y 在 $\mathbf{C}^n$ 原点等价, 显然, 这是一个等价关系, 今后用 $\mathbf{X}$ 表示 X 的等价类, 称 $\mathbf{X}$ 是 X 在 $\mathbf{C}^n$ 原点处的芽.

定义 6.11 令 $\mathbf{f} \in {}_n\mathcal{O}_0$, $\mathbf{X}$ 是集合 X 的芽, 称 $\mathbf{f}$ 在 $\mathbf{X}$ 上为零, 若存在 $\mathbf{C}^n$ 原点的开邻域 U, 满足 $\operatorname{loc}\mathbf{f}$ 的某个代表元包含 $X \cap U$, 简记为 $\operatorname{loc}\mathbf{f} \supset X \cap U$.

对每个 $\mathbf{C}^n$ 原点处集合的芽, 可定义理想 $id\,\mathbf{X} = \{\mathbf{f} \in {}_n\mathcal{O}_0 | \mathbf{f}(\mathbf{X}) = 0\}$, 不难验证 $id\,\mathbf{X}$ 是 ${}_n\mathcal{O}_0$ 的理想.

定义 6.12 令 R 是 Noether 环, Q 是 R 的真理想, 称 Q 是**准素理想**, 如果 $a,\ b \in R,\ ab \in Q$, 则 $a \in Q$ 或 $b^k \in Q,\ k \in \mathbf{Z}^+$ 必有一个成立.

引理 6.13 令 R 是 Noether 环, I 是 R 的真理想, 则存在有限个准素理想 $Q_1, \cdots, Q_k$ 满足

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_k.$$

称为 I 的准素分解.

证明: 令 E 是使引理不成立的真理想集. 如果 $E = \varnothing$, 则引理成立. 假定 $E \neq \varnothing$, 由于 R 是 Noether 环, 则 E 关于包含关系有极大元. 令 F 是 E 的某个极大元. 由于 F 不是准素的, 故存在 $ab \in F$, $a \notin F$ 且 $b \notin \operatorname{Rad} F$, 这里 $\operatorname{Rad} F$ 是 F 的根理想, 即 $\operatorname{Rad} F = \{c \in R | c^k \in F,\ k \in \mathbf{Z}^+\}$. 令 $F_n := (F : b^n) = \{d \in R | db^n \in F\}$, 显然有 $F_{n+1} = (F_n : b) \supseteq F_n$, $\forall n \in \mathbf{Z}^+$. 不难验证, 所有 F_n 均为 R 的真理想, 由于 R 是 Noether 环, 故存在 $N \in \mathbf{Z}^+$, 当 $n \geqslant N$, $F_n = F_{n+1} = F_{n+2} = \cdots$. 下面, 我们来证明

$$(F + aR) \cap (F + b^N R) = F.$$

显然有

$$(F + aR) \cap (F + b^N R) \supset F,$$

故只需证明

$$(F + aR) \cap (F + b^N R) \subset F.$$

任取 $e \in (F + aR) \cap (F + b^N R)$, 即

$$e = f_1 + ax_1 = f_2 + b^N x_2, \quad f_1,\ f_2 \in R;\ x_1,\ x_2 \in R.$$

由于 $ab \in F$, 故

$$eb = ef_1 + abx_1 \in F,$$

另一方面,

$$eb = bf_2 + b^{N+1}x_2, \quad b^{N+1}x_2 = eb - bf_2 \in F,$$

从而

$$x_2 \in F_{N+1} = F_N,$$

即 $b^N x_2 \in F$, 于是

$$e = f_2 + b^N x_2 \in F,$$

即

$$(F + aR) \cap (F + b^N R) = F.$$

显然 $(F+aR)$ 与 $(F+b^N R)$ 均为 R 的真理想且真包含 F, 故 F 可约, 也就是说 $F = I \cap J$, I, J 是 R 的真理想且真包含 F. 由于 F 是 E 的极大元, 故 I 与 J 均有准素分解

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r,$$

且

$$J = Q_1' \cap \cdots \cap Q_s'.$$

从而 $F = I \cap J = Q_1 \cap \cdots \cap Q_r \cap Q_1' \cap \cdots \cap Q_s'$, 与 $F \subset E$ 矛盾, 从而 E 是空集, 引理得证. □

§6.2 Hilbert 零点定理

定理 6.14 (Hilbert 零点定理) 令 I 是 ${}_n\mathcal{O}_0$ 的理想, 则

$$\sqrt{I} = id \operatorname{loc} I,$$

这里 $\sqrt{I}$ 是 I 的**根理想**, 即 $\sqrt{I} = \{f \in {}_n\mathcal{O}_0 | \exists k \in \mathbf{Z}^+, f^k \in I\}$.

证明: 我们先假定当 I 是素理想时定理成立.

由于 ${}_n\mathcal{O}_0$ 是 Noether 环, 我们有准素分解

$$I = Q_1 \cap \cdots \cap Q_k,$$

每个 Q_i 是准素理想.

我们按下面的步骤证明定理:

(1) $\operatorname{loc} I = \operatorname{loc} Q_1 \cup \cdots \cup \operatorname{loc} Q_k$: 因为 $I \subset Q_i$, 故 $\operatorname{loc} I \supset \operatorname{loc} Q_i$, $\operatorname{loc} I \supset \operatorname{loc} Q_1 \cup \cdots \cup \operatorname{loc} Q_k$.

若 $x \notin \operatorname{loc} Q_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, 则存在 $\mathrm{f}_i \in Q_i$, $f_i(x) \neq 0$, 而 $f = f_1 \cdots f_k \in I$, $f(x) \neq 0$, 故 $x \notin \operatorname{loc} I$, 于是 $\operatorname{loc} I \subset \operatorname{loc} Q_1 \cap \cdots \cap \operatorname{loc} Q_k$.

(2) $\operatorname{loc} Q_i = \operatorname{loc} P_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, 这里 $P_i = \sqrt{Q_i}$. 由根理想的定义, $P_i \supset Q_i$, 故 $\operatorname{loc} Q_i \supset \operatorname{loc} P_i$. 对 $x \in \operatorname{loc} Q_i$, $\forall f \in P_i$, 存在 $k \in \mathbf{Z}^+$, 满足 $f^k \in Q_i$, 于是 $f^k(x) = 0$, 从而 $f(x) = 0$, 故 $x \in \operatorname{loc} P_i$, 即 $\operatorname{loc} P_i \supset \operatorname{loc} Q_i$.

(3) 如果 $\mathbf{V}=\mathbf{V}_1\cup\cdots\cup\mathbf{V}_k$, 则

$$id\ \mathbf{V}=id\ \mathbf{V}_1\cap\cdots\cap id\ \mathbf{V}_k.$$

由于 $\mathbf{V}\supset\mathbf{V}_i$, $1\leqslant i\leqslant k$, 故 $id\ \mathbf{V}\subset id\ \mathbf{V}_i$; $1\leqslant i\leqslant k$, 故 $id\ \mathbf{V}\subset id\ \mathbf{V}_1\cap\cdots\cap id\ \mathbf{V}_k$; 另一方面, $\forall f\in id\ \mathbf{V}_1\cap\cdots\cap id\ \mathbf{V}_k$, $\forall x\in\mathbf{V}$, 存在 $\mathbf{V}_i$, 使得 $x\in\mathbf{V}_i, 1\leqslant i\leqslant k$. 又因为 $f\in id\ \mathbf{V}_i$, 故 $f(x)=0$, 从而 $f\in id\ \mathbf{V}$, 故 $id\ \mathbf{V}\supset id\ \mathbf{V}_1\cap\cdots\cap id\ \mathbf{V}_k$.

(4) 令 $I=Q_1\cap\cdots\cap Q_k$, 则

$$\sqrt{I}=\sqrt{Q_1}\cap\cdots\cap\sqrt{Q_k}.$$

由于 $I\subset Q_i$; $1\leqslant i\leqslant k$, 故 $\sqrt{I}\subset\sqrt{Q_i}$; $1\leqslant i\leqslant k$, 于是 $\sqrt{I}\subset\sqrt{Q_1}\cap\cdots\cap\sqrt{Q_k}$; 另一方面, $\forall f\in\sqrt{Q_1}\cap\cdots\cap\sqrt{Q_k}$, $f\in\sqrt{Q_i}$; $1\leqslant i\leqslant k$, 存在 $n_i\in\mathbf{Z}^+$ 使得 $f^{n_i}\in Q_i$, 故 $f^{\sum_{i=1}^k n_i}\in Q_1\cap\cdots\cap Q_k=I$, 从而 $f\in\sqrt{I}$.

由 (1) 和 (3),

$$id\ \mathrm{loc}\ I=id\ \mathrm{loc}\ Q_1\cap\cdots\cap id\ \mathrm{loc}\ Q_k,$$

由 (2), 及素理想情形的假设

$$id\ \mathrm{loc}\ I=id\ \mathrm{loc}\ P_1\cap\cdots\cap id\ \mathrm{loc}\ P_k=P_i\cap\cdots\cap P_k=\sqrt{Q_1}\cap\cdots\cap\sqrt{Q_k}.$$

最后, 由 (4) 及 $I=Q_1\cap\cdots\cap Q_k$, 知 $id\ \mathrm{loc}\ I=\sqrt{Q_1}\cap\cdots\cap\sqrt{Q_k}=\sqrt{I}$. □

现在只需证明关于素理想的 Hilbert 零点定理. 简单起见, 用 R_n 表示 ${}_n\mathcal{O}_0$. 在证明定理之前, 我们先来分析素理想 $P\subset R_n$ 的零点集的性质. 如果 $P\cap R_n\neq(0)$, 至少存在一个非零元 $f_n\in P\cap R_n$, 不失一般性, 假定 f_n 对 z_n 正则, 且 f_n 是 Weierstrass 多项式, 因为一般情形, 存在 R_n 中单位 u, 使得 uf_n 是 Weierstrass 多项式.

我们仍然用 R_{n-1} 表示 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$, 即 $\mathbf{C}^{n-1}$ 原点处全纯函数芽环, $\mathbf{C}^{n-1}$ 的坐标为 $(z_1,\cdots,z_{n-1})$.

类似 n 维情形, 如果 $R_{n-1}\cap P\neq(0)$, 必存在非零元 $f_{n-1}\in R_{n-1}\cap P$, 满足 f_{n-1} 对 z_{n-1} 正则, 且是关于 z_{n-1} 的 Weierstrass 多项式, 继续下去, 可找到非零元 $f_{n-2}\in R_{n-2}\cap P$, $f_{n-3}\in R_{n-3}\cap P,\cdots,f_{k+1}\in R_{k+1}\cap P$, 直到 $R_k\cap P=(0)$.

于是 $\forall f\in R_n$, 由 Weierstrass 除法定理,

$$f=f_ng_n+r_n.$$

这里 $r_n=\sum\limits_{v=0}^{k_n-1}a_v(z')z_n^v$, $\deg f_n=k_n$. 对每个 $a_v(z')$; $1\leqslant v\leqslant k_n-1$, 利用

Weierstrass 除法定理, 知

$$a_v(z_1,\cdots,z_{n-1})=g_{v,n-1}f_{n-1}+\sum_{\mu=0}^{k_{n-1}-1}b_{v\mu}(z_1,\cdots,z_{n-2})z_{n-1}^{\mu}.$$

分别对 $f_{n-2},\cdots,f_{k+1}$ 重复上述过程, 最终可得到

$$f=Q_nf_n+\cdots+Q_{k+1}f_{k+1}+r, \tag{6.5}$$

这里 $r\in R_k[z_{k+1},\cdots,z_n]$, 由于 $f\in P$ 且 $f_n,\cdots,f_{k+1}$ 均在 P 中, 故 $r\in P$.

考虑商环 R_n/P, 用 $\overline{z}_{k+1},\cdots,\overline{z}_n$ 表示 $z_{k+1},\cdots,z_n$ 在商同态 $R_n\longrightarrow R_n/P$ 下的像. 由 (6.5),

$$R_n/P\equiv R_k[\overline{z}_{k+1},\cdots,\overline{z}_n].$$

由于 P 是素理想, R_n/P 是整环, 令 M_k 是 R_k 的商域, 则 $R_k[\overline{z}_{k+1},\cdots,\overline{z}_n]$ 的商域是

$$M_k(\overline{z}_{k+1},\cdots,\overline{z}_n),$$

由 (6.5), 它作为 M_k 上的向量空间是有限维的, 故是域 M_k 的有限扩张. 由于每个特征零的域的代数扩张一定是可分扩张, 由本原元素定理, 每个有限可分扩张都有本原元素, 故存在 $\xi\in M_k(\overline{z}_{k+1},\cdots,\overline{z}_n)$, 满足 $M_k(\overline{z}_{k+1},\cdots,\overline{z}_n)=M_k(\xi)$, 反之, 称满足上述条件的 ξ 为 $M_k(\overline{z}_{k+1},\cdots,\overline{z}_n)$ 的本原元素. 本原元素定理的证明是基于 Kronecker 的待定元法, 仔细分析其证明不难发现, 本原元素 $\xi=\sum\limits_{v=k+1}^{n}c_v\overline{z}_v$; $c_v\in M_k$ 的选取有很大的任意性, 换句话说, 只有很少的 $(c_{k+1},\cdots,c_n)\in(M_k)^{n-k}$, 使其对应元不是本原的. 更进一步, 可选取新坐标 $z'_{k+1}=\sum\limits_{v=k+1}^{n}c_vz_v, c_v\in\mathbf{C}$; $k+1\leqslant v\leqslant n$, 且 $z'_{k+2},\cdots,z'_n$ 仍然是 $z_{k+1},\cdots,z_n$ 的线性组合, 满足 $f_{k+2},\cdots,f_n$ 分别对 $z'_{k+2},\cdots,z'_n$ 正则, 若仍然使用 $(z_1,\cdots,z_n)$ 表示新坐标 $(z_1,\cdots,z_k,z'_{k+1},\cdots,z'_n)$, 我们有

$$M_k(\overline{z}_{k+1},\cdots,\overline{z}_n)=M_k(\overline{z}_{k+1}).$$

由于 $\overline{z}_v$; $k+1\leqslant v\leqslant n$ 在 R_k 上是整的, 存在首一极小多项式 $\varphi_v(X)\in R_k(X)$; $k+1\leqslant v\leqslant n$, 满足 $\varphi_v(\overline{z}_v)=0$; $k+1\leqslant v\leqslant n$, 通常称 φ_v 为 $\overline{z}_v$ 的**定义多项式**. 令 $\lambda:=\deg\varphi_{k+1}\in\mathbf{Z}^+$, 由 $\overline{z}_v\in M_k(\overline{z}_{k+1})$; $k+2\leqslant v\leqslant n$, 知

$$\overline{z}_v=a_0+a_1\overline{z}_{k+1}+\cdots+a_{\lambda-1}\overline{z}_{k+1}^{\lambda-1};\quad k+2\leqslant v\leqslant n, \tag{6.6}$$

这里 $a_i\in M_k$; $0\leqslant i\leqslant\lambda-1$.

由 Gauss 的本原多项式定理, 故 $\varphi_{k+1}(X)$ 也是 $\overline{z}_{k+1}$ 在 $R_k[X]$ 中的极小多项式 (注意前面只是说它是在商域 $R_k[X]$ 上的极小多项式). 由于 $M_k(\overline{z}_{k+1})$ 可分, 且 $\overline{z}_{k+1}$ 是 λ 阶本原的, 故它在 M_k 的代数闭域中共有 λ 个共轭

$$\sigma_1(\overline{z}_{k+1}),\cdots,\sigma_\lambda(\overline{z}_{k+1}),$$

这里 $\sigma_1,\cdots,\sigma_\lambda$ 是 $M_k(\overline{z}_{k+1})$ 到其代数闭包的, 在 M_k 上的 (即固定 M_k) λ 个不同嵌入. 事实上, 若记 $\sigma_\mu(\overline{z}_{k+1})=\overline{z}_{k+1}^{(\mu)}$, $\mu=1,\cdots,\lambda$, 则 $\overline{z}_{k+1}^{(1)},\cdots,\ z_{k+1}^{(\lambda)}$ 正好是 $\varphi_{k+1}(X)$ 的 λ 个不同的根. 更进一步, 若令 $\sigma_\mu(\overline{z}_v)=\overline{z}_v^{(\mu)}$; $k+1\leqslant v\leqslant n$, $1\leqslant\mu\leqslant\lambda$. 将 σ_μ 作用于 (6.6), 就得到如下方程组

$$\begin{cases} z_v^{(1)}=a_0+a_1\overline{z}_{k+1}^{(1)}+\cdots+a_{\lambda-1}(\overline{z}_{k+1}^{(1)})^{\lambda-1}, \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_v^{(\lambda)}=a_0+a_1\overline{z}_{k+1}^{(\lambda)}+\cdots+a_{\lambda-1}(\overline{z}_{k+1}^{(\lambda)})^{\lambda-1}. \end{cases} \tag{6.7}$$

我们需要从上述线性方程组解出 $a_0,\ a_1,\cdots,a_{\lambda-1}$, 即

$$a_i=\frac{\det\begin{pmatrix} \overline{z}_{k+1}^{(1)} & & (\overline{z}_{k+1}^{(1)})^{i-1} & z_v^{(1)} & (\overline{z}_{k+1}^{(1)})^{i+1} & & (\overline{z}_{k+1}^{(1)})^{\lambda-1} \\ \overline{z}_{k+1}^{(2)} & & (\overline{z}_{k+1}^{(2)})^{i-1} & z_v^{(2)} & (\overline{z}_{k+1}^{(2)})^{i+1} & & (\overline{z}_{k+1}^{(2)})^{\lambda-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{z}_{k+1}^{(\lambda)} & \cdots & (\overline{z}_{k+1}^{(\lambda)})^{i-1} & z_v^{(\lambda)} & (\overline{z}_{k+1}^{(\lambda)})^{i+1} & \cdots & (\overline{z}_{k+1}^{(\lambda)})^{\lambda-1} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} \overline{z}_{k+1}^{(1)} & \cdots & (\overline{z}_{k+1}^{(1)})^{i-1} & (\overline{z}_{k+1}^{(1)})^{i} & (\overline{z}_{k+1}^{(1)})^{i+1} & \cdots & (\overline{z}_{k+1}^{(1)})^{\lambda-1} \\ \overline{z}_{k+1}^{(2)} & & (\overline{z}_{k+1}^{(2)})^{i-1} & (\overline{z}_{k+1}^{(2)})^{i} & (\overline{z}_{k+1}^{(2)})^{i+1} & & (\overline{z}_{k+1}^{(2)})^{\lambda-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \overline{z}_{k+1}^{(\lambda)} & & (\overline{z}_{k+1}^{(\lambda)})^{i-1} & (\overline{z}_{k+1}^{(\lambda)})^{i} & (\overline{z}_{k+1}^{(\lambda)})^{i+1} & & (\overline{z}_{k+1}^{(\lambda)})^{\lambda-1} \end{pmatrix}}; \tag{6.8}$$

$$i=0,\cdots,\lambda-1.$$

(6.8) 中的分母是 $\varphi_{k+1}(X)$ 的判别式, 简记为 D. (6.8) 分子中的行列式里每个元素均在 R_k 上是整的, "整" 这个性质关于加法与乘法封闭, 从而 Da_i 在 R_k 上是整的. 由于 R_k 是唯一因子分解整环, R_k 整闭, 从而

$$Da_i\in R_k;\quad 0\leqslant i\leqslant\lambda-1.$$

由 (6.6),

$$D\overline{z}_v=Da_0+Da_1\overline{z}_{k+1}+\cdots+Da_{\lambda-1}\overline{z}_{k+1}^{\lambda-1}. \tag{6.9}$$

于是 $\psi_v(X):=Da_0+Da_1X+\cdots+Da_{\lambda-1}X^{\lambda-1}\in R_k[X]$, 由 (6.9),

$$Dz_v-\psi_v(z_{k+1})\in P;\quad v=k+2,\cdots,n.$$

引理 6.15

$$\operatorname{loc} P\backslash\{D=0\}=\operatorname{loc}(\varphi_{k+1}, Dz_{k+2}-\psi_{k+2}(z_{k+1}),\cdots,Dz_n-\psi_n(z_{k+1}))\backslash\{D=0\},$$

这里 $\{D=0\}$ 表示 $\operatorname{loc}(D)$, 即主理想 (D) 的零点集.

证明: 由于 φ_{k+1}; $Dz_{k+2}-\psi_{k+2}(z_{k+1}),\cdots,Dz_n-\psi_n(z_{k+1})$ 均在 P 中, 于是

$$\operatorname{loc} P\backslash\{D=0\}\subset\operatorname{loc}(\varphi_{k+1}, Dz_{k+2}-\psi_{k+2}(z_{k+1}),\cdots,Dz_n-\psi_n(z_{k+1}))\backslash\{D=0\}.$$

为证明反方向的包含关系, 我们要先对一些事实加以解释. 首先 $\varphi_{k+1}(z_{k+1})$ 是系数在 R_k 中的关于 z_{k+1} 的 Weierstrass 多项式: 这是因为, 由 Weierstrass 预备定理, $\varphi_{k+1}(z_{k+1})=u\varphi'_{k+1}(z_{k+1})$, $\varphi'_{k+1}(z_{k+1})$ 是 Weierstrass 多项式, $u\in R_{k+1}$ 是单位. 由于 $\varphi_{k+1}(\overline{z}_{k+1})=0$, 且 u 是单位, 故 $\varphi'_{k+1}(\overline{z}_{k+1})=0$. 现在 $\varphi_{k+1}(z)$ (虽然 $\varphi_{k+1}(z_{k+1})$ 只是系数在 R_k 中的关于 z_{k+1} 的多项式, 若将其看成 R_n 中的元, 常将其记为 $\varphi_{k+1}(z)$) 是 $\overline{z}_{k+1}$ 的首一极小多项式, 且 $\deg\varphi_{k+1}=\deg\varphi'_{k+1}$, 更有 φ'_{k+1} 的首项系数也是 1, 因此 $\varphi_{k+1}(z)=\varphi'_{k+1}(z)$. 类似讨论可知, 所有 $\varphi_v(z)\in R_k[z]$, $v=k+2,\cdots,n$ 也是 Weierstrass 多项式. 由于 $f_v\in P$ 且对 z_v 正则, 故 $f_v(\overline{z}_v)=0$, 而 $\varphi_v(z)$ 是 $\overline{z}_v$ 的极小多项式, 因此 $\varphi_v(z)|f_v(z)$; $v=k+2,\cdots,n$.

任取 $g_v\in R_{v-1}[z_v]$; $v>k+1$, 设 $\deg g_v=\alpha_v\in\mathbf{Z}^+$, 由于 $D\in R_k$, 将未定元 z_v 换为 Dz_v, 考虑到 $\psi_v(z_{k+1})\in R_k[z_{k+1}]$, 将其简记为 ψ_v, 代入 $Dz_v=Dz_v-\psi_v+\psi_v$, 知

$$D^{\alpha_v}g_v=A(Dz_v-\psi_v)+\widetilde{g_v}(z_1,\cdots,z_{v-1}),$$

这里 $A\in R_{v-1}$. 对 $\widetilde{g_v}(z_1,\cdots,z_{v-1})$ 使用 Weierstrass 除法定理, 有

$$\widetilde{g_v}(z_1,\cdots,z_{v-1})=Bf_{v-1}(z_1,\cdots,z_{v-1})+r_{v-1},$$

因此

$$D^{\alpha_v}g_v=A(Dz_v-\psi_v)+Bf_{v-1}(z_1,\cdots,z_{v-1})+r_{v-1}.$$

上式表明 $D^{\alpha_v}g_v=r_{v-1}\pmod P$, 这里 $r_{v-1}\in R_{v-2}[z_{v-1}]$ 且 $\deg r_{v-1}<\deg f_{v-1}$. 由 (6.5), $\forall f\in R_n$, 有分解

$$f=f_nQ_n+f_{n-1}Q_{n-1}+\cdots+f_{k+2}Q_{k+2}+f_{k+1}Q_{k+1}+r,$$

满足 $r\in R_k[z_{k+1},\cdots,z_n]$. 由前面的讨论, 我们可先考虑含未定元 z_n 的项 f_n, 类似 g_n, 通过乘以适当的 D^{α_n}, 可将其分解为含 $Dz_n-\psi_n$ 的项及余项, 代入 $D^{\alpha_n}f$ 的分解式, 再对分解式中不含 $Dz_n-\psi_n$ 的项做类似讨论, 只不过这时未定元就

成了 z_{n-1}, f_n 变成了 f_{n-1}. 重复下去, 直到 f_{k+1}, 这时, 利用 $\varphi_{k+1}(z)|f_{k+1}(z)$, 就得到

$$D^\alpha f = \sum_{v=k+2}^{n} A_v(Dz_v - \psi_v) + B\varphi_{k+1} + t + D^\alpha r, \tag{6.10}$$

这里 $t \in R_k[z_{k+1}]$, 且 $\deg t < \deg \varphi_{k+1} = \lambda$.

现在只需分析 (6.10) 中的余项 r 了: 取 $\beta \in \mathbf{Z}^+$ 充分大, 使得

$$\begin{aligned} D^\beta r &= s[z_{k+1}, Dz_{k+2}, \cdots, Dz_n] \\ &= s[z_{k+1}, Dz_{k+2} - \psi_{k+2} + \psi_{k+2}, \cdots, Dz_n - \psi_n + \psi_n] \\ &= \sum_{v=k+2}^{n} \widetilde{A_v}(Dz_v - \psi_v) + s[z_{k+1}, \psi_{k+2}, \cdots, \psi_n], \end{aligned}$$

这里 $\widetilde{A_v} \in R_k[z_{k+1}, \cdots, z_n]$; $k+2 \leqslant v \leqslant n$, $s[z_{k+1}, \psi_{k+2}, \cdots, \psi_n] \in R_k[z_{k+1}]$ (简记为 s). 对 s 使用 Weierstrass 除法定理, 得

$$s = \varphi_{k+1} h + \tilde{t},$$

这里 $\tilde{t} \in R_k[z_{k+1}]$ 且 $\deg \tilde{t} < \deg \varphi_{k+1} = \lambda$. 于是通过取充分大的 $\delta \in \mathbf{Z}^+$, 例如 $\delta = \alpha + \beta$, 就可得到

$$D^\delta f = r_f \bmod (\varphi_{k+1}, Dz_{k+2} - \psi_{k+2}, \cdots, Dz_n - \psi_n),$$

这里 $r_f \in R_k[z_{k+1}]$ 且 $\deg r_f < \deg \varphi_{k+1} = \lambda$.

有了上式, 我们就可以证明反方向包含关系了: 如果 $f \in P$, 则 $r_f \in P$, 考虑到 φ_{k+1} 是 $\overline{z}_{k+1}$ 的首一极小多项式, 但 $\deg r_f < \deg \varphi_{k+1} = \lambda$, 故必有 $r_f \equiv 0$, 从而只要 $f \in P$, 必存在 $\delta \in \mathbf{Z}^+$, 满足

$$D^\delta f \in (\varphi_{k+1}, Dz_{k+2} - \psi_{k+2}, \cdots, Dz_n - \psi_n).$$

对任意的 $f \in P$, 在 $\operatorname{loc}(\varphi_{k+1}, Dz_{k+2} - \psi_{k+2}, \cdots, Dz_n - \psi_n) \backslash \{D = 0\}$ 的某个充分小的代表元中 (事实上只需包含在 f 的定义域) 任取一点 x, 由前面的分析, 存在 $\delta \in \mathbf{Z}^+$, 使得 $D^\delta f(x) = 0$, 由于 $D(x) \neq 0$, 故 $f(x) = 0$. 由于 P 有限生成, 知 $\operatorname{loc} P \backslash \{D = 0\}$ 的某个代表元包含 x. 至此, 引理的证明就完成了. □

定理 6.16 (关于素理想的 Hilbert 零点定理) 如果 $P \in {}_n\mathcal{O}_0$ 是素理想, 则

$$P = id \operatorname{loc} P.$$

证明: $P \subset id\ \mathrm{loc}\ P$ 是平凡的. 反之, 对任意 $f \in id\ \mathrm{loc}\ P$, $f|_{\mathrm{loc}\ P} = 0$, 由前面引理的证明, 存在充分大的 $\delta \in \mathbf{Z}^+$, 满足

$$D^\alpha f = r_f \bmod(\varphi_{k+1}, Dz_{k+2} - \psi_{k+2}, \cdots, Dz_n - \psi_n),$$

这里 $r_f \in R_k[z_{k+1}]$ 且 $\deg r_f < \deg \varphi_{k+1} = \lambda$. 于是 r_f 在

$$\mathrm{loc}(\varphi_{k+1}, Dz_{k+2} - \psi_{k+2}, \cdots, Dz_n - \psi_n)\backslash\{D = 0\} = \mathrm{loc}\ P\backslash\{D = 0\}$$

的某个充分小的代表元上为零. 在 loc (D) (将 (D) 看成 R_k 的主理想) 的充分小的代表元的补集中任取充分靠近原点的点 $(z_1, \cdots, z_k)$, 使得

$$\mathrm{loc}(\varphi_{k+1}, Dz_{k+2} - \psi_{k+2}, \cdots, Dz_n - \psi_n)$$

的某个代表元中, 满足坐标前 k 个分量恰是 $(z_1, \cdots, z_k)$ 的点的个数为 λ. 而满足 $r_f = 0$, 且前 k 个分量恰好是前面取的 $(z_1, \cdots, z_k)$ 的点的个数至多是 $\lambda - 1$, 除非 $r_f \equiv 0$. 由前面的分析, $r_f \equiv 0$. 从而 $D^\alpha f \in (\varphi_{k+1}, Dz_{k+2} - \psi_{k+2}, \cdots, Dz_n - \psi_n) \subset P$, 由于 $D^\alpha \in R_k$ 但 $R_k \cap P = 0$, 必有 $D^\alpha \notin P$, 则 $f \in P$, 于是 $id\ \mathrm{loc}\ P \subset P$, 定理得证. □

下面我们来讨论 Weierstrass 除法定理的推广, 这可用来导出解析函数的一些非局部的性质. 例如, 考虑 $\mathbf{C}^n$ 上的全纯函数芽层 $\mathcal{O}$ (有时, 为避免混淆, 常记为 ${}_n\mathcal{O}$). 对 $\mathbf{C}^n$ 中任意子集 K, 记 $\mathcal{O}_K$ (或 ${}_n\mathcal{O}_K$) 为 $\mathcal{O}$ 在 K 上的连续截影 (K 上的拓扑是关于 $\mathbf{C}^n$ 的相对拓扑) 形成的含幺交换环. 如果 K 是闭集, 由 $\mathbf{C}^n$ 的仿紧性不难得出, $\mathcal{O}_K$ 中的元均为 K 的某个邻域上全纯函数在 K 上的芽 (K 的邻域上的两个全纯函数等价, 当且仅当它们在 K 的某个充分小的邻域上是相等的, 等价类即为 K 上的芽). 前面我们主要讨论了 K 为单点时 $\mathcal{O}_K$ 的性质.

考虑

$$\overbrace{\mathcal{O}_K \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_K}^{p\ 次}.$$

显然, 它是 $\mathcal{O}_K$-模. 又因其只有生成元而无关系式, 往往称其为秩 p 自由模, 简记为 $p\mathcal{O}_K$(或 $p\ {}_n\mathcal{O}_K$). 考虑自由模 $p\ {}_n\mathcal{O}_0$ 的子模 $\mathcal{M}$. 对任意含原点的闭集 K, 令

$$\mathcal{M}_K = \{\mathbf{F} \in p\ {}_n\mathcal{O}_K | \mathbf{F}_0 \in \mathcal{M}\}.$$

这是一个 ${}_n\mathcal{O}_K$-模. 事实上, $\mathcal{M}_K$ 可以这样来刻画: 它是满足在原点的限制为 $\mathcal{M}$ 中元的自由 ${}_n\mathcal{O}_K$-模 $p\ {}_n\mathcal{O}_K$ 的最大子模. 我们将会证明, 对适当的 K, $\mathcal{M}$ (作为 ${}_n\mathcal{O}_0$-模) 的生成元亦可生成 $\mathcal{M}_K$(作为 ${}_n\mathcal{O}_K$-模). 精确地说, 就是下面的定理:

定理 6.17 令 U 是 $\mathbf{C}^n$ 原点的开邻域, 令 $G_1, \cdots, G_q \in p\mathcal{O}_U$ 是 U 上的全纯函数 (事实上, 是 p-向量值全纯函数), 满足它们在原点处的芽生成秩 p 自由 ${}_n\mathcal{O}_0$-模 $p\ {}_n\mathcal{O}_0$ 的子模 $\mathcal{M}$. 则存在以原点为中心的坐标邻域中的闭多圆柱 $\overline{\Delta}(0;r) \subset U$, $r > 0$, 及常数 $K > 0$, 使得每个 $\mathbf{F} \in \mathcal{M}_{\overline{\Delta}(0;r)}$ 均可表示为

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^{q} \mathbf{h}_j \mathbf{G}_j,$$

这里 $\mathbf{h}_j \in \mathcal{O}_{\overline{\Delta}(0;r)}$, 更进一步, 有

$$||\mathbf{h}_j||_{\overline{\Delta}(0;r)} \leqslant K\ ||\mathbf{F}||_{\overline{\Delta}(0;r)},$$

这里 $||\cdot||$ 表示取 "·" 的各个分量在 $\overline{\Delta}(0;r)$ 的最大值中最大的一个. 而且, 任意给定有限个满足上述条件的模及生成元, 均存在多圆柱 $\overline{\Delta}(0;r)$, 使得上述结论对所有模关于此多圆柱成立.

证明: 我们将对复维数 n 归纳证明. $n = 0$ 时结论平凡; 故假定结论对 $n-1$ 个变量是成立的, 要证明此时结论对 n 个变量也是成立的. 为简化讨论, 我们先证明 n 个变量中的特殊情形.

(1) 首先假定 $p = 1$; 于是 $G_j(z)$ 就成了普通的全纯函数, $\mathcal{M} \subset {}_n\mathcal{O}$ 就是由这些函数在原点的芽生成的理想. 选取以原点为中心的坐标系, 使得 G_1 关于 z_n 正则; 于是, 由 Weierstrass 预备定理,

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{p}_1,$$

这里 $\mathbf{u}_1$ 是 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中的单位, $\mathbf{p}_1 \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n]$ 是 k 阶 Weierstrass 多项式. 注意到可选取坐标系使得任意有限个芽同时关于 z_n 正则. 由局部 Weierstrass 除法定理, 每个芽 $\mathbf{F} \in \mathcal{M}$ 均可唯一地表示为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}'\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}^*,$$

这里 $\mathbf{p}^* \in {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n] \cap \mathcal{M}$ 是至多 $k-1$ 阶的多项式; 所有 $\mathbf{p}^*$ 的集合, 有自然的 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$-模结构, 记为 $\mathcal{M}^* = {}_{n-1}\mathcal{O}_0[z_n] \cap \mathcal{M}$, 若只考虑多项式的系数, 可将其想象成子模 $\mathcal{M}^* \subset k\ {}_{n-1}\mathcal{O}_0$. 令 $\mathbf{p}_1^*, \cdots, \mathbf{p}_s^* \in \mathcal{M}^*$ 为这个 ${}_{n-1}\mathcal{O}_0$-模的子模的生成元, 由于 $\mathcal{M}^* \subset \mathcal{M}$, 存在芽 $\mathbf{a}_{ij} \in_n \mathcal{O}_0$, 使得

$$\mathbf{p}_i^* = \sum_{j=1}^{q} \mathbf{a}_{ij} \mathbf{G}_j.$$

取原点的充分小的开邻域 $V \subset U$, 满足所有芽 $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_i^*$, $\mathbf{a}_{ij}$ 均有代表元在 V 中全纯, 且存在常数 m, $|u_1(z)| \geqslant m > 0$ 对任意 $z \in V$ 都成立; 适当地收缩

V, 可对任意有限个模找到同一个满足上述条件的 V. 由归纳假设, 存在开多圆柱 $\Delta(0;r) \subset \overline{\Delta}(0;r) \subset V$ (可能要经过 $\mathbf{C}^{n-1}:(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 的坐标变换), 及常数 $K^*>0$, 使得定理的结论可应用于由 $\mathbf{p}_1^*,\cdots,\mathbf{p}_s^*$ 生成的 $\mathcal{M}^*$; 同样由归纳假设, 对有限个这样的模, 我们能找到同一个满足上述条件的多圆柱. 回忆前面 Weierstrass 除法定理的证明, 本质上是求解于 Cauchy 型的积分表示, 也就是说 Weierstrass 除法定理可在原点的某邻域成立, 且满足一定的极大模估计 (下文将给出), 我们称其为整体 Weierstrass 除法定理. 我们不妨进一步假定 $\Delta(0;r)$ 满足: $p_1(z)$ 或任意有限个这样的函数, 同时在 $\overline{\Delta}(0;r)$ 上满足整体 Weierstrass 除法定理的条件. 于是, 对任意的 $\mathbf{F}\in\mathcal{M}_{\overline{\Delta}(0;r)}$, 整体 Weierstrass 除法定理告诉我们

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}'\mathbf{p}_1+\mathbf{F}^*,$$

这里 $\mathbf{F}'\in\mathcal{O}_{\overline{\Delta}(0;r)}$ 满足

$$||\mathbf{F}'||_{\overline{\Delta}(0;r)}\leqslant K'||\mathbf{F}||_{\overline{\Delta}(0;r)},$$

且对 $\mathbf{F}^*$, 视其为 $\mathbf{F}^*\in k\ {}_{n-1}\mathcal{O}_{\overline{\Delta}(0;r_1,\cdots,r_{n-1})}$, 也有估计

$$||\mathbf{F}^*||_{\overline{\Delta}(0;r_1,\cdots,r_{n-1})}\leqslant K'||\mathbf{F}||_{\overline{\Delta}(0;r)}.$$

(读者可由 Weierstrass 除法定理证明过程中的 Cauchy 型积分表示推导出以上两个不等式.)

为简化记号, 令 $D=\overline{\Delta}(0;r_1,\cdots,r_{n-1})$. 现在, 由于 $\mathbf{F}^*\in\mathcal{M}_D^*$, 由归纳假设

$$\mathbf{F}^*=\sum_{i=1}^{s}\mathbf{b}_i\mathbf{p}_i^*,$$

这里 $\mathbf{b}_i\in{}_{n-1}\mathcal{O}_D$ 且

$$||\mathbf{b}_i||_D\leqslant K^*||\mathbf{F}^*||_D.$$

令 $M=\operatorname*{Sup}_{i,j}||\mathbf{a}_{ij}||_{\overline{\Delta}(0;r)}$, 由前面的估计,

$$\mathbf{F}=\left(\frac{1}{\mathbf{u}_1}\mathbf{F}'+\sum_{i=1}^{s}\mathbf{b}_i\mathbf{a}_{i1}\right)\mathbf{G}_1+\sum_{j=2}^{q}\left(\sum_{i=1}^{s}\mathbf{b}_i\mathbf{a}_{ij}\right)\mathbf{G}_j=\sum_{j=1}^{q}\mathbf{h}_j\mathbf{G}_j,$$

这里 $\mathbf{h}_j\in\mathcal{O}_D$ 且对 $K=(1/m)K'+sMK'K^*$ 有

$$||\mathbf{h}_j||_{\overline{\Delta}(0;r)}\leqslant K||\mathbf{F}||_{\overline{\Delta}(0;r)}$$

成立. 这就是我们需要的结论.

(2) 现在只需证明定理在 n 维的一般情形成立. 我们对指标 p 归纳. 精确地说, 我们假定定理对秩 $< p$ 的各种自由 ${}_n\mathcal{O}_0$-模的任意有限个子模成立, 证明定理对秩 $\leqslant p$ 的各种自由 ${}_n\mathcal{O}_0$-模的任意有限个子模成立. $p=1$ 的情形已经在 (1) 中得到证明. 于是, 假定 $p>1$. 设 $\mathcal{M}\subset p\ {}_n\mathcal{O}_0$ 是某个我们证明中要考虑到的模. 定理条件要求 $\mathcal{M}$ 有限生成, 故不妨假定 $\mathbf{G}_1,\cdots,\mathbf{G}_q\in p\ {}_n\mathcal{O}_0$ 生成 $\mathcal{M}$. 令 $\mathbf{G}'_1,\cdots,\mathbf{G}'_q\in(p-1)\ {}_n\mathcal{O}_0$ 分别是由 $\mathbf{G}_1,\cdots,\mathbf{G}_q$ 的前 $p-1$ 个分量构成的向量, 它们可生成子模 $\mathcal{M}'\subset(p-1)\ {}_n\mathcal{O}_0$. 更进一步, 令 $\mathcal{M}''\subset\ {}_n\mathcal{O}_0$ 是由所有满足 $(\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0},\mathbf{g}'')\in\mathcal{M}$ 的 $\mathbf{g}''\in{}_n\mathcal{O}_0$ 组成的集合, 事实上, $\mathcal{M}''$ 是 ${}_n\mathcal{O}_0$ 的理想, 由于 ${}_n\mathcal{O}_0$ 是 Noether 的, 故 $\mathcal{M}''$ 有限生成, 假定 $\mathbf{g}''_i,\cdots,\mathbf{g}''_s$ 是其生成元, 由于 $(\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0},\mathbf{g}''_i)\in\mathcal{M}$, 故存在芽 $\mathbf{a}_{ij}\in{}_n\mathcal{O}_0$, 满足

$$(\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0},\mathbf{g}''_i)=\sum_{j=1}^{q}\mathbf{a}_{ij}\mathbf{G}_j.$$

选取原点充分小的开邻域 $V\subset U$, 使得 $\mathbf{g}''_i$ 及 $\mathbf{a}_{ij}$ 都有代表元在 V 上全纯, 事实上, 我们可以进一步假定 V 充分小, 以至于可以同时满足所有我们证明中要考虑到的有限个模. 由归纳假设, 存在开多圆柱 $\Delta(0;r)\subset\overline{\Delta}(0;r)\subset V$, 使得定理的结论对 $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M}''$ 及所有有限个秩 $<p$ 的自由模的子模在此多圆柱上同时成立. 现在, 任取 $\mathbf{F}\in\mathcal{M}_{\overline{\Delta}(0;r)}$, 由 $\mathbf{F}$ 的前 $p-1$ 个分量构成的 $\mathbf{F}'\in(p-1)\ {}_n\mathcal{O}_{\overline{\Delta}(0;r)}$ 必在 $\mathcal{M}'_{\overline{\Delta}(0;r)}$ 中, 因此, 由归纳假设,

$$\mathbf{F}'=\sum_{j=1}^{q}\mathbf{h}'_j\mathbf{G}'_j,$$

这里 $\mathbf{h}'_j\in{}_n\mathcal{O}_{\overline{\Delta}(0;r)}$ 且

$$||\mathbf{h}'_j||_{\overline{\Delta}(0;r)}\leqslant K'||\mathbf{F}'||_{\overline{\Delta}(0;r)}.$$

令

$$\mathbf{F}''=\mathbf{F}-\sum_{j=1}^{q}\mathbf{h}'_j\mathbf{G}_j=(\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0},\mathbf{f}'')\in\mathcal{M}_{\overline{\Delta}(0;r)},$$

于是 $\mathbf{F}''\in\mathcal{M}''_{\overline{\Delta}(0;r)}$, 再次利用归纳假设,

$$\mathbf{F}''=\sum_{i=1}^{s}\mathbf{h}''_i\mathbf{g}''_i,$$

这里 $\mathbf{h}''_i\in{}_n\mathcal{O}_{\overline{\Delta}(0;r)}$ 且

$$||\mathbf{h}''_i||_{\overline{\Delta}(0;r)}\leqslant K''||\mathbf{f}''||_{\overline{\Delta}(0;r)}.$$

现在, 令

$$M=\operatorname*{Sup}_{i,j}||\mathbf{a}_{ij}||_{\overline{\Delta}(0;r)}$$

及

$$L = \operatorname*{Sup}_j \|\mathbf{G}_j\|_{\overline{\Delta}(0;r)},$$

则

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^{q} \mathbf{h}_j' \mathbf{G}_j + \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{s} \mathbf{h}_i'' \mathbf{a}_{ij} \mathbf{G}_j = \sum_{j=1}^{q} \mathbf{h}_j \mathbf{G}_j,$$

这里 $\mathbf{h}_j \in {}_n\mathcal{O}_{\overline{\Delta}(0;r)}$, 满足对 $K = K' + sMK'' + qsLMK'K''$ 有

$$\|\mathbf{h}_j\|_{\overline{\Delta}(0;r)} \leqslant K \|\mathbf{F}\|_{\overline{\Delta}(0;r)}.$$

当然, 对任意给定的有限个模, 也有类似的结论, 于是定理得证. □

定理 6.18 任意子模 $\mathcal{M} \in p\mathcal{O}_0$ 是闭的, 这里闭是下面意义下的闭: 任取原点的开邻域 U, 若 $F \in p\mathcal{O}_U$, 且 F 可在 U 的任意紧集上, 被满足在原点的芽属于 $\mathcal{M}$ 的全纯向量值函数逼近, 则 F 在原点的芽 $\mathbf{F} \in \mathcal{M}$.

证明: 令 $G_1, \cdots, G_q \in p\mathcal{O}_V$ 是原点的开邻域 $V \subset U$ 上的全纯函数, 使得

$$\mathbf{G}_1, \cdots, \mathbf{G}_q$$

生成模 $\mathcal{M}$ (这是由于 Noether 环的有限直和可看成是 Noether 环自身上的模, 其子模有限生成的); 选取开多圆柱 $\Delta(0;r) \subset \overline{\Delta}(0;r) \subset V$, 使得定理 6.17 成立. 由假设, 存在一列函数的芽 $\mathbf{F}_n \in \mathcal{M}_{\overline{\Delta}(0;r)}$, 满足当 $n \to \infty$ 时 $\|\mathbf{F} - \mathbf{F}_n\|_{\overline{\Delta}(0;r)} \longrightarrow 0$. 由定理 6.17, 有表示

$$\mathbf{F}_n = \sum_{j=1}^{q} \mathbf{h}_{jn} \mathbf{G}_j,$$

这里 $\mathbf{h}_{jn} \in \mathcal{O}_{\overline{\Delta}(0;r)}$ 且

$$\|\mathbf{h}_{jn}\|_{\overline{\Delta}(0;r)} \leqslant K \|\mathbf{F}_n\|_{\overline{\Delta}(0;r)}.$$

于是函数 $h_{jn}(z)$ 在紧集 $\overline{\Delta}(0;r)$ 上一致有界, 且由 Cauchy 积分公式, 所有其偏导数在 $\Delta\left(0;\frac{1}{2}r\right)$ 上一致有界. 从而 h_{jn} 是正规族, 故存在其子列 (不妨设为其本身) 在 $\Delta\left(0,\frac{1}{2}r\right)$ 上一致收敛到函数 $h_j(z)$, 自然有 $h_j(z) \in \mathcal{O}_{\Delta(0,\frac{1}{2}r)}$. 从而, 当 $z \in \Delta\left(0;\frac{1}{2}r\right)$,

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} F_n(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{q} h_{jn}(z) G_j(z) = \sum_{j=1}^{q} h_j(z) G_j(z),$$

因此 $\mathbf{F} \in \mathcal{M}$, 定理得证. □

第七章 凝聚层

本章我们先介绍凝聚层的概念并讨论凝聚层的各种基本性质, 然后证明 Oka 定理, 即全纯函数芽层是 Oka 环层.

§7.1 凝 聚 层

令 $\mathcal{R}$ 是拓扑空间 X 上的含幺交换环层, 一般我们假定 $1 \in \Gamma(X, \mathcal{R})$, 这里

$$1(x) = 1_x \in \mathcal{R}_x.$$

本节, 我们始终要求环层 $\mathcal{R}$ 满足 $1 \in \Gamma(X, \mathcal{R})$ 的含幺交换环层.

定义 7.1 令 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 上的 $\mathcal{R}$-模层, 若对任意 $x \in X$, 存在 $U \in \mathcal{U}_x$ 及有限多个截影 $f_1, \cdots, f_k \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, 满足 $\mathcal{F}|_U$ 可由 $f_1, \cdots, f_k$ 生成, 即 $\forall y \in U$, $\mathcal{F}_y$ 是由 $f_1(y), \cdots, f_k(y)$ 生成的 $\mathcal{R}_y$-模, 记为 $\mathcal{F}_y = \mathcal{R}_y\big(f_1(y), \cdots, f_k(y)\big)$, 则称 $\mathcal{F}$ 是**有限生成 $\mathcal{R}$-模层**, 或更精确地说, 是**局部有限生成 $\mathcal{R}$-模层**.

由于 $1 \in \Gamma(X, \mathcal{R})$, 若令

$$E_i = (\underbrace{0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0}_{1\text{ 在第 } i \text{ 个位置}}); \quad 1 \leqslant i \leqslant k,$$

则 $E_i \in \Gamma(X, k\mathcal{R})$, 这里

$$k\mathcal{R} = \underbrace{\mathcal{R} \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}}_{k \text{ 次}}.$$

对 $\forall U \in \mathcal{U}_X$, $E_i \in \Gamma(U, k\mathcal{R})$, 事实上, 这里的 E_i 表示其在 U 上的限制, 一般在不会引起混淆的情况下, 我们省去限制符号. 如果

$$k\mathcal{R} \xrightarrow{\lambda} \mathcal{F}|_U \longrightarrow 0 \tag{7.1}$$

是 $\mathcal{R}$-模层的正合列, 即 λ 是满射, 则 $\mathcal{F}|_U$ 可由 $f_i = \lambda(E_i)$; $1 \leqslant i \leqslant k$ 生成:

$\forall \mathbf{a} \in \mathcal{F}_x$; $x \in U$, 存在 $(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_k) \in k\mathcal{R}_x$ 满足 $\lambda(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_k) = \mathbf{a}$, 换句话说, 由于 $(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{r}_i E_i(x)$,

$$\mathbf{a} = \lambda(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_k) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbf{r}_i E_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{r}_i \lambda\big(E_i(x)\big) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{r}_i f_i(x).$$

从而, 若 $\forall x \in X$, 都有 $U \in \mathcal{U}_x$ 使得 (7.1) 正合, 则必有 $\mathcal{F}$ 有限生成.

另一方面, 如果层 $\mathcal{F}$ 是有限生成的, 则对任意的 $x \in X$, 都存在开集 $U \in \mathcal{U}_x$ 及形如 (7.1) 的 $\mathcal{R}$-模层正合列:

由于 $\mathcal{F}$ 有限生成, 故存在 $U \in \mathcal{U}_x$, $\mathcal{F}|_U$ 可由 $f_1, \cdots, f_k \in \Gamma(U, \mathcal{F})$ 生成, 于是可定义 $\mathcal{R}$-模层的满同态 $\lambda : k\mathcal{R}|_U \longrightarrow F|_U$, 即 λ 可由 $\lambda(E_i) = f_i$; $1 \leqslant i \leqslant k$ 确定, 换句话说, $\forall(\mathbf{r}_1. \cdots . \mathbf{r}_k) \in k\mathcal{R}_x$, $\lambda(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{r}_i f_i(x)$; $\forall x \in U$. 事实上, 我们有更一般的结论, 假定 $\mathcal{F}. \mathcal{G}$ 是 $\mathcal{R}$-模层, $\mathcal{G}|_U$ 由 $g_1, \cdots, g_k \in \Gamma(U, \mathcal{G})$ 生成, 且 $f_1, \cdots, f_k \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, 则下式可定义 $\mathcal{R}$-模层同态 $\lambda : \mathcal{G}|_U \longrightarrow \mathcal{F}|_U$:

$$\lambda(g_i) = f_i; \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

这是因为 $\forall x \in U$, $\forall \mathbf{g} \in \mathcal{G}_x$, 令 $\mathbf{g} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{r}_i g_i(x)$, 则可定义 $\lambda(\mathbf{g}) := \sum_{i=1}^{k} \mathbf{r}_i f_i(x)$, 显然此时 $\lambda(g_i) = f_i$; $1 \leqslant i \leqslant k$. 由 λ 的定义, $\lambda|_{\mathcal{G}_x} : \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{F}_x$ 显然是 $\mathcal{R}_x$-模同态, λ 的连续性可由 $\mathcal{R}$-模及 λ 的定义导出.

综上所述, (7.1) 在每个局部开邻域正合等价于模层有限生成.

定义 7.2 令 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 上的 $\mathcal{R}$-模层, $\forall U \in \mathcal{U}_X$, $f_1, \cdots, f_k \in \Gamma(U, \mathcal{F})$; $k \in \mathbf{Z}^+$, 可定义

$$\mathrm{Re}(f_1, \cdots, f_k) := \left\{(\mathbf{r}_1, \cdots, \mathbf{r}_k) \in k\mathcal{R}_x \,\middle|\, \sum_{i=1}^{k} \mathbf{r}_i f_i(x) = 0;\ \forall x \in U\right\},$$

显然它是 $k\mathcal{R}|_U$ 的子层, 称其为 $f_1, \cdots, f_k$ 的**关系层**.

定义 7.3 称拓扑空间 X 上的 $\mathcal{R}$-模层 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{R}$ **凝聚层**; 若 $\mathcal{F}$ 有限生成且 $\forall x \in X$, 存在 $U \in \mathcal{U}_X$ 与任给的 $f_1, \cdots, f_k \in \Gamma(U, \mathcal{F})$, 关系层 $\mathrm{Re}(f_1, \cdots, f_k)$ 在 U 上有限生成.

定义 7.4 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 上的层, 定义

$$\mathrm{Supp}\ \mathcal{F} = \{x \in X | \mathcal{F}_x \neq 0\}.$$

命题 7.5 令 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 X 上的层, 且 $\mathcal{F}$ 有限生成, 则 $\mathrm{Supp}\ \mathcal{F}$ 是 X 的闭子集.

证明: 令 $W = X \backslash \mathrm{Supp}\ \mathcal{F}$, 只需证 W 是开集. 若 $W = \varnothing$, 则 $\mathrm{Supp}\ \mathcal{F} = X$; 若 $W \neq \varnothing$, 则 $\forall x \in W$, 都有 $U_x \subset W$ 满足 $\mathcal{F}|_{U_x}$ 可由有限个 $s_1, \cdots, s_k$, $s_i \in \Gamma(W_x, \mathcal{F})$; $1 \leqslant i \leqslant k$ 生成, 且 $s_1(x) = \cdots = s_k(x) = 0$, 于是 $\mathrm{Im}\ s_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Im}\ s_k \cap \mathrm{Im}\ 0$ 是 $\mathcal{F}$ 的非空开集: 这里 $\mathrm{Im}\ s_i$ 是 s_i 的像, 0 指零截影, 且 $0_x \in \mathrm{Im}\ s_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Im}\ s_k \cap \mathrm{Im}\ 0$, 于是 $\mathrm{Im}\ s_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Im}\ s_k \cap \mathrm{Im}\ 0$ 非空. 它是开集是因为 π 是局部同胚, 所以是开映射, 从而 $V = \{y \in U_x | s_1(y) = \cdots = s_k(y) = 0_y\}$ 是 X 的开集, 因此 W 是 X 的开集. □

定义 7.6 令 $\mathcal{R}$ 是环层, 若对任意 $W \in \mathcal{U}_X$, 任意 $\mathcal{R}$-模同态

$$\lambda : p\mathcal{R}|_W \longrightarrow q\mathcal{R}|_W; \quad p,\ q \in \mathbf{Z}^+$$

都有以下性质: 对任意 $x \in W$, 都存在 $U_x \in \mathcal{U}_x$, $U_x \subset W$ 及 $\mathcal{R}$-模同态 $\mu : s\mathcal{R}|_{U_x} \longrightarrow p\mathcal{R}|_{U_x}$ 满足

$$s\mathcal{R}|_{U_x} \xrightarrow{\mu} p\mathcal{R}|_{U_x} \xrightarrow{\lambda} q\mathcal{R}|_{U_x} \tag{7.2}$$

正合, 则称 $\mathcal{R}$ 是 **Oka 环层**.

定义 7.6 告诉我们如果 $\mathcal{R}$ 是 Oka 环层, 将 $\mathcal{R}$ 看成是 $\mathcal{R}$-模层, 由于对任意

$$\lambda : p\mathcal{R}|_U \longrightarrow \mathcal{R}|_U; \quad U \in \mathcal{U}_X,$$

$\mathrm{Ker}\ \lambda$ 是截影 $\lambda(E_1), \cdots, \lambda(E_p)$ 的关系层, 利用 $q = 1$ 时的 (7.2), 知此关系层在 U 上有限生成. 而在 (7.2) 中令 $q = 0, p = 1$, 知 $\mathcal{R}$ 有限生成. 于是若 $\mathcal{R}$ 是 Oka 环层, 则 $\mathcal{R}$ 作为 $\mathcal{R}$-模层一定是 $\mathcal{R}$ 凝聚层. 反之, 假定 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{R}$ 凝聚层, 则必有 $\mathcal{R}$ 是 Oka 环层. 我们通过对 $q \in \mathbf{Z}^+$ 归纳证明这一事实.

对任意的

$$\lambda : p\mathcal{R}|_W \longrightarrow q\mathcal{R}|_W, \tag{7.3}$$

我们要构造下表

$$t\mathcal{R} \xrightarrow{\lambda_2} s\mathcal{R} \xrightarrow{\lambda_1} p\mathcal{R} \xrightarrow{\lambda} q\mathcal{R} \begin{array}{l} \overset{p_1}{\nearrow} \quad \mathcal{R} \\ \\ \underset{p_2}{\searrow} (q-1)\mathcal{R} \end{array} \tag{7.4}$$

这里 p_1, p_2 分别是直和 $\mathcal{R} = \mathcal{R} \oplus (q-1)\mathcal{R}$ 到第一个分量与到余下的 $q-1$ 个分量的投影, 对 $\forall x \in W$, 考虑 $p_1 \circ \lambda : p\mathcal{R}|_U \longrightarrow \mathcal{R}|_U$, 由于 $\mathcal{R}$ 是凝聚层, 存在 $U_x \in \mathcal{U}_x$ 及 $\lambda_1 : s\mathcal{R}|_{U_x} \longrightarrow p\mathcal{R}|_{U_x}$ 使得

$$s\mathcal{R} \xrightarrow{\lambda_1} p\mathcal{R} \xrightarrow{p_1 \circ \lambda} \mathcal{R}$$

在 $p\mathcal{R}$ 处正合于 U_x. 现在假定结论对 $q \leqslant k-1$ 成立, 则存在 $U'_x \in \mathcal{U}_x$; $U'_x \subset U_x$ 及层同态 $\lambda_2 : t\mathcal{R} \longrightarrow s\mathcal{R}$ 使得

$$t\mathcal{R} \xrightarrow{\lambda_2} s\mathcal{R} \xrightarrow{p_2 \circ \lambda \circ \lambda_1} (q-1)\mathcal{R}$$

在 $s\mathcal{R}$ 处正合于 U'_x.

现在我们来证明在 U'_x 上有 $\mathrm{Im}(\lambda_1 \circ \lambda_2) = \mathrm{Ker}\ \lambda$: 这是因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\ \lambda &= \lambda^{-1}(0) = \lambda^{-1}\big(p_1^{-1}(0) \cap p_2^{-1}(0)\big) = \lambda^{-1}p_1^{-1}(0) \cap \lambda^{-1}p_2^{-1}(0) \\ &= \lambda_1(s\mathcal{R}) \cap \lambda_1\big(\lambda_2(t\mathcal{R})\big) = \lambda_1\lambda_2(t\mathcal{R}).\end{aligned}$$

于是

$$t\mathcal{R} \xrightarrow{\lambda_1 \circ \lambda_2} p\mathcal{R} \xrightarrow{\lambda} q\mathcal{R}$$

正合于 U'_x.

因此 $\mathcal{R}$ 作为 $\mathcal{R}$-模层凝聚等价于 $\mathcal{R}$ 是 Oka 环层.

显然, 若 $\mathcal{R}$ 是 Oka 环层, 则所有的 $p\mathcal{R}$; $p \in \mathbf{Z}^+$ 都是 $\mathcal{R}$ 凝聚层.

命题 7.7 令 $\mathcal{R}$ 是 Oka 环层, $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{R}$ 凝聚层, 且 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{F}$ 的有限生成子层, 则 $\mathcal{S}$ 也是 $\mathcal{R}$ 凝聚层.

证明: 由于 $\mathcal{S}$ 已经是有限生成的了, 所以只需证关系层有限生成. $\forall U \in \mathcal{U}_X$, $\forall s_1, \cdots, s_k \in \Gamma(U, \mathcal{S})$, 将 $s_1, \cdots, s_k$ 看成 $\mathcal{F}$ 在 U 上的截影, 知 $\mathrm{Re}(s_1, \cdots, s_k)$ 在 U 上有限生成. □

命题 7.8 令 $\mathcal{R}$ 是 Oka 环层, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{R}$ 凝聚层, $\lambda : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ 是 $\mathcal{R}$-模层同态, 则 $\mathrm{Ker}\ \lambda$ 和 $\mathrm{Im}\ \lambda$ 均为 $\mathcal{R}$ 凝聚层.

证明: 由于 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{R}$ 凝聚层, 由命题 7.7, 只需证 Ker λ, Im λ 有限生成. 由于 Im $\lambda=\lambda(\mathcal{F})$ 且 $\mathcal{F}$ 有限生成, 故 Im λ 有限生成.

现在只需证 Ker λ 有限生成: 由于 $\mathcal{F}$ 凝聚, $\forall x\in X$, 存在 $U\in\mathcal{U}_x$ 及 $\mathcal{R}$-模层满同态 $\mu: p\mathcal{R}|_U\longrightarrow\mathcal{F}|_U$, 于是有

$$\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & & \uparrow \\ \mathcal{F}|_U & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{G}|_U \\ \mu\uparrow & & \\ p\mathcal{R}|_U & & \end{array}$$

由于 $\mathcal{G}$ 凝聚, 故 $\mathrm{Ker}(\lambda\circ\mu)=\mu^{-1}\lambda^{-1}(0)$ 在 U 上有限生成. 从而 $\mu\big(\mathrm{Ker}(\lambda\circ\mu)\big)=\lambda^{-1}(0)=\mathrm{Ker}\,\lambda$ 在 U 上有限生成, 命题证毕. □

命题 7.9 令 $\mathcal{R}$ 是 Oka 环层, $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{R}$ 凝聚层, $\mathcal{S}_1$ 与 $\mathcal{S}_2$ 均为 $\mathcal{F}$ 的有限生成子层, 则 $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2$ 与 $\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2$ 均为 $\mathcal{R}$ 凝聚层.

证明: 由于 $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ 有限生成, 故 $\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2$ 有限生成, 由命题 7.7, $\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2$ 是 $\mathcal{R}$ 凝聚层.

由于 $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2$ 仍是 $\mathcal{F}$ 的子层, 由命题 7.7, 只需证明 $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2$ 有限生成. 对 $\forall x\in X$, 存在 $U\in\mathcal{U}_X$ 使得以下两个序列正合

$$s\mathcal{R}|_U\xrightarrow{\sigma}\mathcal{S}_1|_U\longrightarrow 0,\tag{7.5}$$

$$t\mathcal{R}|_U\xrightarrow{\tau}\mathcal{S}_2|_U\longrightarrow 0.\tag{7.6}$$

定义层同态

$$\sigma+\tau: s\mathcal{R}|_U\oplus t\mathcal{R}|_U\longrightarrow\mathcal{F}|_U,$$
$$(\mathbf{f},\mathbf{g})\longmapsto\sigma(\mathbf{f})+\tau(\mathbf{g}),$$

这里 $(\mathbf{f},\mathbf{g})\in(s+t)\mathcal{R}_y$, $\forall y\in U$.

令 $\mathcal{H}=\mathrm{Ker}(\sigma+\tau)$, 若 $(\mathbf{f},\mathbf{g})\in\mathcal{H}$, 则 $\sigma(\mathbf{f})+\tau(\mathbf{g})=0$, 即 $\sigma(\mathbf{f})\big($或 $\tau(\mathbf{g})\big)\in\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2$. 另一方面, 如果 $\mathbf{b}\in\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2$, 则由 (7.5) 及 (7.6) 的正合性, 存在 $\mathbf{f}\in s\mathcal{R}$ 及 $\mathbf{g}\in t\mathcal{R}$ 使得 $\mathbf{b}=\sigma(\mathbf{g})=\tau(\mathbf{f})$, 从而 $(\mathbf{f},-\mathbf{g})\in\mathcal{H}$. 因为 $\mathcal{F}$ 凝聚,

$$\mathcal{H}=\mathrm{Ker}(\sigma+\tau),\ \sigma+\tau:(s+t)\mathcal{R}\longrightarrow\mathcal{F},$$

所以 $\mathcal{H}$ 有限生成. 考虑 $\mathcal{R}$-模同态

$$\tilde{\sigma}:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{F}:\tilde{\sigma}(\mathbf{f},\mathbf{g})=\sigma(\mathbf{f}),$$

由前面的讨论 Im $\tilde{\sigma}=\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2$, 故 $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2$ 有限生成. 由命题 7.7, 知 $\mathcal{S}_1\cap\mathcal{S}_2$ 也是 $\mathcal{R}$ 凝聚层. □

引理 7.10 设 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ 是拓扑空间 X 上的两个 $\mathcal{R}$-模层, 且 $\lambda : p\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{F}$; $p \in \mathbf{Z}^+$ 与 $\mu : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ 均为 $\mathcal{R}$-模层同态, 满足 $\lambda(p\mathcal{R}) \subset \mu(\mathcal{G})$, 则对任意 $x \in X$, 存在 $U \in \mathcal{U}_x$ 及 $\mathcal{R}$-模同态 $\nu : p\mathcal{R}|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$, 满足 $\mu \circ \nu = \lambda$.

证明: 假定 E_i, $i = 1, \cdots, p$ 是 $p\mathcal{R}$ 上的典则截影, $F_i = \lambda(E_i) \in \Gamma(X, \mathcal{F})$; $1 \leqslant i \leqslant p$. 对 $\forall x \in X$, $F_i(x) \in \lambda(p\mathcal{R}_x) \subset \mu(\mathcal{G}_x)$, 故存在开集 $U \in \mathcal{U}_x$ 及 $G_i \in \Gamma(U, \mathcal{G})$, 使得 $\mu(G_i) = F_i|_U$. 则可定义 $\mathcal{R}$-模层同态 $\nu : p\mathcal{R}|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$, 即 ν 满足 $\nu(E_i|_U) = G_i$; $1 \leqslant i \leqslant p$, 从而在 U 上有 $\mu \circ \nu = \lambda$. □

推论 7.11 若用有限生成 $\mathcal{R}$-模层 $\mathcal{H}$ 代替 $p\mathcal{R}$, 前面的引理依然成立.

证明: $\forall x \in X$, 由于 $\mathcal{H}$ 有限生成, 故存在 $U \in \mathcal{U}_x$ 及 $\mathcal{R}$-模满同态 $\alpha : l\mathcal{R}|_U \longrightarrow \mathcal{H}|_U$, 下面我们来构造下表

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & \mathcal{F} & & \\ & \overset{\lambda}{\nearrow} & & \nwarrow \mu & \\ \uparrow & & & & \\ \mathcal{H} & & \overset{\nu}{\cdots\to} & & \mathcal{G} \\ \alpha \uparrow & & \nearrow \beta & & \\ l\mathcal{R} & & & & \end{array}$$

由引理 7.10, 存在开集 $U' \in \mathcal{U}_x$, $U' \subset U$ 及 β, 使得 $\mu \circ \beta = \lambda \circ \alpha$. 令 $G_i = \beta(E_i) \in \Gamma(U', \mathcal{G})$, $H_i = \alpha(E_i) \in \Gamma(U', \mathcal{H})$; $1 \leqslant i \leqslant l$. 则可定义 $\mathcal{R}$-模层同态 $\nu : \mathcal{H}|_{U'} \longrightarrow \mathcal{G}|_{U'}$ 满足 $\nu(G_i) = H_i$, 即 $\nu\big(H_i(x)\big) = G_i(x)$; $\forall x \in U'$, $1 \leqslant i \leqslant l$. 现在 $\forall \mathbf{a} \in \mathcal{H}_y$, $\forall y \in U'$, 有

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{l} \mathbf{r}_i H_i(y), \quad \mathbf{r}_i \in \mathcal{R}_y,$$

于是

$$\nu(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{l} \mathbf{r}_i G_i(y).$$

从而

$$\begin{aligned} \mu \circ \nu(\mathbf{a}) &= \mu \circ \nu \left(\sum_{i=1}^{l} \mathbf{r}_i H_i(y) \right) = \sum_{i=1}^{l} \mathbf{r}_i \mu\big(G_i(y)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \mathbf{r}_i \mu\big(\beta(E_i)(y)\big) = \sum_{i=1}^{l} \mathbf{r}_i \big(\lambda \circ \alpha(E_i)\big)(y) \\ &= \sum_{i=1}^{l} \mathbf{r}_i \lambda\big(H_i(y)\big) = \lambda(\mathbf{a}), \end{aligned}$$

即 $\mu \circ \nu = \lambda$. □

定理 7.12 设 $\mathcal{R}$ 是拓扑空间 X 上的 Oka 环层,

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\lambda} \mathcal{G} \xrightarrow{\mu} \mathcal{H} \longrightarrow 0 \tag{7.7}$$

是 X 上的 $\mathcal{R}$-模层范畴中的正合列, 则 (7.7) 中出现的模层, 若其中任意两个 $\mathcal{R}$ 凝聚, 所有的都 $\mathcal{R}$ 凝聚.

证明: (1) 假定 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{R}$ 凝聚层, 由于 μ 是满射, 故 $\mathcal{H}$ 有限生成, 只需证明 $\mathcal{H}$ 的关联层有限生成, 即若 $\alpha: p\mathcal{R}|_W \longrightarrow \mathcal{H}|_W$ 是 $\mathcal{R}$-模层同态, 则 $\mathrm{Ker}\ \alpha$ 在 W 上有限生成. 我们要构造下表

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & & & \\
0 \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{H} & \longrightarrow 0 \\
 & \uparrow \beta & & & & \uparrow \alpha & \\
 & q\mathcal{R}|_U & & \overset{\eta}{\cdots\longrightarrow} & & p\mathcal{R}|_U &
\end{array} \tag{7.8}$$

由于 $\mathcal{F}$ 凝聚, $\forall x \in W$, 存在 $U \in \mathcal{U}_x$, $U \subset W$ 及 $\mathcal{R}$-模层满同态 $\beta: q\mathcal{R}|_U \longrightarrow \mathcal{F}$. 现在 $\mu\circ\lambda\circ\beta = 0$, 于是可利用引理 7.10, (必要的话可适当缩小 U, 简单起见, 仍用 U 来表示) 存在 $\mathcal{R}$-模层同态 $\eta: q\mathcal{R}|_U \longrightarrow p\mathcal{R}|_U$, 满足 $\alpha\circ\eta = \mu\circ\lambda\circ\beta$, 于是 $\eta^{-1}\circ\alpha^{-1}(0) = \beta^{-1}\circ\lambda^{-1}\circ\mu^{-1}(0)$, $\alpha^{-1}(0) = \eta\big(\beta^{-1}\lambda^{-1}\mu^{-1}(0)\big) = \eta\big(\beta^{-1}(\mathcal{F})\big) = \eta(q\mathcal{R})$, 从而 $\mathrm{Ker}\ \alpha$ 有限生成.

(2) 假定 $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{R}$ 凝聚层, $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{G}$ 的子层, 由命题 7.8, $\mathrm{Ker}\ \mu$ 是 $\mathcal{R}$ 凝聚层, 且由于

$$\lambda: \mathcal{F} \longrightarrow \lambda(\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}\ \mu \tag{7.9}$$

是层同构, 知 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{R}$ 凝聚层.

(3) 假定 $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{R}$ 凝聚层, $\forall x \in X$, 存在 $U \in \mathcal{U}_x$ 及 U 上的 $\mathcal{R}$-模层满同态 α 和 β (见下表), 我们需要构造下表

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & & & 0 & \\
 & \uparrow & & & & \uparrow & \\
0 \longrightarrow & \mathcal{F} & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{H} & \longrightarrow 0 \\
 & \alpha\uparrow & & \delta\uparrow\ \nwarrow\eta & & \beta\uparrow & \\
 & p\mathcal{R}|_U & & l\mathcal{R}|_U & \overset{\vartheta}{\cdots\longrightarrow} & q\mathcal{R}|_U & \\
 & & \omega\nwarrow & & \nearrow i & & \\
 & & & \mathrm{Ker}\ \vartheta & & &
\end{array} \tag{7.10}$$

由于 $\mu(\mathcal{G})|_U = \mathcal{H}|_U = \beta(q\mathcal{R}|_U)$. 由引理 7.10, 存在 $\mathcal{R}$-模层同态 $\eta : q\mathcal{R}|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$, 满足 $\mu \circ \eta = \beta$. 现在定义 $\mathcal{R}$-模层同态

$$(\lambda \circ \alpha \oplus \eta) : p\mathcal{R}|_U + q\mathcal{R}|_U \longrightarrow \mathcal{G};\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in p\mathcal{R}|_U + q\mathcal{R}|_U,$$

$$(\lambda \circ \alpha \oplus \eta)(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\lambda \circ \alpha)(\mathbf{a}) + \eta(\mathbf{b}),$$

如果 $\mathrm{Im}(\lambda \circ \alpha \oplus \eta) = \mathcal{G}$, 则 $\mathcal{G}$ 有限生成. 现在我们证明 $\mathrm{Im}(\lambda \circ \alpha \oplus \mu) = \mathcal{G}$, $\forall \mathbf{g} \in \mathcal{G}_y;\ y \in U$, 存在 $\mathbf{b} \in (q\mathcal{R})_y$, 满足

$$\beta(\mathbf{b}) = \mu(\mathbf{g})$$

及

$$\mu\big(\mathbf{g} - \eta(\mathbf{b})\big) = \mu(\mathbf{g}) - \mu\big(\eta(\mathbf{b})\big) = \beta(\mathbf{b}) - \beta(\mathbf{b}) = 0.$$

于是 $\mathbf{g} - \eta(\mathbf{b}) \in (\mathrm{Ker}\ \mu)_y$, 由于 α 是满射, 故存在 $\mathbf{a} \in (p\mathcal{R})_y$ 满足 $\mathbf{g} - \eta(\mathbf{b}) = (\lambda \circ \alpha)(\mathbf{a})$, 从而 $\mathrm{Im}(\lambda \circ \alpha \oplus \mu) = \mathcal{G}$, 于是 $\mathcal{G}$ 有限生成.

现在我们证明 $\mathcal{G}$ 的任一关系层有限生成. 令 $\delta : l\mathcal{R}|_U \longrightarrow \mathcal{G}|_U$ 是任意 $\mathcal{R}$-模层同态. 我们需证明 $\mathrm{Ker}\ \delta$ 在 U 上有限生成. 由于 $\forall x \in W$, 存在 $U \in \mathcal{U}_x;\ U \subset W$, 使得 (7.10) 中的 $\mathcal{R}$-模层同态 $\alpha : p\mathcal{R}|_U \longrightarrow \mathcal{F}|_U$ 与 $\beta : q\mathcal{R}|_U \longrightarrow \mathcal{H}|_U$ 是满同态, 由于 $\mathrm{Im}(\mu \circ \delta) \subset \mathrm{Im}\ \beta$. 由引理 7.10, 不然的话, 适当缩小 U, 存在 $\mathcal{R}$-模层 $\vartheta : l\mathcal{R}|_U \longrightarrow q\mathcal{R}|_U$ 满足 $\beta \circ \vartheta = \mu \circ \delta$. 由命题 7.8, $\mathrm{Ker}\ \vartheta$ 是 U 上的凝聚层. 在 (7.10) 中,

$$0 = \beta \circ \vartheta \circ i = \mu \circ \delta \circ i,$$

这里 i 是单层同态, 故 $\mathrm{Im}(\delta \circ i) \subset \mathrm{Ker}\ \mu = \mathrm{Im}\ \lambda$, 由于 $\mathrm{Ker}\ \vartheta$ 凝聚, 由推论 7.11, 有 $\mathcal{R}$-模层同态 $\omega : \mathrm{Ker}\ \vartheta \longrightarrow p\mathcal{R}$ 满足 $\lambda \circ \alpha \circ \omega = \delta \circ i$, 于是 $\mathrm{Ker}(\delta \circ i) = i^{-1}\delta^{-1}(0) = \mathrm{Ker}(\lambda \circ \alpha \circ \omega)$, 由于 i 是单射, 故

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\ \delta = \delta^{-1}(0) &\cong \mathrm{Ker}(\lambda \circ \alpha \circ \omega)\\ &= \omega^{-1} \circ \alpha^{-1} \circ \lambda^{-1}(0) = \omega^{-1} \circ \alpha^{-1}(0) = \mathrm{Ker}(\alpha \circ \omega).\end{aligned}$$

由于 $\mathcal{F}$ 与 $\mathrm{Ker}\ \vartheta$ 均为 $\mathcal{R}$ 凝聚层, 由命题 7.8, $\mathrm{Ker}(\alpha \circ \omega)$ 凝聚, 从而 $\mathrm{Ker}\ \delta$ 是 $\mathcal{R}$ 凝聚层. □

§7.2 Oka 定 理

令 ${}_n\mathcal{O}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中区域 (或 n 维复流形) D 上的全纯函数芽层. 我们将证明 ${}_n\mathcal{O}$ 是 Oka 环层, 即 ${}_n\mathcal{O}$ 是 ${}_n\mathcal{O}$ 凝聚层.

定理 7.13 (Oka 定理) ${}_n\mathcal{O}$ 是 Oka 环层.

证明: 由上一章的最后一部分讨论可知, ${}_n\mathcal{O}$ 是有限生成的, 故为证明 ${}_n\mathcal{O}$ 是 ${}_n\mathcal{O}$ 凝聚层, 只需 ${}_n\mathcal{O}$ 的任一关系层有限生成.

令 $\mu : p\ {}_n\mathcal{O} \longrightarrow {}_n\mathcal{O}$ 是开集 $U \subset D$ 上的 $\mathcal{O}$-模层同态, 只需证明 $\forall x \in U$, 存在 x 的邻域 V 及 ${}_n\mathcal{O}$-模层同态 $\lambda : q\ {}_n\mathcal{O}|V \longrightarrow p\ {}_n\mathcal{O}|V$, 满足

$$q\ {}_n\mathcal{O}|V \xrightarrow{\lambda} p\ {}_n\mathcal{O}|V \xrightarrow{\mu} {}_n\mathcal{O}$$

正合.

不失一般性, 假定 x 点对应的局部坐标的各个分量均为零.

我们对复维数 n 归纳证明, 当 $n = 0$, 问题是平凡的; 这是因为 ${}_0\mathcal{O} = \mathbf{C}$, 且 $\mu : \mathbf{C}^p \longrightarrow \mathbf{C}$ 是线性映射, 于是 $\mathrm{Ker}\,\mu$ 是有限维子空间, 故存在线性映射 $\lambda : \mathbf{C}^r \longrightarrow \mathbf{C}^p$, 满足 $\mathbf{C}^r \xrightarrow{\lambda} \mathbf{C}^p \xrightarrow{\mu} \mathbf{C}$ 正合. 由归纳假设, 定理对 ${}_{n-1}\mathcal{O}$ 成立, 需要证明定理对 ${}_n\mathcal{O}$ 也成立. 分析前面给出的 $\mathcal{O}$-模层同态

$$\mu : p\ {}_n\mathcal{O} \longrightarrow {}_n\mathcal{O},$$

假定 $\mu(E_i) = \varphi_i;\ 1 \leqslant i \leqslant p$, φ_i 是 x 的邻域 V 上的全纯函数, 不失一般性, 可假定 $\varphi_1, \cdots, \varphi_p$ 均在 V 上对 z_n 正则, 于是

$$\varphi_i = u_i h_i; \quad 1 \leqslant i \leqslant p,$$

这里 h_i 是 Weierstrass 多项式, u_i 是 ${}_n\mathcal{O}_0$ 中单位, 适当缩小 V, 不妨假定 u_i 在 V 上恒不为零. 定义同态层

$$\begin{aligned} u : p\ {}_n\mathcal{O} &\longrightarrow p\ {}_n\mathcal{O}, \\ (\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_p) &\longmapsto (\mathbf{u}_1^{-1}\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{u}_p^{-1}\mathbf{f}_p). \end{aligned}$$

显然, u 是 V 上的层同构, 考虑

$$\begin{aligned} a = \mu \circ u : p\ {}_n\mathcal{O} &\longrightarrow {}_n\mathcal{O}, \\ (\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{f}_p) &\longmapsto (\mathbf{f}_1\mathbf{h}_1, \cdots, \mathbf{f}_p\mathbf{h}_p), \end{aligned} \tag{7.11}$$

知 $\mathrm{Ker}\, a \cong \mathrm{Ker}\,\mu$. 由于 $h_1, \cdots, h_p \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$, 令

$$m = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \deg h_i.$$

设 $p\big({}^{d}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]\big)$ 是系数在 ${}_{n-1}\mathcal{O}$ 中的关于 z_n 的阶不超过 d 的多项式芽层, 显然它是 $p\ {}_n\mathcal{O}$ 的子层. 于是有两个层同构

$$\begin{aligned} i(d) : {}^{d}_{n-1}\mathcal{O}[z_n] &\longrightarrow (d+1)\ {}_{n-1}\mathcal{O}, \\ a_d z_n^d + \cdots + a_0 &\longmapsto (a_d, \cdots, a_0) \end{aligned}$$

及

$$i_p(d) : p({}_{n-1}^{\ d}\mathcal{O}[z_n]) \cong p(d+1)\ {}_{n-1}\mathcal{O}.$$

a 在 $p({}_{n-1}^{\ d}\mathcal{O}[z_n])$ 上的限制是

$$a : p({}_{n-1}^{\ d}\mathcal{O}[z_n]) \longrightarrow {}_{n-1}^{d+m}\mathcal{O}[z_n]. \tag{7.12}$$

由于 ${}_{n-1}^{d+m}\mathcal{O}[z_n] \cong (d+m+1)\ {}_{n-1}\mathcal{O}$, 故 a 是 ${}_{n-1}\mathcal{O}$-模层同态. 我们要构造下面的图

$$\begin{array}{ccccc} & & p({}_{n-1}^{\ d}\mathcal{O}[z_n]) & \xrightarrow{a} & (d+m)\ {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n] \\ & & i_p(d)\downarrow & & \downarrow i(d+m) \\ r\ {}_{n-1}\mathcal{O} & \xrightarrow{\tilde{\lambda}} & p(d+1)\ {}_{n-1}\mathcal{O} & \xrightarrow{\tilde{a}} & (d+m+1)\ {}_{n-1}\mathcal{O} \end{array} \tag{7.13}$$

这里 $\tilde{a} = i(d+m)\circ a \circ i_p(d)^{-1}$ 是 ${}_{n-1}\mathcal{O}$-模层同态, 由归纳假设, 存在 $x=0$ 的开邻域 V 及 ${}_{n-1}\mathcal{O}$-模层同态 $\tilde{\lambda} : r\ {}_{n-1}\mathcal{O} \longrightarrow p(d+1)\ {}_{n-1}\mathcal{O}$, 满足

$$r\ {}_{n-1}\mathcal{O} \xrightarrow{\tilde{\lambda}} p(d+1)\ {}_{n-1}\mathcal{O} \xrightarrow{\tilde{a}} (d+m+1)\ {}_{n-1}\mathcal{O} \tag{7.14}$$

是 V 上的正合列.

现在令 $\lambda = i_p(d)^{-1}\circ\tilde{\lambda} : r\ {}_{n-1}\mathcal{O} \longrightarrow p({}_{n-1}^{\ d}\mathcal{O}[z_n])$, 其矩阵表示里的每个元素, 都是关于 z_n 的系数在 ${}_{n-1}\mathcal{O}$ 中的多项式, 将其矩阵表示, 即 $r\times p$ 矩阵简记为

$$\begin{pmatrix} \lambda(E_1) \\ \vdots \\ \lambda(E_r) \end{pmatrix}.$$

可将 λ 及 $a : p({}_{n-1}^{\ d}\mathcal{O}[z_n]) \longrightarrow (d+m)\ {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$ 分别自然地延拓到 $r\ {}_n\mathcal{O} \longrightarrow p\ {}_n\mathcal{O}$ 及 $p\ {}_n\mathcal{O} \longrightarrow {}_n\mathcal{O}$.

对任意的 $y=(y_1,\cdots,y_n)\in V$, h_i; $1\leqslant i\leqslant p$ 可能不是 y 点关于 (z_n-y_n) 的 Weierstrass 多项式. 令 $\mathbf{h}_i = \mathbf{h}_i'\mathbf{h}_i''$; $1\leqslant i\leqslant p$, $\mathbf{h}_i'$ 是 y 点关于 (z_n-y_n) 的 Weierstrass 多项式, $\mathbf{h}_i''$ 是 ${}_n\mathcal{O}_y$ 中单位. $\forall \mathbf{f} = (\mathbf{f}_1,\cdots,\mathbf{f}_p)\in p\ {}_n\mathcal{O}$, 对 $\mathbf{f}$ 使用 Weierstrass 除法定理, 有

$$\mathbf{f} = h_1'(\mathbf{f}_1',\cdots,\mathbf{f}_p') + (\mathbf{r}_1',\cdots,\mathbf{r}_p')$$

且 $\deg \mathbf{r}_i' < m_1' = \deg \mathbf{h}_1'$; $1\leqslant i\leqslant p$. 令 $\mathbf{r}' = (\mathbf{r}_1',\cdots,\mathbf{r}_p')$, $\mathbf{f}' = (\mathbf{f}_1',\cdots,\mathbf{f}_p')$, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{f} =& \mathbf{h}_1'\mathbf{h}_1''(\mathbf{h}_1'')^{-1}\mathbf{f}' + \mathbf{r}' = \mathbf{h}_1'\mathbf{h}_1''^{-1}\mathbf{f}'' + \mathbf{r}' \\ =& (\mathbf{h}_1\mathbf{f}_1'' + \mathbf{h}_2\mathbf{f}_2'' + \cdots + \mathbf{h}_p\mathbf{f}_p'', 0,\cdots,0) + \mathbf{f}_2''(-\mathbf{h}_2,\mathbf{h}_1,0,\cdots,0) \\ & + \mathbf{f}_3''(-\mathbf{h}_3,0,\mathbf{h}_1,0,\cdots,0) + \cdots + \mathbf{f}_p''(-\mathbf{h}_p,0,\cdots,0,\mathbf{h}_1) + \mathbf{r}', \end{aligned}$$

这里

$$\mathbf{f}'' = \mathbf{h}_1'' f' = (\mathbf{h}_1''\mathbf{f}_1, \cdots, \mathbf{h}_1''\mathbf{f}_p).$$

取 $d > m$, 则

$$\underbrace{(-\mathbf{h}_i, 0, \cdots, 0, \mathbf{h}_1, 0, \cdots, 0)}_{\text{第 } i \text{ 个}} \in p({}^d_{n-1}\mathcal{O})$$

在 a 下的像为零, 由 (7.13) 的正合性, 存在 $\mathbf{g}_i \in r\ {}_{n-1}\mathcal{O}$; $1 \leqslant i \leqslant p$, 满足

$$\lambda(\mathbf{g}_i) = \underbrace{(-\mathbf{h}_i, 0, \cdots, 0, \mathbf{h}_1, 0, \cdots, 0)}_{\text{第 } i \text{ 个}},$$

于是

$$\mathbf{f} = (\mathbf{h}_1\mathbf{f}_1'' + \mathbf{h}_2\mathbf{f}_2'' + \cdots + \mathbf{h}_p\mathbf{f}_p'', 0, \cdots, 0) + \mathbf{r}' + \lambda\Big(\sum_{i=1}^p \mathbf{f}_i''\mathbf{g}_i\Big).$$

令 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{h}_1\mathbf{f}_1'' + \cdots, \mathbf{h}_p\mathbf{f}_p'' + \mathbf{r}_1'$, 若 $a(\mathbf{f}) = 0$, 则必有 $a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2', \cdots, \mathbf{r}_p') = 0$, 即

$$\mathbf{h}_1\mathbf{r}_1 + \mathbf{h}_2\mathbf{r}_2' + \cdots + \mathbf{h}_p\mathbf{r}_p' = 0. \tag{7.15}$$

由于 $\mathbf{h}_2\mathbf{r}_2', \cdots, \mathbf{h}_p\mathbf{r}_p' \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$, 故 $\mathbf{h}_1\mathbf{r}_1 \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$, 又因为 $\mathbf{h}_1\mathbf{r}_1 = \mathbf{h}_1'\mathbf{h}_1''\mathbf{r}_1$, $\mathbf{h}_1'$ 是 Weierstrass 多项式, 知 $\mathbf{h}_1''\mathbf{r}_1 \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]$. 由于

$$\mathbf{h}_1\mathbf{r}_i' \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]; \quad 2 \leqslant i \leqslant p$$

且 $\mathbf{h}_1'$ 是 y 点关于 $(z_n - y_n)$ 的 Weierstrass 多项式, 故

$$\mathbf{h}_1''\mathbf{r}_i' \in {}_{n-1}\mathcal{O}[z_n]; \quad 2 \leqslant i \leqslant p.$$

因此

$$\mathbf{h}_1''(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2', \cdots, \mathbf{r}_p') \in p({}^d_{n-1}\mathcal{O}[z_n]),$$

且有

$$\begin{aligned}\deg(\mathbf{h}_1''\mathbf{r}_i') &= \deg(\mathbf{h}_1\mathbf{r}_i') - \deg\ (\mathbf{h}_1') \\ &= \deg\ (\mathbf{h}_1) + \deg(\mathbf{r}_i') - \deg\ (\mathbf{h}_1') \\ &\leqslant \deg\ (\mathbf{h}_1) \leqslant m < d\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}\deg(\mathbf{h}_1''\mathbf{r}_1) &= \deg(\mathbf{h}_1\mathbf{r}_1) - \deg(\mathbf{h}_1') \\ &\leqslant \max_{2\leqslant i\leqslant p} \deg(\mathbf{h}_i\mathbf{r}_i') - \deg\ (\mathbf{h}_1') \\ &\leqslant \max_{2\leqslant i\leqslant p} \deg\ (\mathbf{h}_i) \leqslant m < d.\end{aligned}$$

由于 $a\big(\mathbf{h}_1''(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2',\cdots,\mathbf{r}_p')\big) = \mathbf{h}_1''a(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2',\cdots,\mathbf{r}_p') = 0$ 且 $\mathbf{h}_1''(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2',\cdots,\mathbf{r}_p') \in p({}^d_{n-1}\mathcal{O}[z_n])$, 故存在 $\mathbf{g}' \in r\ {}_{n-1}\mathcal{O}$ 满足 $\lambda(\mathbf{g}') = \mathbf{h}_1''(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2',\cdots,\mathbf{r}_p')$, 令

$$\mathbf{g} = (\mathbf{h}_1'')^{-1}\mathbf{g}' + \sum_{i=1}^{p}\mathbf{f}_i''\mathbf{g}_i \in p\ {}_{n-1}\mathcal{O}_y,$$

则

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{g}) &= (\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2',\cdots,\mathbf{r}_p') + \sum_{i=2}^{p}\mathbf{f}_i''\lambda(\mathbf{g}_i)\\ &= \mathbf{f}.\end{aligned}$$

于是,

$$r\ {}_n\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda} p\ {}_n\mathcal{O} \xrightarrow{a} {}_n\mathcal{O} \tag{7.16}$$

在 y 点正合. 由于 y 是 V 中的任意点, 知 (7.16) 在 V 上正合, 定理证毕. □

令 $\mathcal{F}$ 是 ${}_n\mathcal{O}$ 凝聚层, 由凝聚层的定义可知, $\forall x \in X$, 存在 x 的开邻域 U, 及 U 上正合列

$$\cdots \longrightarrow p_{k+1}\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_{k+1}} p_k\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_k} \cdots \longrightarrow p_1\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_1} p_0\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_0} \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

这里需要注意的是, 每增加一个 $\lambda_{k+1} : p_{k+1}\mathcal{O} \longrightarrow p_k\mathcal{O}$, 可能就要相应地缩小 x 点的邻域 V, 而由凝聚层的定义, 这个正合列是可以无限长的. 我们逐步增加正合列的长度, 自然的问题是, 是否经过充分多的步骤后, 正合列只是平凡加长, 即正合列中新出现的层都是平凡层 (零层). 这是可能的, 例如, 若 $\lambda_{k+1} : p_{k+1}\mathcal{O} \longrightarrow p_k\mathcal{O}$ 满足 $\mathrm{Ker}\ \lambda_{k+1} = p_{k+2}\mathcal{O}$; $p_{k+2} \in \mathbf{Z}^+$, 就可以取 $p_{k+2}\mathcal{O}$ 为新增加的层, $\lambda_{k+2} : p_{k+2}\mathcal{O} \longrightarrow p_{k+1}\mathcal{O}$ 为新增加的单模层同态, 即 $\mathrm{Ker}\ \lambda_{k+2} = 0$, 从而新增加的 $p_{k+3}\mathcal{O} \equiv 0$, 故从 $p_{k+3}\mathcal{O}$ 开始, 所有新增的层均平凡. 我们将在下文中证明, 上述问题对 $\mathcal{O}$ 凝聚层有肯定的答案. 在证明结论之前, 我们需要一些代数准备.

引理 7.14 令 $\mathcal{R}$ 是含幺交换环,

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\lambda} \mathcal{B} \xrightarrow{\mu} \mathcal{C} \longrightarrow 0 \tag{7.17}$$

是 $\mathcal{R}$-模正合列, $f \in \mathcal{R}$, f 不是 $\mathcal{C}$ 的零因子, 则

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}/f\mathcal{A} \xrightarrow{\lambda_*} \mathcal{B}/f\mathcal{B} \xrightarrow{\mu_*} \mathcal{C}/f\mathcal{C} \longrightarrow 0$$

是正合列.

证明: $\mathrm{Im}\ \mu_* = \mathcal{C}/f\mathcal{C}$ 是平凡的. $\forall a \in \mathcal{A}$, 令 $[a]$ 是 a 在 $\mathcal{A}/f\mathcal{A}$ 中的等价类, 若 $\lambda_*([a]) = 0$, 即 $\lambda a \in f\mathcal{B}$, 也就是说, 存在 $b \in \mathcal{B}$ 满足 $\lambda(a) = fb$, 于是

$0 = \mu\lambda(a) = \mu(fb) = f\mu(b)$, 由于 f 不是 $\mathcal{C}$ 的零因子, 故 $\mu(b) = 0$, 于是有 $a' \in \mathcal{A}$, $\lambda a' = b$, 从而 $\lambda(a) = fb = f\lambda(a')$, $\lambda(a - fa') = 0$, 即 $a = fa'$, 因此 $[a] = 0$.

现在只需证明正合列在中间正合, 由于 $\lambda \circ \mu = 0$, 故 $\lambda_* \circ \mu_* = 0$, 从而只需证 $\mathrm{Ker}\ \mu_* \subset \mathrm{Im}\ \lambda_*$: $\forall b \in \mathcal{B}$, 若 $[b] \in \mathrm{Ker}\ \mu_*$, 即 $\mu(b) \in f\mathcal{C}$, 也就是说, 存在 $c \in \mathcal{C}$ 满足 $\mu(b) = fc$; 另一方面, 由于 μ 是满射, 故有 $c = \mu(b')$, $b' \in \mathcal{B}$, 因此 $\mu(b - fb') = 0$, 由 (7.17) 的正合性, 存在 $a \in \mathcal{A}$, $\lambda(a) = b - fb'$, 于是 $\lambda_*[a] = [b - fb'] = [b]$, 因此 $\mathrm{Im}\ \lambda_* \supset \mathrm{Ker}\ \mu_*$. □

假定 $f_1, \cdots, f_k \in R$, $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{R}$-模, 若对每个 f_v; $1 \leqslant v \leqslant k$, 都满足 f_v 不是 $\mathcal{C}/(f_1\mathcal{C} + \cdots + f_{v-1}\mathcal{C})$ 的零因子, 则称 $\{f_1, \cdots, f_k\}$ 是 $\mathcal{C}$ 的**素序列**.

推论 7.15 若 $\{f_1, \cdots, f_k\}$ 是 C 的素序列, 则

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}/(f_1\mathcal{A} + \cdots + f_k\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{B}/(f_1\mathcal{B} + \cdots + f_k\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{C}/(f_1\mathcal{C} + \cdots + f_k\mathcal{C}) \longrightarrow 0$$

正合. 更进一步, 若还有 $\{f_1, \cdots, f_{k+1}\}$ 是 $\mathcal{B}$ 的素序列, 则它也是 $\mathcal{A}$ 的素序列.

证明: 我们先证明第一部分: 对 k 归纳证明, $k = 1$ 时就是定理 7.13. 假定结论对 $k - 1$ 成立, 即

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{A}/(f_1\mathcal{A} + \cdots + f_{k-1}\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{B}/(f_1\mathcal{B} + \cdots + f_{k-1}\mathcal{B}) \\ \longrightarrow \mathcal{C}/(f_1\mathcal{C} + \cdots + f_{k-1}\mathcal{C}) \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{7.18}$$

正合. 由于对任意 $\mathcal{R}$-模 $\mathcal{D}$,

$$\mathcal{D}/f_1\mathcal{D} + \cdots + f_k\mathcal{D} = (\mathcal{D}/f_1\mathcal{D} + \cdots + f_{k-1}\mathcal{D})/(f_k(\mathcal{D}/f_1\mathcal{D} + \cdots + f_{k-1}\mathcal{D}))$$

且由于 $\{f_1, \cdots, f_k\}$ 是 $\mathcal{C}$ 的素序列, 利用归纳假设及定理 7.13, 知结论对 k 成立.

至于第二部分, 由于每个 $\mathcal{A}/f_1\mathcal{A} + \cdots + f_v\mathcal{A}$; $1 \leqslant v \leqslant k$ 均为 $\mathcal{B}/f_1\mathcal{B} + \cdots + f_v\mathcal{B}$ 的子模, 若 $\{f_1, \cdots, f_{k+1}\}$ 是 $\mathcal{B}$ 的素序列, 自然有 $\{f_1, \cdots, f_{k+1}\}$ 是 $\mathcal{A}$ 的素序列. □

引理 7.16 (Nakayama 引理) 假定 $(\mathcal{R}, m)$ 是局部环, 即 $\mathcal{R}$ 是含幺交换环, 且其所有的不可逆元组成其唯一极大理想 m. 若 M 是有限生成 (幺作用) $\mathcal{R}$-模满足 $M = mM$, 则 $M \equiv 0$.

证明: 设 $\{f_1, \cdots, f_k\}$ 是 M 的某个生成元集, 即 $M = f_1\mathcal{R} + \cdots + f_k\mathcal{R}$; 由于 $M = mM$, 故

$$f_i = \sum_{j=1}^{k} \varphi_{ij} f_j; \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \ \varphi_{ij} \in m.$$

从而

$$\sum_{j=1}^{k}(\delta_{ij}-\varphi_{ij})f_j=0. \tag{7.19}$$

记 $f=(f_1,\cdots,f_k)$, 现将 (7.19) 表示成矩阵形式

$$(\delta_{ij}-\varphi_{ij})f^t=0. \tag{7.20}$$

在 (7.20) 两边同乘以 $(\delta_{ij}-\varphi_{ij})$ 的代数余子式矩阵, 则

$$\det(\delta_{ij}-\varphi_{ij})I_k f^t=0.$$

这里 I_k 是单位矩阵. 由于

$$\det(\delta_{ij}-\varphi_{ij})=1+g,\quad g\in m,$$

故

$$\det(\delta_{ij}-\varphi_{ij})\notin m,$$

$\mathcal{R}$ 是局部环, 因此它可逆, 从而 $f^t\equiv 0$, 于是 $M\equiv 0$. □

令 $\mathcal{F}$ 是 ${}_n\mathcal{O}$ 凝聚层, 由定义, $\forall x\in D$, 存在其开邻域 U, $U\subset D$, 及 U 上正合列

$$\begin{aligned}p_{n-1}\,{}_n\mathcal{O}\xrightarrow{\lambda_{n-1}}p_{n-2}\,{}_n\mathcal{O}\xrightarrow{\lambda_{n-2}}p_{n-3}\,{}_n\mathcal{O}\longrightarrow\cdots\\ \longrightarrow p_2\,{}_n\mathcal{O}\xrightarrow{\lambda_2}p_1\,{}_n\mathcal{O}\xrightarrow{\lambda_1}p_0\,{}_n\mathcal{O}\xrightarrow{\lambda_0}\mathcal{F}\longrightarrow 0.\end{aligned}$$

令 $K_n=\mathrm{Ker}\ \lambda_{n-1}$, $K_{n-1}=\mathrm{Ker}\ \lambda_{n-2}=\mathrm{Im}\ \lambda_{n-1},\cdots,K_1=\mathrm{Ker}\ \lambda_0=\mathrm{Im}\ \lambda_1$, 由于 $\mathcal{F}$ 是 ${}_n\mathcal{O}$ 凝聚层, 知 $K_1,\cdots,K_n$ 均为凝聚层, 且存在 x 的某个开邻域及其上 ${}_n\mathcal{O}$-模层同态图 (7.21).

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & 0 & & & 0 & & & & & 0 & & \\
 & & & \searrow & & \nearrow & & & & \nearrow & & & \\
 & & & & K_{n-1} & & & & & K_1 & & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & & \nearrow & & & & \\
K_n & \xrightarrow{i} & p_{n-1}\,{}_n\mathcal{O} & \longrightarrow & & & p_{n-2}\,{}_n\mathcal{O}\longrightarrow & \cdots\cdots & p_1\,{}_n\mathcal{O} & \longrightarrow & p_0\,{}_n\mathcal{O} & \longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow & 0\\
 & & \nearrow & & & & \searrow & & \nearrow & & & & \\
 & K_n & & & & & K_{n-2} & & K_2 & & & & \\
 \nearrow & & & & & & & \searrow\ \nearrow & & & & & \\
0 & & & & & & & 0\quad 0 & & & & &
\end{array} \tag{7.21}$$

选取适当的局部坐标使得 $x=0$, 令

$$\mathcal{R}={}_n\mathcal{O}_0, \tag{7.22}$$

则 $\mathcal{R}$ 是 $x=0$ 点全纯函数芽的环, 显然 $\mathcal{R}$ 是局部环, 其唯一极大理想 m 是所有满足 $f(0)=0$ 的全纯函数在 $x=0$ 点的芽的集合. 令 $M=\mathcal{F}_0$ (即 $\mathcal{F}$ 在 $x=0$ 点的茎) 是 $\mathcal{R}$-模. 我们仍然用 $K_n,\cdots,K_1$ 表示层 $K_n,\cdots,K_1$ 在 $x=0$ 点的茎, 则有类似 (7.21) 的 $\mathcal{R}$-模同态图, 满足主线及每个斜线均为 $\mathcal{R}$-模正合列, $K_n,\cdots,K_1,K_0:=M$ 均为有限生成 $\mathcal{R}$-模, 满足

$$0\longrightarrow K_i\longrightarrow p_{i-1}\mathcal{R}\longrightarrow K_{i-1}\longrightarrow 0;\quad 1\leqslant i\leqslant n \tag{7.23}$$

是 $\mathcal{R}$-模同态的正合列.

由于 $K_1\subset p_0\mathcal{R}$, z_1 是 $p_0\mathcal{R}$ 的素序列, 由素序列定义知, z_1 是 K_1 的素序列; 又因为 $\{z_1,z_2\}$ 是 $p_1\mathcal{R}$ 的素序列, 利用推论 7.15, 知它也是 K_2 的素序列. 将上述步骤进行下去, 最终可以得到 $\{z_1,\cdots,z_n\}$ 是 K_n 的素序列. 由于 K_n 是有限生成 $\mathcal{R}$-模, 而 $\mathcal{R}/m\mathcal{R}=\mathbf{C}$, 故 K_n/mK_n 是有限维 $\mathbf{C}$-向量空间, 因此存在 $p_n\in\mathbf{Z}^+$, $K_n/mK_n\cong\mathbf{C}^{p_n}\cong(\mathcal{R}/m\mathcal{R})^{p_n}$. 提升上述同构可得到 $\mathcal{R}$-模满同态 $\varphi:K_n\longrightarrow p_n\mathcal{R}$ 满足下面的交换图

$$\begin{array}{ccc} K_n & \xrightarrow{\varphi} & p_n\mathcal{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_n/mK_n & \longrightarrow & (\mathcal{R}/m\mathcal{R})^{p_n} \end{array}$$

记 $L:=\operatorname{Ker}\varphi$, 则存在 $\mathcal{R}$-模正合列

$$0\longrightarrow L\longrightarrow K_n\longrightarrow p_n\mathcal{R}\longrightarrow 0. \tag{7.24}$$

由于 $\{z_1,\cdots,z_n\}$ 是 $\mathcal{R}$ 的素序列, 自然地, 它也是 $p_n\mathcal{R}$ 的素序列, 由于 $mL=z_1L+\cdots+z_nL$, $mK_n=z_1K_n+\cdots+z_nK_n$, $m(p_n\mathcal{R})=z_1(p_n\mathcal{R})+\cdots+z_n(p_n\mathcal{R})$, 由推论 7.15, 不难得到以下正合列

$$0\longrightarrow L/mL\longrightarrow K_n/mK_n\longrightarrow p_n\mathcal{R}/m(p_n\mathcal{R})\longrightarrow 0. \tag{7.25}$$

由于 $K_n/mK_n\cong p_n\mathcal{R}/m(p_n\mathcal{R})\cong C^{p_n}$, 知 $L/mL\equiv 0$, 如果 L 是有限生成 $\mathcal{R}$-模, 则由 Nakayama 引理, $L\equiv 0$. L 自然是有限生成的, 这是因为, (7.22) 中的 K_n, $p_n\mathcal{R}$ 是 (7.21) 中的凝聚层 K_n 及 $p\ {}_n\mathcal{O}$ 在 $x=0$ 处的茎, 故 $\operatorname{Ker}\varphi$ 是凝聚层 $\operatorname{Ker}\varphi$ 在 $x=0$ 处的茎, 自然 L 有限生成. 由于 $\operatorname{Ker}\varphi$ 是凝聚层, 由命题 7.5, 存在开集 $U\in\mathcal{U}_x$, $\operatorname{Ker}\varphi|_U\equiv 0$, 于是在 U 上有 $K_n\cong p\ {}_n\mathcal{O}$.

综上所述, 我们就得到了所谓的 Hilbert (投影) 分解定理.

定理 7.17 令 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中区域或 n 维复流形, $\mathcal{F}$ 是 D 上的 ${}_n\mathcal{O}$ 凝聚层, 则对任意 $x\in D$, 存在其开邻域 $U\in\mathcal{U}_x$; $U\subset D$, 及 U 上的正合列

$$0\longrightarrow p_n\ {}_n\mathcal{O}\xrightarrow{\lambda_n}p_{n-1}\ {}_n\mathcal{O}\longrightarrow\cdots\longrightarrow p_1\ {}_n\mathcal{O}\xrightarrow{\lambda_1}p_0\ {}_n\mathcal{O}\xrightarrow{\lambda_0}\mathcal{F}\longrightarrow 0. \tag{7.26}$$

称上式为 $\mathcal{F}$ 在 U 上的 Hilbert 分解或投影分解.

注意到 Hilbert 分解定理的结论是局部的, 即对任意 x 点, 存在其开邻域 $U_x \in \mathcal{U}_x$, 使得 (7.26) 在 U_x 上正合; 对 D 中不同的点, 可能会有不同的 λ_i; $1 \leqslant i \leqslant n$ 及不同的 $p_i \in \mathbf{Z}^+$; $1 \leqslant i \leqslant n$. 自然我们会问, 什么条件下在整个 D 上有形如 (7.26) 的正合列成立? 我们将在下一章讨论这个问题.

第八章　多圆域的上同调论

本章我们先讨论 Dolbeault 引理, 即当 D 是单连通多圆域时,

$$H^q(D,\mathcal{O})=0,\quad q\geqslant 1.$$

然后探讨系数在单连通多圆域上的解析层的上同调群. 最后证明 Cartan 引理, 而 Cartan 引理是下一章证明著名 Cartan 定理 A、B 的关键.

§8.1　Dolbeault 引理

设 $D_1,\cdots,D_n$ 是 $\mathbf{C}$ 中的区域, 称 $\mathbf{C}^n$ 中的区域 $D_1\times\cdots\times D_n$ 为**多圆域**. 若进一步, D_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 均为单连通区域, 则称 $D_1\times\cdots\times D_n$ 是**单连通多圆域**.

引理 8.1 (Cauchy 积分公式)　令 D 是复平面中的区域, 其边界是长度有限的简单闭曲线 γ; 若 f 是 $\overline{D}$ 邻域上的 C^∞ 复值函数, 则存在 D 上的 C^∞ 函数 g, 满足

$$\frac{\partial g(z)}{\partial \overline{z}}=f(z).\tag{8.1}$$

更进一步, 若 f 带有参数且对参数 C^∞ 或全纯依赖, 则 g 亦然.

证明: 考虑函数

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\iint\limits_D f(\zeta)\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta-z}.\tag{8.2}$$

注意到若 f 带有参数且对参数 C^∞ 或全纯依赖, 则 g 亦然. 故只需对任意固定

$z \in D$, 验证 (8.1). 选取圆盘 $\Delta(z;r)$, 满足其闭包含于 D, 令 γ_r 为其边界, 定义

$$D_r = D - \Delta(z;r),$$

则在 D_r 上有

$$d\log|\zeta - z|^2 = d\big(\log(\zeta - z) + \log(\overline{\zeta} - \overline{z})\big) = \frac{d\zeta}{\zeta - z} + \frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}}.$$

利用 Stokes 公式, 知

$$\begin{aligned}
&\int_\gamma f(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\overline{\zeta} - \int_{\gamma_r} f(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\overline{\zeta}\\
=&\iint_{D_r} d(f(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\overline{\zeta})\\
=&\iint_{D_r}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\zeta}\log|\zeta - z|^2 d\zeta\wedge d\overline{\zeta} + \iint_{D_r} f(\zeta)\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\zeta - z}.
\end{aligned}\tag{8.3}$$

取 γ_r 的参数表示

$$\zeta = z + re^{it},\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,$$

令

$$M = \operatorname*{Sup}_{z\in D}|f(z)|,$$

则

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0}\left|\int_{\gamma_r} f(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\overline{\zeta}\right| &= \lim_{r\to 0}\left| -\int_{t=0}^{2\pi} f(z + re^{it})2r(\log\ r)ie^{-it}dt\right|\\
&\leqslant \lim_{r\to 0} 4\pi Mr\ \log\ r = 0.
\end{aligned}$$

利用 (8.2), 知

$$\int_\gamma f(\zeta)\log|\zeta - z|^2 d\overline{\zeta} = \iint_D \frac{\partial f(\zeta)}{\partial\zeta}\log|\zeta - z|^2 d\zeta\wedge d\overline{\zeta} + 2\pi i g(z),\tag{8.4}$$

对上式两边求偏导, 由积分与求导可交换; 特别的, 考虑 $\partial/\partial\overline{z}$, 得

$$-\int_{\gamma_r} f(\zeta)\frac{d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} = -\iint_D \frac{\partial f(\zeta)}{\partial\zeta}\frac{d\zeta\wedge d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta} - \overline{z}} + 2\pi i\frac{\partial g(z)}{\partial\overline{z}}.$$

利用 (8.3) 的共轭, 知

$$f(z) = \partial g(z)/\partial\overline{z}.$$

利用 (8.4) 不难得出 $g(z)$ 是 C^1 的, 由上式可知 $\partial g(z)/\partial\overline{z}$ 是 C^∞ 的, 从而 g 是 D 上的 C^∞ 函数. □

引理 8.2 (Dolbeault 引理)　假定 $D \subset\subset \mathbf{C}^n$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的单连通多圆域, $\omega \in \Gamma(D, \mathcal{E}^{p,q})$, $p \geqslant 0$, $q \geqslant 1$, 若 $\overline{\partial}\omega = 0$, 则存在 $\eta \in \Gamma(D, \mathcal{E}^{p,q-1})$ 满足 $\overline{\partial}\eta = \omega$.

证明: 我们先证明以下结论: $G = G_1 \times \cdots \times G_n \subset\subset \mathbf{C}^n$ 是单连通多圆域, ω 是 $\overline{G}$ 邻域上的光滑 (p,q)-形式; $p \geqslant 0$, $q \geqslant 1$. 若 $\overline{\partial}\omega = 0$, 则存在 $\overline{G}$ 某邻域上的光滑 $(p, q-1)$-形式 u 满足在此邻域上有 $\overline{\partial}u = \omega$.

取 $G' = G'_1 \times \cdots \times G'_n$ 满足

$$G \subset \overline{G} \subset G' \subset \overline{G}',$$

且 $\overline{G}'$ 包含在 ω 的定义域中. 令 v 是 ω 坐标表达式中出现的共轭微分

$$d\overline{z}^1, \cdots, d\overline{z}^v$$

中上指标的最大值, 对 v 使用归纳法: 若 $v = 0$, 由假定, ω 是 (p,q)-形式, $q > 0$, 从而 $\omega = 0$, 结论平凡. 一般的, 为使用归纳假设, 设

$$\omega = d\overline{z}^v \wedge \alpha + \beta,$$

这里 α, β 是仅可能包含共轭微分

$$d\overline{z}^1, \cdots, d\overline{z}^{v-1}$$

的微分形式. 由于

$$0 = \overline{\partial}\omega = -(d\overline{z}^v \wedge \overline{\partial}\alpha) + \overline{\partial}\beta,$$

故 α, β 的系数关于 $z_{v+1}, \cdots, z_n$ 全纯. 今将 α 任一系数 f 看成是 z_v 的函数在 $\overline{G}'$ 的邻域上光滑, 类似 f 在相应的区域上关于 $z_1, \cdots, z_{v-1}$ 光滑, 关于 $z_{v+1}, \cdots, z_n$ 全纯. 由引理 8.1, 存在函数 g, 在 $\overline{G}'$ 的某邻域上关于 z_v 光滑, 且 $\partial g/\partial \overline{z}_v = f$, 更进一步, g 在与 f 相同的定义域上关于 $z_1, \cdots, z_{v-1}$ 光滑且关于 $z_{v+1}, \cdots, z_n$ 全纯. 将 α 的各个系数 f 换成对应的 g, 就得到新的微分形式 γ, 满足

$$\overline{\partial}\gamma = d\overline{z}^v \wedge \alpha + \delta,$$

这里 δ 仅含共轭微分 $d\overline{z}^1, \cdots, d\overline{z}^{v-1}$. 现在考虑微分形式

$$\varphi = \omega - \overline{\partial}\gamma = \beta - \delta,$$

注意到 $\overline{\partial}\varphi = \overline{\partial}\omega - \overline{\partial}\,\overline{\partial}\gamma = 0$, 且由于 β 与 δ 只含共轭微分 $d\overline{z}^1, \cdots, d\overline{z}^{v-1}$, φ 也如此, 可利用归纳假设 $\varphi = \overline{\partial}\psi$, 于是 $\omega = \overline{\partial}(\gamma + \psi)$, 故结论成立.

现在令 $D = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k$, 满足 $D_k \subset \overline{D}_k \subset D_{k+1}$ 且每个 D_k 均为单连通多圆

域, 由于 $\omega \in \Gamma(D, \mathcal{E}^{p,q})$, 若 $k=1$, 由前面的分析, 存在 $\overline{D}_1$ 某邻域上的光滑 $(p,q-1)$-形式 η_1, 使得 $\overline{\partial}\eta_1=\omega$. 现在假定已经分别找到 $\overline{D}_1,\cdots,\overline{D}_k$ 某邻域上的光滑 $(p,q-1)$-形式 $\eta_1,\cdots,\eta_k$, 满足 $\overline{\partial}\eta_k=\omega$ 及 $\eta_i|_{D_{i-1}}=\eta_{i-1}|_{D_{i-1}}$, $2\leqslant i\leqslant k$. 我们要寻找 $\overline{D}_{k+1}$ 某邻域上的 η_{k+1}, 满足 $\overline{\partial}\eta_{k+1}=\omega$ 及 $\eta_{k+1}|_{D_k}=\eta_k|_{D_k}$.

首先存在 $\overline{D}_{k+1}$ 某开邻域上的光滑 $(p,q-1)$-形式 η'_{k+1}, 满足在其上有

$$\overline{\partial}\eta'_{k+1}=\omega.$$

于是在 $\overline{D}_k$ 的某邻域上, 有

$$\overline{\partial}(\eta'_{k+1}-\eta_k)=\omega-\omega=0.$$

若 $q>1$, 存在 $\overline{D}_k$ 某开邻域上的光滑 $(p,q-2)$-形式 α, 满足 $\overline{\partial}\alpha=\eta'_{k+1}-\eta_k$. 取光滑切割函数 φ, 使得 $\varphi|_{\overline{D}_k}=1$, $0\leqslant\varphi\leqslant 1$, 且 Supp φ 含在 α 的定义域与 D_{k+1} 的交集中. 于是取 $\eta_{k+1}=\eta'_{k+1}-\overline{\partial}(\varphi\alpha)$, 它与 η'_{k+1} 有相同的定义域, 满足 $\eta_{k+1}|_{D_k}=\eta'_{k+1}-\overline{\partial}\alpha=\eta_k$, 且在 $\overline{D}_{k+1}$ 的某邻域上, $\overline{\partial}\eta_{k+1}=\overline{\partial}\eta'_{k+1}=\omega$. 综上所述, 可对 $k\in\mathbf{Z}^+$ 相继使用上述方法, 可定义 $\eta\in\Gamma(D,\mathcal{E}^{p,q-1})$ 为

$$\eta|_{D_k}=\eta_k,\quad k\in\mathbf{Z}^+.$$

这就是 $q>1$ 的情形, 我们需要的光滑 $(p,q-1)$-形式 η.

对 $q=1$ 的情形, 首先存在 $\overline{D}_k$ 某邻域上的光滑 $(p,0)$-形式 η'_k, $k\in\mathbf{Z}^+$, 满足 $\overline{\partial}\eta'_k=\omega$, 从而在此邻域上, $\overline{\partial}\eta'_{k+1}-\overline{\partial}\eta'_k=0$, 即 $\eta'_{k+1}-\eta'_k$ 是此邻域上的全纯 p-形式. 另一方面, 若 $\overline{\partial}\eta'_k=\omega$ 且 θ 是 $\overline{D}_k$ 邻域上的全纯 p-形式, 则仍有 $\overline{\partial}(\eta'_k+\theta)=\omega$. 由于多圆域是多项式凸的, 可选适当的系数为多项式的全纯 p-形式 θ_k, 满足以下条件: 若令 $\eta_k=\eta'_k+\theta_k$, 则在 $\overline{D}_k$ 上有

$$|\eta_{k+1}-\eta_k|<2^{-k},\quad k\in\mathbf{Z}^+.$$

这里 $|\eta_{k+1}-\eta_k|$ 定义如下: 若

$$\eta_k=\sum_{i_1<\cdots<i_p}a_{i_1\cdots i_p}dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_p}$$

且

$$\eta_{k+1}=\sum_{i_1<\cdots<i_p}b_{i_1\cdots i_p}dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_p},$$

则

$$|\eta_{k+1}-\eta_k|=\max_{i_1<\cdots<i_p}|a_{i_1\cdots i_p}-b_{i_1\cdots i_p}|.$$

现在选光滑切割函数 ρ_k; $0 \leqslant \rho_k \leqslant 1$, 满足在 $\overline{D}_k$ 上有 $\rho_k = 1$, 且 Supp ρ_k 包含于 η_k 的定义域, 于是 $\rho_k\eta_k$ 是 D 上的光滑 $(p,0)$-形式, 仍记为 η_k, 则定义

$$\eta = \lim_{k\to\infty} \eta_k.$$

知 η 是 D 上的光滑 $(p,0)$-形式, 满足 $\overline{\partial}\eta = \omega$. □

注: 引理中的假设 $D \subset\subset \mathbf{C}^n$ 不是必要的. 事实上只需 $D = D_1 \times \cdots \times D_n$, 满足 D_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的边界点个数不少于 2, 由 Riemann 映射定理, 存在共形映射

$$f = (f_1, \cdots, f_n) = \Delta^n \longrightarrow D,$$

这里 Δ^n 是 $\mathbf{C}^n$ 中的多圆盘. 任取 $\omega \in \Gamma(D, \mathcal{E}^{0,q})$, $q \geqslant 1$, 满足 $\overline{\partial}\omega = 0$, 从而 $\overline{\partial} f^*\omega = f^*\overline{\partial}\omega$, 于是有 $g \in \Gamma(\Delta^n, \mathcal{E}^{0,q-1})$, 满足 $\overline{\partial} g = f^*\omega$, 从而

$$\overline{\partial}(f^{-1})^* g = (f^{-1})^*\overline{\partial} g = (f^{-1})^* f^*\omega = \omega.$$

在下文中, 在不引起混淆的情形下, 我们用 $\mathcal{O}$ 代替 ${}_n\mathcal{O}$.

定理 8.3　*若 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中单连通多圆域, 则*

$$H^k(D, \mathcal{O}) = 0, \quad k \geqslant 1.$$

证明: 由于 $\mathcal{E}^{0,q}$ $(0 \leqslant q \leqslant n)$ 均为 D 上的零调层, 由定理 4.35,

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{E}^{0,0} \xrightarrow{\ \overline{\partial}\ } \cdots \xrightarrow{\ \overline{\partial}\ } \mathcal{E}^{0,n} \longrightarrow 0$$

是 $\mathcal{O}$ 的零调解, 则由定理 4.26,

$$H^k(D, \mathcal{O}) = H^k(D, \mathcal{E}^{0,\cdot}) = H^k\big(\Gamma(D, \mathcal{E}^{0,\cdot})\big), \ k \geqslant 1.$$

而由引理 8.2, $H^k\big(\Gamma(D, \mathcal{E}^{0,\cdot})\big) \equiv 0, \quad k \geqslant 1.$ □

§8.2　解析层的投影分解

定理 8.4　*令 D 是单连通的多圆域, $\mathcal{F}$ 是解析层, 即 $\mathcal{O}$-模层, 满足存在有限长投影分解*

$$0 \longrightarrow p_m\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_m} p_{m-1}\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_{m-1}} \cdots \longrightarrow p_1\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_1} p_0\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_0} \mathcal{F} \longrightarrow 0, \tag{8.5}$$

则

$$H^k(D, \mathcal{F}) = 0, \quad k \geqslant 1.$$

证明: 我们对投影分解的长度进行归纳, 若长度是 0, 即有 $\mathcal{O}$-模层正合列

$$0 \longrightarrow p_0\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_0} \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

则

$$H^k(D,\mathcal{F}) \equiv H^k(D,p_0\mathcal{O}) = \bigoplus_{1}^{p_0} H^k(D,\mathcal{O}) \equiv 0, \quad k \geqslant 1.$$

现在假定定理在投影分解长度小于等于 $m-1$ 时成立, 令 $\mathcal{G} = \mathrm{Ker}\ \lambda_0 = \mathrm{Im}\ \lambda_1$, 利用 (8.5) 的正合性, 知有正合列

$$0 \longrightarrow p_m\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_m} p_{m-1}\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_{m-1}} \cdots \longrightarrow p_1\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_1} \mathcal{G} \longrightarrow 0. \tag{8.6}$$

由归纳假设, $H^k(D,\mathcal{G}) = 0,\ k \geqslant 1$.

另一方面, 正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{i} p_0\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_0} \mathcal{F} \longrightarrow 0 \tag{8.7}$$

可诱导上同调群的正合列

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow H^0(D,\mathcal{G}) &\xrightarrow{i_*} H^0(D,p_0\mathcal{O}) \xrightarrow{\lambda_{0*}} H^0(D,\mathcal{F})\\ \longrightarrow H^1(D,\mathcal{G}) &\xrightarrow{i_*} H^1(D,p_0\mathcal{O}) \xrightarrow{\lambda_{0*}} H^1(D,\mathcal{F})\\ &\cdots\\ \longrightarrow H^k(D,\mathcal{G}) &\xrightarrow{i_*} H^k(D,p_0\mathcal{O}) \xrightarrow{\lambda_{0*}} H^k(D,\mathcal{F})\\ \longrightarrow H^{k+1}(D,\mathcal{G}).&\end{aligned} \tag{8.8}$$

由于 $H^k(D,\mathcal{G}) = H^{k+1}(D,\mathcal{G}) = 0,\ k \geqslant 1$, 故

$$H^k(D,\mathcal{F}) = H^k(D,p_0\mathcal{O}) = 0, \quad k \geqslant 1.$$

□

推论 8.5 在定理 8.4 的条件下, (8.5) 诱导了截影群的正合列

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \Gamma(D,p_m\mathcal{O}) &\xrightarrow{\lambda_m} \Gamma(D,p_{m-1}\mathcal{O}) \longrightarrow \cdots\\ \longrightarrow \Gamma(D,p_1\mathcal{O}) &\xrightarrow{\lambda_1} \Gamma(D,p_0\mathcal{O}) \xrightarrow{\lambda_0} \Gamma(D,\mathcal{F}) \longrightarrow 0.\end{aligned} \tag{8.9}$$

证明: 我们仍然对投影分解长度归纳证明 (8.9). 若长度为 0, 即

$$0 \longrightarrow p_0\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_0} \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

则自然有正合列

$$0 \longrightarrow \Gamma(D,p_0\mathcal{O}) \xrightarrow{\lambda_0} \Gamma(D,\mathcal{F}) \longrightarrow 0.$$

假定推论在长度小于等于 $m-1$ 时成立, 由 (8.6), 知存在截影群正合列

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \Gamma(D, p_m\mathcal{O}) \xrightarrow{\lambda_m} \Gamma(D, p_{m-1}\mathcal{O}) \longrightarrow \cdots \\ \longrightarrow \Gamma(D, p_1\mathcal{O}) \xrightarrow{\lambda_1} \Gamma(D, \mathcal{G}) \longrightarrow 0.\end{aligned} \tag{8.10}$$

由 $H^1(D,\mathcal{G})=0$, 知

$$\lambda_0 : \Gamma(D, p_0\mathcal{O}) = H^0(D, p_0\mathcal{O}) \longrightarrow H^0(D, \mathcal{F}) = \Gamma(D, \mathcal{F})$$

是满同态. 可将 (8.8) 的第一行接入 (8.10), 得

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow \Gamma(D, p_m\mathcal{O}) \xrightarrow{\lambda_m} \Gamma(D, p_{m-1}\mathcal{O}) \longrightarrow \cdots \\ \longrightarrow \Gamma(D, p_1\mathcal{O}) \xrightarrow{\lambda_1} \Gamma(D, p_0\mathcal{O}) \xrightarrow{\lambda_0} \Gamma(D, \mathcal{F}) \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

由 (8.8) 第一行的正合, 知 $\mathrm{Im}\ \lambda_1 = \Gamma(D,\mathcal{G}) = \mathrm{Ker}\ \lambda_0$, 故上式正合. □

定义 8.6 令 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的区域, $\mathcal{F}$ 是 D 上的 $\mathcal{O}$-模层, 若有投影分解

$$\begin{aligned}p_m\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_m} p_{m-1}\mathcal{O} \longrightarrow \cdots \longrightarrow p_j\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_j} p_{j-1}\mathcal{O} \\ \xrightarrow{\lambda_{j-1}} p_{j-2}\mathcal{O} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\lambda_1} p_0\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0,\end{aligned} \tag{8.11}$$

及与上式有相同长度的 $\mathcal{O}$-模层正合列

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow q\mathcal{O} \xrightarrow{id} q\mathcal{O} \\ \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 0,\end{aligned} \tag{8.12}$$

这里 id 是恒等同构, 则 (8.11) 与 (8.12) 对应项的直和

$$\begin{aligned}p_m\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_m} p_{m-1}\mathcal{O} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\lambda'_{j+1}} (p_j+q)\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda'_j} (p_{j-1}+q)\mathcal{O} \\ \xrightarrow{\lambda'_{j-1}} p_{j-2}\mathcal{O} \longrightarrow \cdots \longrightarrow p_0\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0\end{aligned} \tag{8.13}$$

是 $\mathcal{F}$ 的新的投影分解. 称 (8.13) 为 (8.11) 的**平凡修正**或第 j 个位置的平凡修正. 在 (8.13) 中,

$$\lambda'_{j+1}(\mathbf{a}) = \big(\lambda_{j+1}(\mathbf{a}), 0\big), \quad \forall \mathbf{a} \in p_{j+1}\mathcal{O},$$

$$\lambda'_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\lambda_j \mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad \forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in (p_j+q)\mathcal{O},$$

$$\lambda'_{j-1}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lambda_{j-1}\mathbf{a}, \quad \forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in (p_{j-1}+q)\mathcal{O}.$$

考虑 λ_i 在典则截影下的矩阵表示, 则 λ'_{j+1}, λ'_j 及 λ'_{j-1} 的矩阵表示可分别由 λ_{j+1}, λ_j 及 λ_{j-1} 的矩阵表示添加仅含 0 或 1 的行或列得到.

除了平凡修正外, 还有投影分解的**非平凡修正**: 若 $\mu : p_j\mathcal{O} \longrightarrow p_j\mathcal{O}$ 是 $\mathcal{O}$-模层同构, 则有下列 $\mathcal{F}$ 的新的投影序列

$$\begin{aligned} p_m\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_m} p_{m-1}\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_{m-1}} \cdots \longrightarrow p_{j+1}\mathcal{O} \xrightarrow{\mu\circ\lambda_{j+1}} p_j\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_j\circ\mu^{-1}} p_{j-1}\mathcal{O} \\ \longrightarrow \cdots \longrightarrow p_1\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_1} p_0\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_0} \mathcal{F} \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{8.14}$$

定义 8.7 令 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 均为 $\mathbf{C}^n$ 中区域 D 上的 $\mathcal{O}$-模层, 设有投影分解

$$p_m\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_m} \cdots \longrightarrow p_1\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_1} p_0\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_0} \mathcal{F} \longrightarrow 0 \tag{8.15}$$

及

$$q_m\mathcal{O} \xrightarrow{\mu_m} \cdots \longrightarrow q_1\mathcal{O} \xrightarrow{\mu_1} q_0\mathcal{O} \xrightarrow{\mu_0} \mathcal{G} \longrightarrow 0. \tag{8.16}$$

若存在 $\mathcal{O}$-模层同态 $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ 及模层同态 $\alpha_i : p_i\mathcal{O} \longrightarrow q_i\mathcal{O}$, $0 \leqslant i \leqslant m$, 使得图表

$$\begin{array}{ccccccccccc} p_m\mathcal{O} & \xrightarrow{\lambda_m} & p_{m-1}\mathcal{O} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & p_1\mathcal{O} & \xrightarrow{\lambda_1} & p_0\mathcal{O} & \xrightarrow{\lambda_0} & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ \downarrow \alpha_m & & \downarrow \alpha_{m-1} & & & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha \\ q_m\mathcal{O} & \xrightarrow{\mu_m} & q_{m-1}\mathcal{O} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & q_1\mathcal{O} & \xrightarrow{\mu_1} & q_0\mathcal{O} & \xrightarrow{\mu_0} & \mathcal{G} \longrightarrow 0 \end{array}$$

交换, 称 $\{\alpha_i\}$; $0 \leqslant i \leqslant m$ 为依附在 $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ 上的(8.15) 与 (8.16) 间的**层投影分解同态**. 当 α, $\{\alpha_i\}$, $0 \leqslant i \leqslant m$ 为层同构时, 称其为依附在 $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ 上的**投影分解同构**, 此时, 自然需要 $p_i = q_i$, $0 \leqslant i \leqslant m$.

定理 8.8 令 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的单连通区域, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ 是 D 上的 $\mathcal{O}$-模层, 且都有长度有限的投影分解. 若有层同构 $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, 则可通过对 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 的投影分解的有限次修正, 找到依附在 $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ 上的投影分解同构.

证明: 假定 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 的投影分解的长度分别为 m 和 r, 即有

$$0 \longrightarrow p_m\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_m} p_{m-1}\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_{m-1}} \cdots \longrightarrow p_1\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_1} p_0\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_0} \mathcal{F} \longrightarrow 0 \tag{8.17}$$

及

$$0 \longrightarrow q_r\mathcal{O} \xrightarrow{\mu_r} q_{r-1}\mathcal{O} \xrightarrow{\mu_{r-1}} \cdots \longrightarrow q_1\mathcal{O} \xrightarrow{\mu_1} q_0\mathcal{O} \xrightarrow{\mu_0} \mathcal{G} \longrightarrow 0. \tag{8.18}$$

对 $\max\{m, r\}$ 归纳, 若 $\max\{m, r\} = 0$, 则可定义层同构

$$\alpha_0 = \mu_0^{-1} \circ \alpha \circ \lambda_0 : p_0\mathcal{O} \longrightarrow q_0\mathcal{O}.$$

于是 $\mu_0 \circ \alpha_0 = \alpha \circ \lambda_0$, 从而

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow & p_0\mathcal{O} & \xrightarrow{\lambda_0} & \mathcal{F} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow \alpha & \\ 0 \longrightarrow & q_0\mathcal{O} & \xrightarrow{\mu_0} & \mathcal{G} & \longrightarrow 0 \end{array}$$

交换.

不失一般性, 假定 $m \geqslant r$, 且结论对 $m-1$ 成立. 由于 $\alpha: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ 是层同构, 自然有对应的截影群的同构, 仍记为 α, 由推论 8.5

$$\begin{array}{c} \Gamma(D, p_0\mathcal{O}) \xrightarrow{\lambda_0} \Gamma(D, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \\ \downarrow \alpha \\ \Gamma(D, q_0\mathcal{O}) \xrightarrow{\mu_0} \Gamma(D, \mathcal{G}) \longrightarrow 0 \end{array} \tag{8.19}$$

满足 λ_0, μ_0 是满同态. 令 E_i; $1 \leqslant i \leqslant p_0$ 是 $\Gamma(D, p_0\mathcal{O})$ 的典则截影, 由于 μ_0 是满射, 存在 $g_i \in \Gamma(D, q_0\mathcal{O})$; $1 \leqslant i \leqslant p_0$, 使得 $\mu_0(g_i) = \alpha \circ \lambda_0(E_i)$. 从而可构造层同态

$$\sigma: p_0\mathcal{O} \longrightarrow q_0\mathcal{O},$$

$$\sum_{i=1}^{p_0} \mathbf{r}_i E_i(x) \longmapsto \sum_{i=1}^{p_0} \mathbf{r}_i g_i(x), \quad \forall x \in D, \quad r_i \in \mathcal{O}_x.$$

另一方面, 由于 $\alpha^{-1}: \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}$ 也是层同构, 可类似构造层同态 $\tau: q_0\mathcal{O} \longrightarrow p_0\mathcal{O}$ 满足相应的交换关系. 综上所述, 有

$$\mu_0 \circ \sigma = \alpha \circ \lambda_0; \quad \lambda_0 \circ \tau = \alpha^{-1} \circ \mu_0.$$

分别取 $p_0\mathcal{O}$ 及 $q_0\mathcal{O}$ 的典则截影 $E_1, \cdots, E_{p_0}$ 及 $E_1', \cdots, E_{q_0}'$, 可得到 σ (或 τ) 的 $p_0 \times q_0$ ($q_0 \times p_0$) 矩阵表示, 仍记为 σ (或 τ). 我们来构造以下层同态

$$\widetilde{\sigma}: (p_0 + q_0)\mathcal{O} \longrightarrow (q_0 + p_0)\mathcal{O}.$$

分别取 $(p_0 + q_0)\mathcal{O}$ 与 $(q_0 + p_0)\mathcal{O}$ 的典则基

$$(E_1, \cdots, E_{p_0}, E_1', \cdots, E_{q_0}')$$

及

$$(E_1', \cdots, E_{q_0}', E_1, \cdots, E_{p_0}).$$

则可定义 $\widetilde{\sigma}$, 使其在 $(p_0 + q_0)\mathcal{O}$ 和 $(q_0 + p_0)\mathcal{O}$ 的典则基下的矩阵表示为

$$\widetilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & I - \sigma\tau \\ I & -\tau \end{pmatrix}.$$

类似可构造层同态 $\widetilde{\tau}: (q_0 + p_0)\mathcal{O} \longrightarrow (p_0 + q_0)\mathcal{O}$, 使其在 $(q_0 + p_0)\mathcal{O}$ 和 $(p_0 + q_0)\mathcal{O}$ 的典则基下的矩阵表示为

$$\widetilde{\tau} = \begin{pmatrix} \tau & I - \tau\sigma \\ I & -\sigma \end{pmatrix}.$$

不难验证

$$\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau} = \widetilde{\tau}\widetilde{\sigma} = I,$$

于是 $\widetilde{\sigma}$ 与 $\widetilde{\tau}$ 均为层同构, 于是有以下层同态图表

$$\begin{array}{l} \cdots \longrightarrow p_3\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_3} p_2\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_2'} (p_1+q_0)\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_1'} (p_0+q_0)\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_0'} \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \widetilde{\sigma}\downarrow\uparrow\widetilde{\tau} \qquad\quad \downarrow\alpha \\ \cdots \longrightarrow q_3\mathcal{O} \xrightarrow{\mu_3} q_2\mathcal{O} \xrightarrow{\mu_2'} (q_1+p_0)\mathcal{O} \xrightarrow{\mu_1'} (q_0+p_0)\mathcal{O} \xrightarrow{\mu_0'} \mathcal{G} \longrightarrow 0 \end{array} \tag{8.20}$$

(8.20) 各行分别为 (8.17) 及 (8.18) 的平凡修正. 对任意的 $E_i \in \Gamma\big(D,(p_0+q_0)\mathcal{O}\big)$, $i=1,\cdots,p_0$, 有

$$\begin{aligned} &(\alpha\circ\lambda_0')(E_i) = \alpha\lambda_0(E_i), \\ &(\mu_0'\circ\widetilde{\sigma})(E_i) = \mu_0'\big(\sigma(E_i),E_i\big) = \mu_0\sigma(E_i) = \alpha\lambda_0(E_i). \end{aligned}$$

而对任意的 $E_j' \in \Gamma\big(D,(p_0+q_0)\mathcal{O}\big)$, $j=1,\cdots,q_0$, 有

$$\begin{aligned} &(\alpha\circ\lambda_0')(E_j') = 0, \\ &\mu_0'\circ\widetilde{\sigma}(E_j') = \mu_0'\big(E_j'-\sigma\tau(E_j'),-\tau(E_j')\big) = \mu_0(E_j') - \mu_0\sigma\tau(E_j') \\ &\qquad\qquad\quad = \mu_0(E_j') - \alpha\lambda_0\tau(E_j') = \mu_0(E_j') - \mu_0(E_j') = 0. \end{aligned}$$

故

$$\alpha\circ\lambda_0' = \mu_0'\circ\widetilde{\sigma},$$

同理可得

$$\lambda_0'\circ\widetilde{\tau} = \alpha\circ\mu_0'.$$

令 $\mathcal{F}_0 = \mathrm{Ker}\ \lambda_0' \subset (p_0+q_0)\mathcal{O}$, $\mathcal{G}_0 = \mathrm{Ker}\ \mu_0' \subset (q_0+p_0)\mathcal{O}$. 由 $\alpha\circ\lambda_0' = \mu_0'\circ\widetilde{\sigma}$, 知 $\widetilde{\sigma}|_{\mathcal{F}_0}:\mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_0$, 再利用 $\lambda_0'\circ\widetilde{\tau} = \alpha\circ\mu_0'$, 知 $\widetilde{\sigma}$ 是层同构. 于是我们从 (8.20) 中得到以下层同态图表

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow p_m\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_m} \cdots \longrightarrow p_2\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_2'} (p_1+q_0)\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_1'} \mathcal{F}_0 \longrightarrow 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow\widetilde{\sigma} \\ 0 \longrightarrow q_r\mathcal{O} \xrightarrow{\mu_r} \cdots \longrightarrow q_2\mathcal{O} \xrightarrow{\mu_2'} (q_1+p_0)\mathcal{O} \xrightarrow{\mu_1'} \mathcal{G}_0 \longrightarrow 0 \end{array} \tag{8.21}$$

由于 (8.21) 各行正合且 $\widetilde{\sigma}:\mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_0$ 是层同构, 注意到 (8.21) 中投影分解长度最大值是 $m-1$, 由归纳假设, 经过有限次修正, 可得到 $\mathcal{F}_0$ 与 $\mathcal{G}_0$ 的投影分解之间的依附在 $\alpha:\mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{G}_0$ 上的投影分解同构

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow r_m\mathcal{O} \longrightarrow r_{m-1}\mathcal{O} \longrightarrow \cdots \longrightarrow r_1\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow 0 \\ \qquad\quad \downarrow\alpha_m \qquad\quad \downarrow\alpha_{m-1} \qquad\qquad\quad \downarrow\alpha_1 \quad\ \ \downarrow\widetilde{\sigma} \\ 0 \longrightarrow r_m\mathcal{O} \longrightarrow r_{m-1}\mathcal{O} \longrightarrow \cdots \longrightarrow r_1\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{G}_0 \longrightarrow 0 \end{array} \tag{8.22}$$

考虑层同态图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \longrightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow (p_0+q_0)\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda_0'} \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ \downarrow \widetilde{\sigma} \qquad\qquad \downarrow \widetilde{\sigma} \qquad\qquad \downarrow \alpha \\ 0 \longrightarrow \mathcal{G}_0 \longrightarrow (q_0+p_0)\mathcal{O} \xrightarrow{\mu_0'} \mathcal{G} \longrightarrow 0 \end{array} \tag{8.23}$$

连接 (8.22) 和 (8.23), 得

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow r_m\mathcal{O} \longrightarrow r_{m-1}\mathcal{O} \longrightarrow \cdots \longrightarrow r_1\mathcal{O} \longrightarrow r_0\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ \downarrow \alpha_m \qquad\qquad \downarrow \alpha_{m-1} \qquad\qquad \downarrow \alpha_1 \qquad \downarrow \alpha_0 \qquad \downarrow \alpha \\ 0 \longrightarrow r_m\mathcal{O} \longrightarrow r_{m-1}\mathcal{O} \longrightarrow \cdots \longrightarrow r_1\mathcal{O} \longrightarrow r_0\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0 \end{array} \tag{8.24}$$

这里 $r_0 = p_0 + q_0$, $\alpha_0 = \widetilde{\sigma}$. (8.24) 就是我们需要的依附在 $\alpha : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ 上的层的投影分解同构. □

本章主要目的是证明以下定理: 若 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的单连通多圆域, 紧集 $K \subset\subset D$, 则存在 K 的开邻域 U, $K \subset U \subset \overline{U} \subset D$, 使得任意 $\mathcal{O}$ 凝聚层在 U 上都有长度有限的投影分解.

由定理 7.17, 对 $\mathcal{O}$ 凝聚层 $\mathcal{F}$, 有以下结论: 任意 $x \in D$, 存在 $U_x \in \mathcal{U}_x$, 使得 $\mathcal{F}$ 在其上有长度有限的投影分解. 不妨假定 U_x 是多圆域. 自然的问题是, 对于 x 与 x', 我们找到了相应的多圆域 U_x 与 $U_{x'}$, 若 $U_x \cap U_{x'} \neq \varnothing$, 则 $\mathcal{O}$ 凝聚层 $\mathcal{F}$ 在其交集上有两个可能不同的投影分解, 是否经过有限次修正, 使它们相容, 从而得到 $\mathcal{F}$ 在 $U_x \cup U_{x'}$ 上的投影分解?

定理 8.8 告诉我们, 若 $U_x \cap U_{x'}$ 是单连通多圆域, 这两个投影分解在经过有限次修正后, 可转化为 $\mathcal{F}$ 的两个同构的投影分解. 我们想通过分析最简单的情形, 引出如何从同构过渡到相等.

设 $U' = D' \times \Omega \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{n-1}$ 与 $U'' = D'' \times \Omega \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C}^{n-1}$ 是 $\mathbf{C}^n$ 中的两个单连通多圆域, 且 $\overline{D'}$ 与 $\overline{D''}$ 及它们的交集均为 $\mathbf{C}$ 中的长方形 (图 8.1).

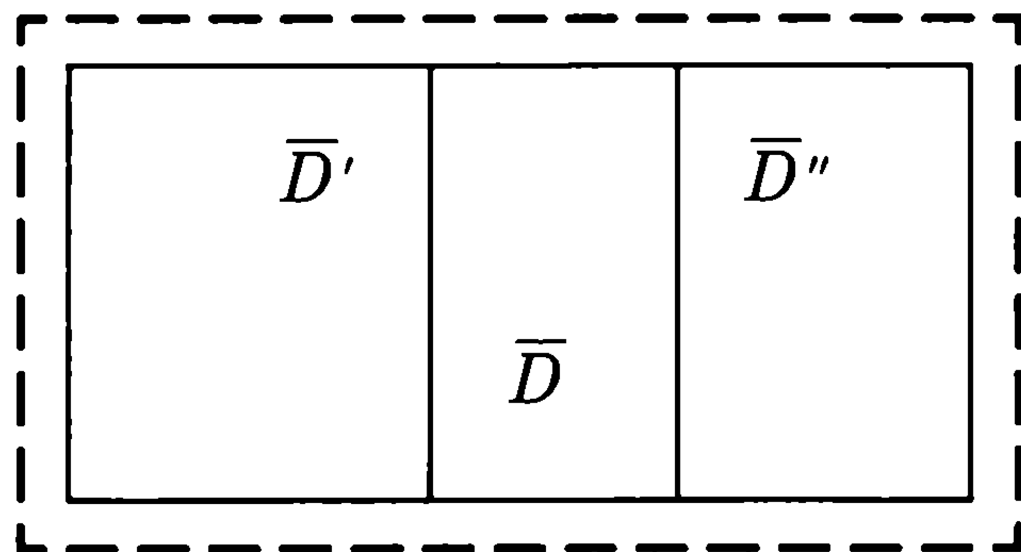


图 8.1

若存在 $\overline{D} \times \Omega$ 上的层同构 $\alpha_j : r_j\mathcal{O} \longrightarrow r_j\mathcal{O}$, 其在典则基 $E_1, \cdots, E_{r_j}$ 下的矩阵表示是一个 $r_j \times r_j$ 矩阵, 仍记为 α_j. 由于 α_j 是同构, 故 α_j 可逆. 若有分解

$$\alpha_j = \alpha_j' \alpha_j''$$

满足 $r_j \times r_j$ 矩阵 α'_j, α''_j 的各个分量分别为 $D' \times \Omega$ 与 $D'' \times \Omega$ 上的全纯函数, 则有 $r_j\mathcal{O}$ 到自身的层同构

$$r_j\mathcal{O} \xrightarrow{\alpha_j'^{-1}} r_j\mathcal{O} \xrightarrow{\alpha_j} r_j\mathcal{O} \xrightarrow{\alpha_j''^{-1}} r_j\mathcal{O}.$$

当 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{O}$ 凝聚层, 假定其分别在 $\overline{D'} \times \Omega$ 与 $\overline{D''} \times \Omega$ 的开邻域上有投影分解, 通过在 $\overline{D} \times \Omega$ 上的有限次修正, 得依附在 $id : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ 上的投影分解同构

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 \longrightarrow & r_m\mathcal{O} & \longrightarrow & r_{m-1}\mathcal{O} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & r_1\mathcal{O} & \longrightarrow & r_0\mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \alpha_m & & \downarrow \alpha_{m-1} & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow id & \\
0 \longrightarrow & r_m\mathcal{O} & \longrightarrow & r_{m-1}\mathcal{O} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & r_1\mathcal{O} & \longrightarrow & r_0\mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow 0
\end{array} \tag{8.25}$$

若每个 α_j $(0 \leqslant j \leqslant m)$ 都有前面提到的分解 $\alpha_j = \alpha'_j\alpha''_j$, 则可得到下表

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 \longrightarrow & r_m\mathcal{O} & \longrightarrow & r_{m-1}\mathcal{O} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & r_1\mathcal{O} & \longrightarrow & r_0\mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \alpha_m'^{-1} & & \downarrow \alpha_{m-1}'^{-1} & & \downarrow \alpha_1'^{-1} & & \downarrow \alpha_0'^{-1} & & \downarrow id & \\
0 \longrightarrow & r_m\mathcal{O} & \longrightarrow & r_{m-1}\mathcal{O} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & r_1\mathcal{O} & \longrightarrow & r_0\mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \alpha_m & & \downarrow \alpha_{m-1} & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow id & \\
0 \longrightarrow & r_m\mathcal{O} & \longrightarrow & r_{m-1}\mathcal{O} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & r_1\mathcal{O} & \longrightarrow & r_0\mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow \alpha_m''^{-1} & & \downarrow \alpha_{m-1}''^{-1} & & \downarrow \alpha_1''^{-1} & & \downarrow \alpha_0''^{-1} & & \downarrow id & \\
0 \longrightarrow & r_m\mathcal{O} & \longrightarrow & r_{m-1}\mathcal{O} & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & r_1\mathcal{O} & \longrightarrow & r_0\mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow 0
\end{array} \tag{8.26}$$

(8.26) 的第一行是 $\mathcal{F}$ 在 $D' \times \Omega$ 上的投影分解, 最后一行是在 $D'' \times \Omega$ 上的投影分解, 请读者验证, 通过使上图交换可自然的定义这两个投影分解. 由于 $\alpha_j''^{-1} \circ \alpha_j \circ \alpha_j'^{-1} = id$, 这两个投影分解在 $D \times \Omega$ 上相等, 于是我们得到 $\mathcal{F}$ 在 $(D' \cup D'') \times \Omega$ 上的投影分解.

但问题是 α_j 的分解并不容易找到. 当然, 若 $r_j = 1$, α_j 的分解是比较容易的, 这是由于此时 α_j 是 $\overline{D} \times \Omega$ 邻域上无零点的全纯函数. 清晰起见, 作图 8.2.

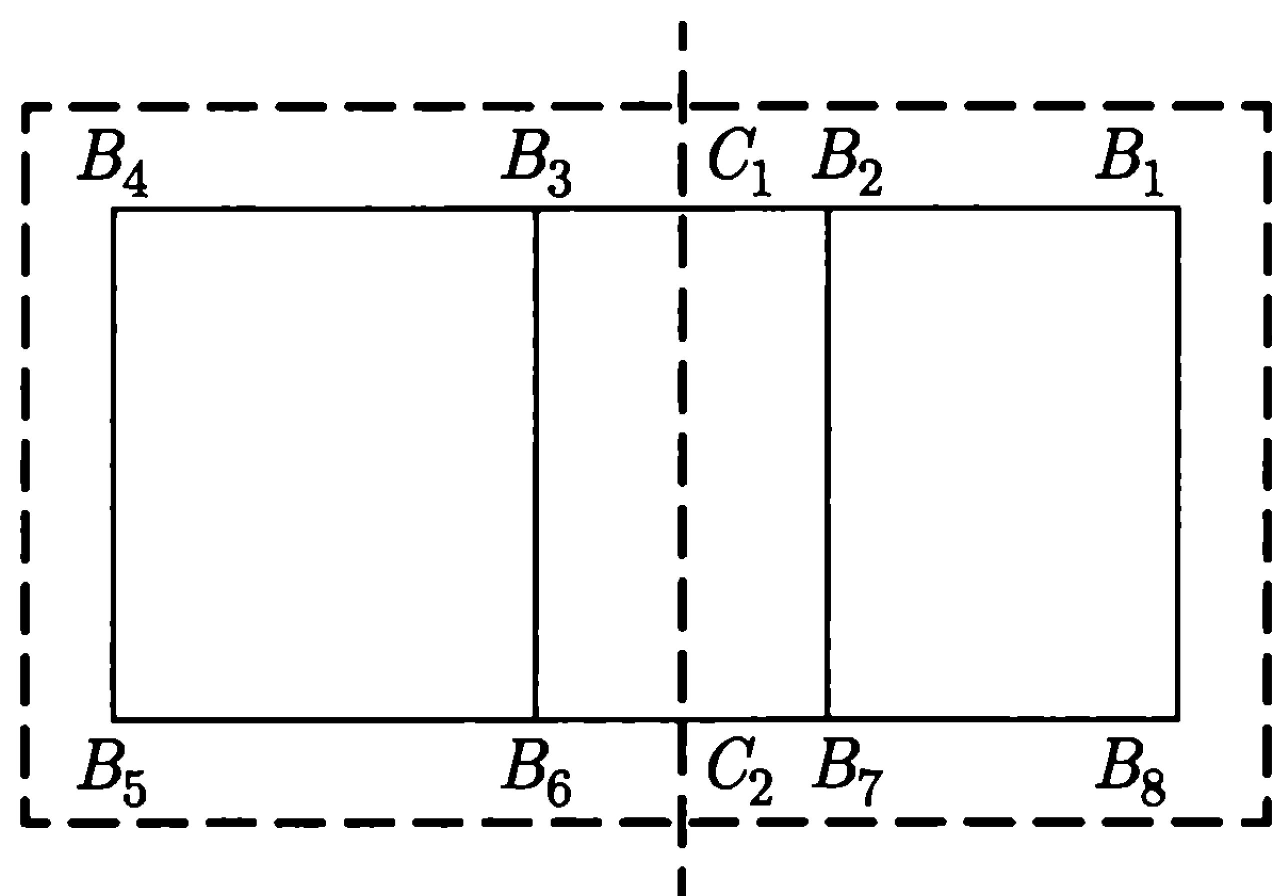


图 8.2

这里长方形 $B_2B_4B_5B_7$, 长方形 $B_1B_3B_6B_8$ 及长方形 $B_2B_3B_6B_7$ 分别表示 $\overline{D'}$, $\overline{D''}$ 及 $\overline{D}$. 线段 $\overline{C_1C_2}$ 满足 $C_1 \in \overline{B_2B_3}$, $C_2 \in \overline{B_6B_7}$. 令 $g(z_1, \cdots, z_n) = \log \alpha_j(z_1, \cdots, z_n)$, 则在 $D \times \Omega$ 上有

$$\begin{aligned} g(z_1, \cdots, z_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{g(\xi, z_2, \cdots, z_n)}{\xi - z_1} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{B_3 \lceil C_1 \\ B_6 \lfloor C_2}} \frac{g(\xi, z_2, \cdots, z_n)}{\xi - z_1} d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{C_1 \rceil B_2 \\ C_2 \rfloor B_7}} \frac{g(\xi, z_2, \cdots, z_n)}{\xi - z_1} d\xi. \end{aligned} \tag{8.27}$$

注意上式右边第一项在 $D'' \times \Omega$ 中全纯, 第二项在 $D' \times \Omega$ 中全纯, 分别记其为 $g''(z_1, \cdots, z_n)$ 与 $g'(z_1, \cdots, z_n)$, 则在 $D \times \Omega$ 上有

$$\begin{aligned} \alpha_j(z_1, \cdots, z_n) &= \exp g(z_1, \cdots, z_n) \\ &= \exp g'(z_1, \cdots, z_n) \cdot \exp g''(z_1, \cdots, z_n). \end{aligned}$$

由于 $\alpha_j' := \exp g'$ 及 $\alpha_j'' := \exp g''$ 分别为 $D' \times \Omega$ 及 $D'' \times \Omega$ 上的全纯函数, 于是就得到了 α_j 的分解.

若 $r_j \neq 1$, 则问题非常复杂, 主要是因为此时 α_j 是 $r_j \times r_j$ 矩阵. 类似 $r_j = 1$, 要先做运算 $\log \alpha_j$, 最后将算子 exp 作用于 $\log \alpha_j$. 虽然这两个算子在矩阵情形仍然可以定义, 但 log 只定义于某一类矩阵. 若 A 是 $r \times r$ 矩阵, 则

$$\log(I - A) = -\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v} A^v. \tag{8.28}$$

在 A 的所有特征值的绝对值均小于 1 的情形下定义合理, 不然 (8.28) 的右边发散. 我们当然希望 $\log \alpha_j$ 可定义, 这就自然要求 $(I - \alpha_j)$ 的所有特征值的绝对值小于 1. 另一方面, 虽然 exp 的定义没有限制, 且 $\exp(\log A) = A$ 总是成立. 但若 $\log A = B + C$, 一般来说,

$$\exp(\log A) = \exp(B + C) = \exp B \cdot \exp C$$

并不成立, 除非 $BC = CB$. 于是当 $r_j \neq 1$ 时, 我们必须克服这两个障碍, 才能得到矩阵 r_j 的满足我们要求的分解. 最先克服这两个障碍的是 H. Cartan.

§8.3　Cartan 引理

假定 A, B 是 $m \times m$ 矩阵, $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_m) \in \mathbf{C}^m$. 定义

$$|A| = \operatorname*{Sup}_{|\xi|=1} |A\xi^t|,$$

则 $|A|$ 是 A 的特征值绝对值的最大值. 显然有

$$\begin{aligned} &|A+B| \leqslant |A|+|B|; \\ &|AB| \leqslant |A|\,|B|. \end{aligned} \tag{8.29}$$

引理 8.9 设 K 为单连通多圆域 $D \subset \mathbf{C}^m$ 的紧子集, 则对任意全纯非奇异矩阵值函数 $F(z)$, 存在全纯非奇异矩阵值函数 $F_1(z), \cdots, F_r(z)$, 使得

$$F(z) = F_1(z) \cdots F_r(z), \quad \forall z \in D,$$

且

$$|I - F_j(z)| < 1, \quad \forall z \in K, \quad 1 \leqslant j \leqslant r.$$

证明: 由 Riemann 映射定理, 不妨假定 D 是以 $\mathbf{C}^n$ 原点为圆心的多圆盘, 且 K 连通满足 $\overset{\circ}{K} \neq \varnothing$.

D 上所有非奇异矩阵值全纯函数关于矩阵乘法有群结构, 记为 G. 定义范数

$$||F|| = \operatorname*{Sup}_{z\in K} |F(z)|, \quad \forall F \in G,$$

此范数可赋予 G 上拓扑, 利用 (8.29) 中的 (1) 和 (2), 不难验证 G 上的乘法与求逆运算均连续. 于是 G 是拓扑群. 更进一步, G 连通: 若 $F(z) \in G$, 则 $F(tz) \in G$, $t \in [0,1]$, 于是存在连续路径连接 $F(z)$ 与非奇异复值矩阵 $F(0)$. 显然, 由所有 $m \times m$ 非奇异复值矩阵组成的群 $GL(m, \mathbf{C})$ 连通, 于是存在连续路径连接 $F(z)$ 与单位矩阵 I. 众所周知, 连通的拓扑群可由 I 的任意邻域生成, 特别的, 选取

$$W = \{F \in G \big| \; ||F - I|| < 1\}.$$

于是对任意 $F(z) \in G$, 存在 $F_1, \cdots, F_r \in W$, 使得 $F = F_1 \cdots F_r$. □

定理 8.10 若 $K \subset \mathbf{C}^n$ 是紧多圆域, $F(z)$ 是 K 邻域上的非奇异矩阵值全纯函数, 则 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\mathbf{C}^n$ 上的非奇异矩阵值全纯函数 $G(z)$, 使得

$$\big|F(z) - G(z)\big| < \epsilon, \quad \forall z \in K.$$

证明: 由定理假设, 存在多圆域 $D \subset \mathbf{C}^n$, 使得 $K \subset D$ 且 $F(z)$ 是 D 上的非奇异矩阵值全纯函数, 由引理 8.9, 存在非奇异矩阵值全纯函数 $F_1, \cdots, F_r$, 使得

$$F(z) = F_1(z) \cdots F_r(z),$$

且

$$\big|I - F_i(z)\big| < 1, \;\; \forall z \in K, \; 1 \leqslant i \leqslant r.$$

这里 K_1 也是紧的单连通多圆域, 满足 $K \subset \overset{\circ}{K}_1 \subset K_1 \subset D$. 于是

$$\log F_1(z), \cdots, \log F_r(z)$$

为 K_1 上的矩阵值全纯函数. 由于 K 紧, 存在 $M > 0$, 使得

$$\left|F_j(z)\right| < M - 1, \quad \forall z \in K,\ j = 1, \cdots, r.$$

由于 K_1 多项式凸, 存在多项式矩阵 $P_j(z)$, 即 $P_j(z)$ 的所有元素均为多项式, 使得

$$\left|\log F_j(z) - P_j(z)\right| < \delta, \quad z \in K,\ j = 1, \cdots, r.$$

这里 δ 是充分小的待定正数.

由于 exp 在矩阵上连续, 可选多项式 $P_1(z), \cdots, P_r(z)$, 使得

$$|F_j(z) - G_j(z)| < \min\left\{\frac{\epsilon}{rM^{r-1}}, 1\right\}, \ \forall z \in K,\ j = 1, \cdots, r.$$

这里 $G_j(z) = \exp P_j(z)$ 是 $\mathbf{C}^n$ 上的非奇异矩阵值全纯函数. 易见

$$\begin{aligned}|G_j(z)| &\leqslant |F_j(z) - G_j(z)| + |F_j(z)| \\ &< 1 + M - 1 = M, \ \forall z \in K,\ j = 1, \cdots, r.\end{aligned}$$

现在 $G(z) = G_1(z) \cdots G_r(z)$ 自然是 $\mathbf{C}^n$ 上的非奇异矩阵值全纯函数, 且

$$\begin{aligned}& |F(z) - G(z)| \\ =\ & |F_1(z) \cdots F_r(z) - G_1(z) \cdots G_r(z)| \\ =\ & |F_1(z) \cdots F_r(z) - F_1(z) \cdots F_{r-1}(z) G_r(z)| \\ & + |F_1(z) \cdots F_{r-1}(z) G_r(z) - F_1(z) \cdots F_{r-2}(z) G_{r-1}(z) G_r(z)| \\ & + \cdots + |F_1(z) G_2(z) \cdots G_r(z) - G_1(z) \cdots G_r(z)| \\ <\ & M^{r-1}|F_r(z) - G_r(z)| + M^{r-1}|F_{r-1}(z) - G_{r-1}(z)| \\ & + \cdots + M^{r-1}|F_1(z) - G_1(z)| < \epsilon.\end{aligned} \tag{8.30}$$

于是 $G(z)$ 满足定理要求. □

由定理 8.10,

$$|G(z) - F(z)| < \epsilon, \ \forall z \in K,$$

即

$$|I - G(z)^{-1} F(z)| < N\epsilon,$$

这里

$$N = \operatorname*{Sup}_{z\in K} |G^{-1}(z)|.$$

由于 $\epsilon > 0$ 充分小, $G^{-1}(z)F(z)$ 在拓扑群中充分接近 I. 若有分解

$$G^{-1}(z)F(z) = G'G'',$$

满足 G' 与 G'' 分别是 K' 与 K'' 上的非奇异矩阵值全纯函数, 则

$$F'(z) = GG',\ F''(z) = G''$$

即为所求.

现在我们来分析充分接近 I 的元素的分解. 记这些元素为 $F = I + H$, 满足 $|H|$ 充分小, 从而可利用 (8.27) 中的方法分解 H. 当 $r_j = 1$ 时, $H = H' + H''$, 且 $|H'|$ 及 $|H''|$ 均充分小, 一般情形

$$\log F = \log(I + H) \dot{\simeq} H = H' + H'',$$

另一方面, 利用线性逼近, 知

$$e^{H'} \dot{\simeq} I + H', \quad e^{H''} \dot{\simeq} I + H''.$$

如果用 $(I + H')(I + H'')$ 去逼近 $F = I + H$, 则逼近的误差项为

$$\begin{aligned} H_1 &= (I + H')^{-1}(I + H)(I + H'')^{-1} - I \\ &= (I + H')^{-1}\Big(I + H' + H'' - (I + H')(I + H'')\Big)(I + H'')^{-1} \\ &= (I + H')^{-1}(-H_1'H'')(I + H'')^{-1}, \end{aligned}$$

当 $|H'|$ 与 $|H''|$ 充分小时, $|H_1|$ 接近 $|H'H''|$, 换句话说, $|H_1|$ 接近 $|H|^2$. 于是可用类似的方法逼近 H_1, 将此步骤重复下去, 最终就得到我们需要的分解. 下面我们把这一想法转化为严格的数学语言, 并给出 Cartan 引理的详细证明.

我们需要以下引理.

引理 8.11 如果 $\sum a_v$ 是收敛的正实数列, $\{F_v(z)\}$ 是定义在区域 $D \subset \mathbf{C}^n$ 的矩阵值全纯函数, 使得对任意 $z \in D$, $|F_v(z)| < a_v$, 则无穷乘积

$$\lim_{v\to\infty} \big(I + F_1(z)\big)\big(I + F_2(z)\big)\cdots\big(I + F_v(z)\big)$$

收敛到 D 上矩阵值全纯函数, 记为 $P(z)$; 更进一步, 若所有 $\big(I + F_v(z)\big)$ 均非奇异, 则 $P(z)$ 亦非奇异.

证明: 令 $P_v(z)$ 是前 v 项乘积, 即

$$P_v(z) = \big(I + F_1(z)\big)\cdots\big(I + F_v(z)\big),$$

则对任意 $z \in D$,

$$|P_v(z)| \leqslant \prod_{j=1}^{v} |1 + F_j(z)| \leqslant \prod_{j=1}^{v}(1 + a_v).$$

由于 $\sum a_v$ 收敛, 知 $\prod\limits_{j=1}^{v}(1+a_j)$ 收敛, 记其极限为 a, 于是对任意 $z \in D$, $|P_v(z)| \leqslant a$. 从而对任意指标 v, 及任意 $z \in D$,

$$\begin{aligned}|P_{v+1}(z) - P_v(z)| &= |P_v(z)\big(I + F_{v+1}(z)\big) - P_v(z)| \\ &\leqslant |P_v(z)| \cdot |F_{v+1}(z)| \leqslant a \cdot a_{v+1}.\end{aligned}$$

于是, 再次利用 $\sum a_v$ 收敛, 知 $\{P_v(z)\}$ 的每个分量在 D 上一致收敛, 因此其极限 $P(z)$ 存在且在 D 上全纯.

现在证明若所有 $\big(I + F_v(z)\big)$ 非奇异, 必有 $P(z)$ 非奇异: 首先, 注意到

$$\det P(z) = \lim_{v\to\infty} \det P_v(z) = \lim_{v\to\infty} \prod_{j=1}^{v} \det\big(I + F_j(z)\big).$$

由于 $\det(I + F_j)$ 是关于矩阵 F_j 各个分量的多项式, 常数项为 1, 其余 N 个单项式均为 F_j 分量的乘积. 由于 $a_j \to 0$, 当 k 充分大时, 对任意 $j \geqslant k$, $|F_j(z)| < a_j < 1/N$, 从而

$$|\det\big(I + F_j(z)\big)| > 1 - Na_j > 0, \quad j \geqslant k,$$

于是

$$\prod_{j=k}^{\infty} |\det\big(I + F_j(z)\big)| \geqslant \prod_{j=k}^{\infty}(1 - Na_j) > 0.$$

又因为, 对任意 $1 \leqslant j < k$, $\big(I + F_j(z)\big)$ 非奇异, 知 $P(z)$ 非奇异. □

为简化讨论, 还需要以下结论:

引理 8.12 *存在正数 P, 使得对任意 $m\times m$ 矩阵 A, B, 若 $|A| \leqslant \frac{1}{2}$, $|B| \leqslant \frac{1}{2}$, 且 C 满足*

$$(I + A)(I + C)(I + B) = I + A + B, \tag{8.31}$$

则

$$|C| \leqslant P|A|\ |B|.$$

证明: 由于满足 $|A| \leqslant \dfrac{1}{2}$ 的 $m \times m$ 矩阵 A 的集合是紧的, 且 $I + A$ 非奇异, 知 $|I + A|^{-1}$ 是此紧集上的连续函数, 因此有上界 $\sqrt{P}$; 即, 若 $|A| \leqslant \dfrac{1}{2}$, 则 $|(I + A)^{-1}| \leqslant \sqrt{P}$. 由 (8.31),

$$\begin{aligned} C &= (I + A)^{-1}(I + A + B)(I + B)^{-1} - I \\ &= (I + A)^{-1}\big(I + A + B - (I + A)(I + B)\big)(I + B)^{-1} \\ &= (I + A)^{-1}(-AB)(I + B)^{-1}, \end{aligned}$$

故

$$|C| \leqslant |(I + A)^{-1}| \cdot |AB| \cdot |(I + B)^{-1}| \leqslant P|A|\ |B|.$$

从而定理得证. □

现在, 回到 Cartan 引理的证明上, 考虑以下几何结构. 给定实数

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4,\ b_1 < b_2.$$

构造变量为 $z_1 = x_1 + iy_1$ 的复平面中的长方形:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{z_1 = x_1 + iy_1 | a_2 < x_1 < a_3,\ b_1 < y_1 < b_2\}, \\ K_1' &= \{z_1 = x_1 + iy_1 | a_1 < x_1 < a_3,\ b_1 < y_1 < b_2\}, \\ K_1'' &= \{z_1 = x_1 + iy_1 | a_2 < x_1 < a_4,\ b_1 < y_1 < b_2\}. \end{aligned}$$

显然, 它们均为带状区域 $b_1 < y_1 < b_2$ 中的开集, 满足 $K_1' \cap K_1'' = K_1$ (见图 8.3).

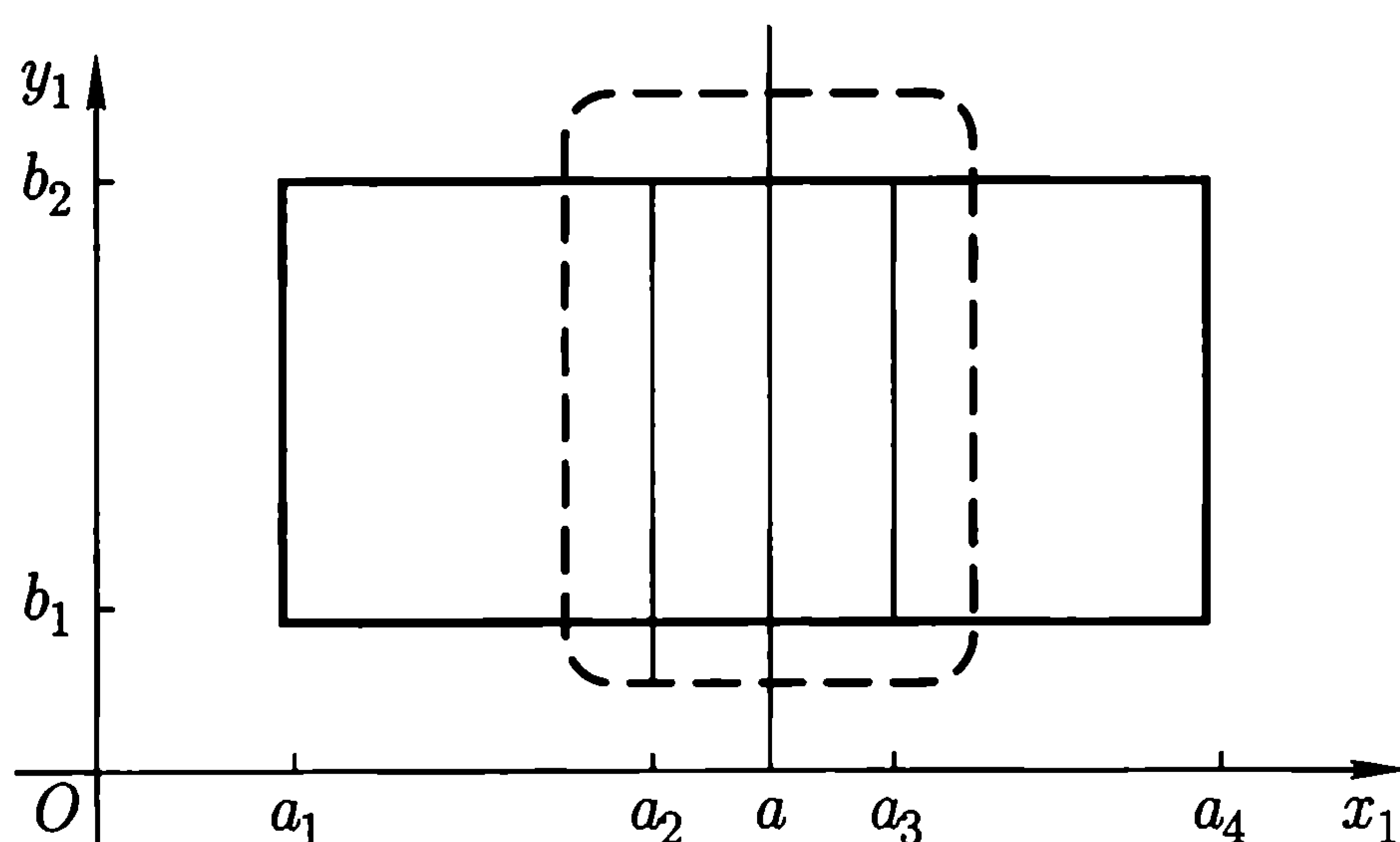


图 8.3

更进一步, 假定 $K_2, \cdots, K_n$ 分别为 $z_2, \cdots, z_n$ 平面上的单连通区域; 考虑多圆域

$$\begin{aligned} K &= K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_n, \\ K' &= K_1' \times K_2 \times \cdots \times K_n, \\ K'' &= K_1'' \times K_2 \times \cdots \times K_n, \end{aligned}$$

显然, 它们均为 $\mathbf{C}^n$ 中的开集. 除了这些基本的集合之外, 我们还需要适当地选取它们闭包的邻域. 对任意正常数 δ 及指标 $1 \leqslant j \leqslant n$, 令 $K_j(\delta) \subset \mathbf{C}$ 是 K_j 在 z_j 平面上的 δ-邻域, 即

$$K_j(\delta) = \{z_j \in \mathbf{C} \big| \, |z_j - \xi_j| < \delta, \ \exists \xi_j \in K_j\}.$$

类似, 可定义 $K_1'(\delta)$ 和 $K_1''(\delta)$; 现在, 定义

$$K(\delta) = K_1(\delta) \times K_2(\delta) \times \cdots \times K_n(\delta),$$
$$K'(\delta) = K_1'(\delta) \times K_2(\delta) \times \cdots \times K_n(\delta),$$
$$K''(\delta) = K_1''(\delta) \times K_2(\delta) \times \cdots \times K_n(\delta),$$

于是 $K(\delta) = K'(\delta) \cap K''(\delta)$. 事实上, $K_1(\delta)$ 就是图 8.3 中虚线的内部. 注意到 $K_1(\delta)$ 的边界是光滑曲线, 其长度记为 L. 最后, 对 $v = 1, 2, \cdots$, 定义

$$U_v = K_1(2^{-v}\delta) \times K_2\left(\frac{1}{2}\delta\right) \times \cdots \times K_n\left(\frac{1}{2}\delta\right),$$
$$U_v' = K_1'(2^{-v}\delta) \times K_2\left(\frac{1}{2}\delta\right) \times \cdots \times K_n\left(\frac{1}{2}\delta\right),$$
$$U_v'' = K_1''(2^{-v}\delta) \times K_2\left(\frac{1}{2}\delta\right) \times \cdots \times K_n\left(\frac{1}{2}\delta\right),$$

它们分别构成了 K, K', K'' 的开邻域套, 且均分别含于 $K(\delta)$, $K'(\delta)$, $K''(\delta)$.

引理 8.13 *令 $G(z)$ 是 $\overline{U}_v$ 上的矩阵值全纯函数, 满足 $|G(z)| \leqslant M, \forall z \in \overline{U}_v$, 则分别存在 U_v' 及 U_v'' 上的矩阵值全纯函数 $G'(z)$ 及 $G''(z)$, 使得*

$$G(z) = G'(z) + G''(z), \quad \forall z \in U_v,$$

且

$$|G'(z)| \leqslant \frac{2^v ML}{\pi\delta}, \quad \forall z \in \overline{U}_{v+1}',$$

$$|G''(z)| \leqslant \frac{2^v ML}{\pi\delta}, \quad \forall z \in \overline{U}_{v+1}''.$$

证明: U_v 到 z_1 平面的投影 $K_1(2^{-v}\delta)$ 的边界是光滑曲线, 记为 γ, 其长度小于 $K_1(\delta)$ 的边界的长度 L. 取常数 a, 满足 $a_2 < a < a_3$, 做分解 $\gamma = \gamma' \cup \gamma''$ (图 8.4), 其中

$$\gamma' = \{z_1 = x_1 + iy_1 \in \gamma | x_1 \geqslant a\},$$
$$\gamma'' = \{z_1 = x_1 + iy_1 \in \gamma | x_1 \leqslant a\}.$$

对矩阵的各个分量分别使用 z_1 平面上的 Cauchy 积分公式, 从而对 $(z_1,\cdots,z_n)\in U_v$,

$$G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{t\in\gamma}\frac{1}{t-z_1}G(t,z_2,\cdots,z_n)dt=G'(z)+G''(z),$$

这里

$$G'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{t\in\gamma'}\frac{1}{t-z_1}G(t,z_2,\cdots,z_n)dt, \tag{8.32}$$

$G''(z)$ 类似定义. 对固定的 $(z_2,\cdots,z_n)$, 易见 $G'(z)$ 作为 z_1 的函数, 在 $\mathbf{C}\backslash\gamma'$ 上全纯, 因此, $G'(z)$ 在 U'_v 上全纯, 类似 G'' 在 U''_v 上全纯. 而 $G'(z)$ 模的估计可由其定义式 (8.32) 导出. 这是因为, 对 $z\in U'_{v+1}$, $t\in\gamma'$, 知 $|t-z_1|\geqslant 2^{-v-1}\delta$, 于是

$$|G'(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2^{v+1}}{\delta}\cdot ML=\frac{2^vML}{\pi\delta}. \tag{8.33}$$

故定理得证. □

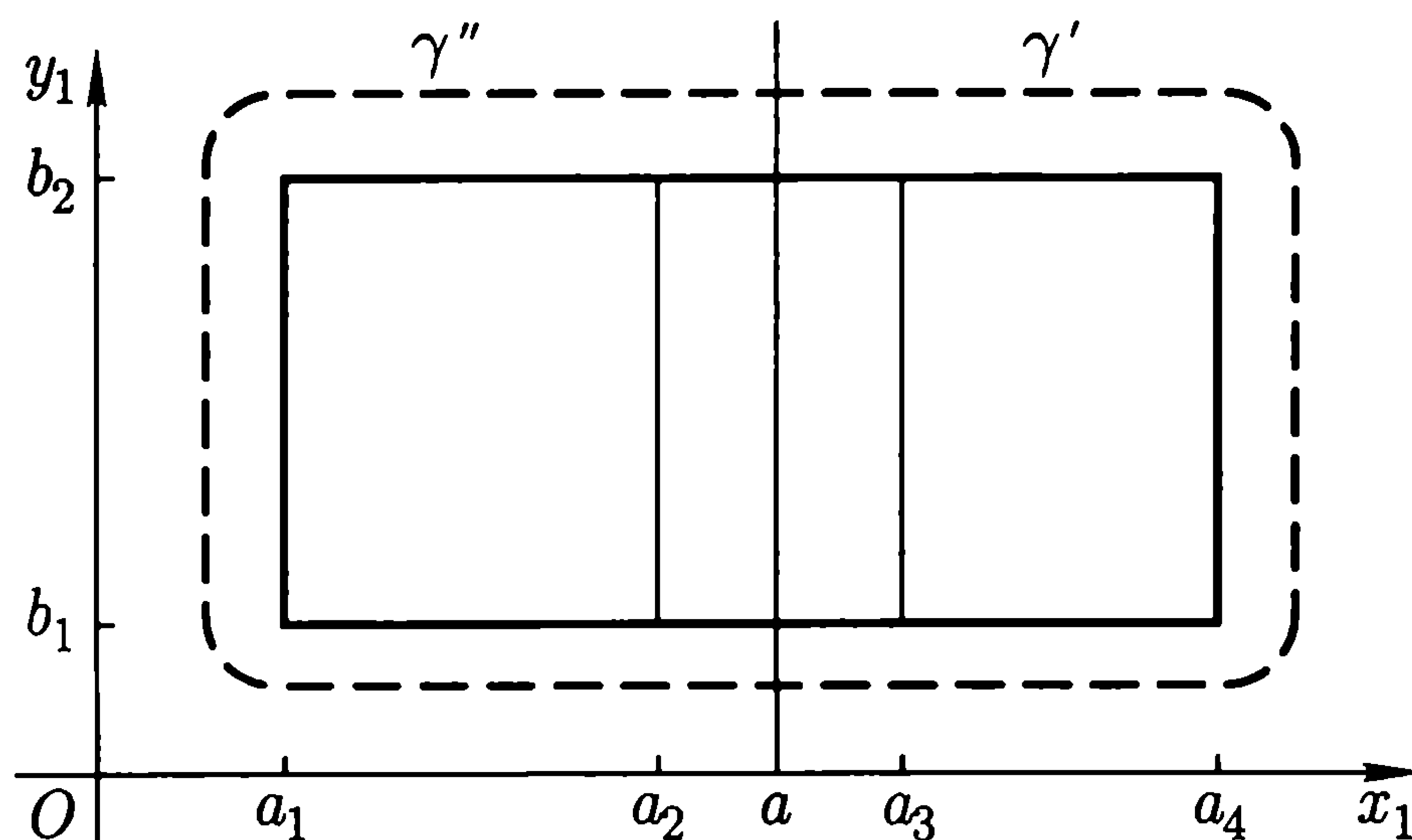


图 8.4

上述定理中最让人感兴趣的部分是 $G(z)=G'(z)+G''(z)$, 虽然范数估计后面也会用到. 本节的目标是给出此引理的乘法形式, 也就是下面的定理.

定理 8.14 (Cartan 引理) *若 $F(z)$ 是 K 开邻域上的非奇异矩阵值全纯函数, 则分别存在 K' 和 K'' 上的非奇异矩阵值全纯函数 $F'(z)$ 及 $F''(z)$, 使得对任意 $z\in K$,*

$$F(z)=F'(z)F''(z).$$

证明: 设 $F(z)$ 是开邻域 $K(\delta)$ 上的非奇异矩阵值全纯函数, $\delta>0$. 令 $P>0$ 是使得引理 8.12 成立的常数, 这里我们依旧采用前面的记号, 取正常数 ρ 满足

$$\rho<\min\left\{1,\frac{2^{v-1}\pi\delta}{L},\frac{\pi^2\delta^2}{4L^2P}\right\}. \tag{8.34}$$

接下来, 我们用分类讨论的方法证明定理.

(a) 假定 $F(z)$ 满足

$$|I-F(z)|<\frac{1}{4}\rho,\quad \forall z\in\overline{U}_1\subset K(\delta).$$

我们将通过对 v 归纳, 构造一列矩阵值全纯函数 $G_v(z)$, $G'_v(z)$, $G''_v(z)$, 满足:

(i) $G_1(z)=F(z)-I$;

(ii) $G_v(z)$ 在 $\overline{U}_v$ 的某开邻域上全纯, 且 $|G_v(z)|\leqslant\rho/4^v$, 对任意 $z\in\overline{U}_v$ 均成立;

(iii) $G'_v(z)$ 在 U'_v 上全纯, 且 $|G'_v(z)|\leqslant L\rho/2^v\pi\delta$, 对任意 $z\in\overline{U}'_{v+1}$ 均成立, 对 $G''_v(z)$ 亦作类似要求;

(iv) 对任意 $z\in U_v$, $G_v(z)=G'_v(z)+G''_v(z)$;

(v) 对任意 $z\in\overline{U}_{v+1}$, $\big(I+G'_v(z)\big)\big(I+G_{v+1}(z)\big)\big(I+G''_v(z)\big)=\big(I+G_v(z)\big)$.

假定给定满足 (ii) 的函数 $G_v(z)$; 对 $v=1$, 由分类假设, 由 (i) 定义的 $G_1(z)=F(z)-I$ 已经满足条件. 由引理 8.13 知, 可分别构造 $G'_v(z)$ 及 $G''_v(z)$ 满足 (iii) 和 (iv). 回忆 (8.34), 利用 (8.33), 有

$$|G'_v(z)|\leqslant\frac{1}{2},\quad \forall z\in\overline{U}'_{v+1},$$

及

$$|G''_v(z)|\leqslant\frac{1}{2},\quad \forall z\in\overline{U}''_{v+1}.$$

现在, 上面两个不等式在 $\overline{U}_{v+1}=\overline{U}'_{v+1}\cap\overline{U}''_{v+1}$ 上同时成立. 因此, $\big(I+G'_v(z)\big)$ 与 $\big(I+G''_v(z)\big)$ 均在 $\overline{U}_{v+1}$ 某开邻域上非奇异, 从而, 存在唯一 $\overline{U}_{v+1}$ 某开邻域上的矩阵值全纯函数 $G_{v+1}(z)$, 使得 (v) 成立. 为完成归纳步骤, 只需证明 $G_{v+1}(z)$ 也满足 (ii). 而由引理 8.12 及条件 (8.34), 对任意 $z\in\overline{U}_{v+1}$,

$$|G_{v+1}(z)|\leqslant P\cdot\left(\frac{L\rho}{2^v\pi\delta}\right)^2\leqslant\frac{\rho}{4^{v+1}}$$

自然满足条件.

现在, 我们已经构造了满足上述条件的函数族. 定义

$$F_v(z)=I+G_v(z),\quad F'_v(z)=I+G'_v(z),\quad F''_v(z)=I+G''_v(z),$$

显然, 它们分别为 $\overline{K}$, $\overline{K}'$ 及 $\overline{K}''$ 上的非奇异矩阵值全纯函数. 对任意 $z\in\overline{K}$, 由 (iv) 知

$$F'_v(z)F_{v+1}(z)F''_v(z)=F_v(z).$$

重复使用这个公式, 由 (i) 知, 对任意 $z\in\overline{K}$, 任意 v,

$$F(z)=(F'_1(z)F'_2(z)\cdots F'_v(z))F_{v+1}(z)(F''_v(z)\cdots F''_2(z)F''_1(z)). \tag{8.35}$$

利用 (iii) 及引理 8.11, 知

$$F'(z) = \lim_{v\to\infty}(F_1'(z)F_2'(z)\cdots F_v'(z))$$

是 K' 上的非奇异矩阵值全纯函数, 类似定义 $F''(z)$, 则 $F''(z)$ 亦如此; 由 (ii) 不难得出, 对任意 $z\in K$

$$\lim_{v\to\infty} F_{v+1}(z) = I.$$

令 (8.35) 中的 $v\to\infty$, 知对任意 $z\in K$, $F(z) = F'(z)F''(z)$.

(b) 对一般的 $F(z)$, 选常数 $C>0$, 使得对任意 $z\in\overline{U}_1$, $|F(z)^{-1}|\leqslant C$. 由定理 8.10, 存在 $K'(\delta)\cup K''(\delta)$ 上的非奇异矩阵值全纯函数 $H(z)$, 使得对任意 $z\in\overline{U}_1$, $|F(z)-H(z)|<\rho/4C$, 因此, 对任意 $z\in\overline{U}_1$,

$$|I - F(z)^{-1}H(z)| \leqslant \frac{1}{4}\rho.$$

于是可对 $F(z)^{-1}H(z)$ 利用前面的证明, 即分别存在 K' 和 K'' 上的非奇异矩阵值全纯函数 $H'(z)$ 及 $H''(z)$, 使得对任意 $z\in K$,

$$F(z)^{-1}H(z) = H''(z)H'(z).$$

现在, $F'(z) = H(z)H'(z)^{-1}$ 与 $F''(z) = H''(z)^{-1}$ 分别在 K' 和 K'' 上非奇异且全纯, 满足对任意 $z\in K$,

$$F(z) = F'(z)F''(z).$$

于是定理得证. □

作为层上同调理论在解析问题上的第一个重要应用, 我们将导出投影分解合并定理. 证明过程展示了上同调方法在从局部结论过渡到整体结论中的重要作用.

定理 8.8 及 Cartan 引理, 提供了给定层在相交邻域上投影分解融合的技巧. 下面, 我们来详述这一技巧.

令 K, K', $K''\subset \mathbf{C}^n$ 表示 Cartan 引理中出现的开的单连通多圆域, 则有下面的引理.

引理 8.15 *若 $\mathcal{F}$ 是 $\overline{K}'\cup\overline{K}''$ 某开邻域上的解析层, 满足分别在 $\overline{K}'$ 及 $\overline{K}''$ 的某开邻域上有长度有限的投影分解, 则 $\mathcal{F}$ 在 $\overline{K}'\cup\overline{K}''$ 某开邻域上也有长度有限的投影分解.*

证明: 适当放大 K, K' 和 K'', 只需证 $\mathcal{F}$ 在多圆域 $K'\cup K''$ 上有长度有限的投影分解. 令 U', U'' 分别为包含 $\overline{K}'$ 及 $\overline{K}''$ 的开多圆域, 满足 $U=U'\cap U''$ 也是多圆域, 且 $\mathcal{F}$ 分别在 U' 及 U'' 上有长度有限的投影分解. 这两个正合列提

供了 $\mathcal{F}|U$ 在 U 上的两个有限长投影分解. 由定理 8.8, 经过有限次修正后, 两个投影分解是依附在 $i:\mathcal{F}|U\longrightarrow\mathcal{F}|U$ 上的同构. 由定义可知, $U\subset U'$ 上的修正可自然地延拓到整个 U' 上的修正. 从而, 经过 U' 及 U'' 上两个投影分解的有限次修正, 有以下解析层的正合列图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0\longrightarrow & p_m(\mathcal{O}|U') & \xrightarrow{\mu_m} \cdots \xrightarrow{\mu_1} & p_0(\mathcal{O}|U') & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{F}|U' \longrightarrow 0 \\ & \lambda_m\downarrow & & \lambda_0\downarrow & & i\downarrow \\ 0\longrightarrow & p_m(\mathcal{O}|U'') & \xrightarrow{\nu_m} \cdots \xrightarrow{\nu_1} & p_0(\mathcal{O}|U'') & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{F}|U'' \longrightarrow 0 \end{array} \tag{8.36}$$

这里 $\lambda_0,\ \lambda_1,\cdots,\ \lambda_m$ 均为 $U=U'\cap U''$ 上的同构, 使得 (8.36) 限制在 U 上交换. 由于每个同态 λ_i 均可表示为 U 上的非奇异矩阵值全纯函数 $F_i(z)$. 由 Cartan 引理, 分别存在 K' 与 K'' 上的非奇异矩阵值全纯函数 $F_i'(z)$ 及 $F_i''(z)$, 使得对任意 $z\in K$,

$$F_i(z)=F_i''(z)^{-1}F_i'(z)^{-1}.$$

反过来, 这些矩阵可定义同构

$$\lambda_i':p_i(\mathcal{O}|K')\longrightarrow p_i(\mathcal{O}|K')$$

及

$$\lambda_i'':p_i(\mathcal{O}|K'')\longrightarrow p_i(\mathcal{O}|K''),$$

使得限制在 K 上有

$$\lambda_i=(\lambda_i'')^{-1}(\lambda_i')^{-1}.$$

于是有下面的正合列图表

$$\begin{array}{ccccccccc} 0\longrightarrow & p_m(\mathcal{O}|K') & \xrightarrow{\mu_m'} \cdots \xrightarrow{\mu_1'} & p_0(\mathcal{O}|K') & \xrightarrow{\mu'} & \mathcal{F}|K' \longrightarrow 0 \\ & \lambda_m'\downarrow & & \lambda_0'\downarrow & & i\downarrow \\ 0\longrightarrow & p_m(\mathcal{O}|K') & \xrightarrow{\mu_m} \cdots \xrightarrow{\mu_1} & p_0(\mathcal{O}|K') & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{F}|K' \longrightarrow 0 \\ & \lambda_m\downarrow & & \lambda_0\downarrow & & i\downarrow \\ 0\longrightarrow & p_m(\mathcal{O}|K'') & \xrightarrow{\nu_m} \cdots \xrightarrow{\nu_1} & p_0(\mathcal{O}|K'') & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{F}|K'' \longrightarrow 0 \\ & \lambda_m''\downarrow & & \lambda_0''\downarrow & & i\downarrow \\ 0\longrightarrow & p_m(\mathcal{O}|K'') & \xrightarrow{\nu_m'} \cdots \xrightarrow{\nu_1'} & p_0(\mathcal{O}|K'') & \xrightarrow{\nu'} & \mathcal{F}|K'' \longrightarrow 0 \end{array} \tag{8.37}$$

与前面一样, $\lambda_0,\cdots,\lambda_m$ 定义在 $U\supset K'\cap K''$ 上. 而

$$\mu',\ \mu_1',\cdots,\mu_m',\ \nu',\ \nu_1',\cdots,\nu_m'$$

是使图表交换所唯一决定的同态. 因此, 若限制在 $K=K'\cap K''$ 上, (8.37) 的第一行与最后一行, 是依附在恒等映射 $i:\mathcal{F}|K\longrightarrow\mathcal{F}|K$ 上, 由

$$\lambda_i''\lambda_i\lambda_i':p_i(\mathcal{O}|K)\longrightarrow p_i(\mathcal{O}|K)$$

定义的投影分解同构. 注意到 $\lambda_i''\lambda_i\lambda_i'$ 在 K 上是恒等映射, 因此前面提到的同构在 K 上是恒等映射. 也就是, 它们一起可定义 $K'\cup K''$ 上的投影分解. □

定理 8.16 (投影分解合并定理) 令 K 是开的单连通多圆域 $D\subset\mathbf{C}^n$ 中的紧子集, 则存在开集 $U\subset\mathbf{C}^n$, $K\subset U\subset\overline{U}\subset D$, 使得 D 上的任意凝聚解析层在 U 上都有长度有限的投影分解.

证明: 由 Riemann 映射定理, 不妨假定 D 是 $\mathbf{C}^n$ 中的多正方形. 取 $\mathbf{C}^n$ 中的多正方形 U, 使得 $K\subset U\subset\overline{U}\subset D$. 记

$$U=U_1\times\cdots\times U_n,$$

这里 U_i 是 z_i 平面上的正方形. 由关于层的 Hilbert 投影分解定理, D 上的任意凝聚层 $\mathcal{F}$, 在 D 上任意点的某邻域上都有投影分解. 为此, 用与边平行的线段将 U_i 分解为一些子长方形. 从而将 U 分解为有限个多长方形, 使得层 $\mathcal{F}$ 在各个多长方形的邻域上均有长度有限的投影分解. 重复使用引理 8.15, 可由以下方法得到 U 闭包邻域上长度有限的投影分解.

简单起见, 我们仅讨论 $n=2$ 的情形. 此时, 正方形 U_1, U_2 被分解为一些子长方形的并 (见图 8.5), 且 $\mathcal{F}$ 在 U_1 的任意子长方形与 U_2 的任意子长方形的积上均有投影分解 (这里的子长方形是由前面正方形剖分得到的).

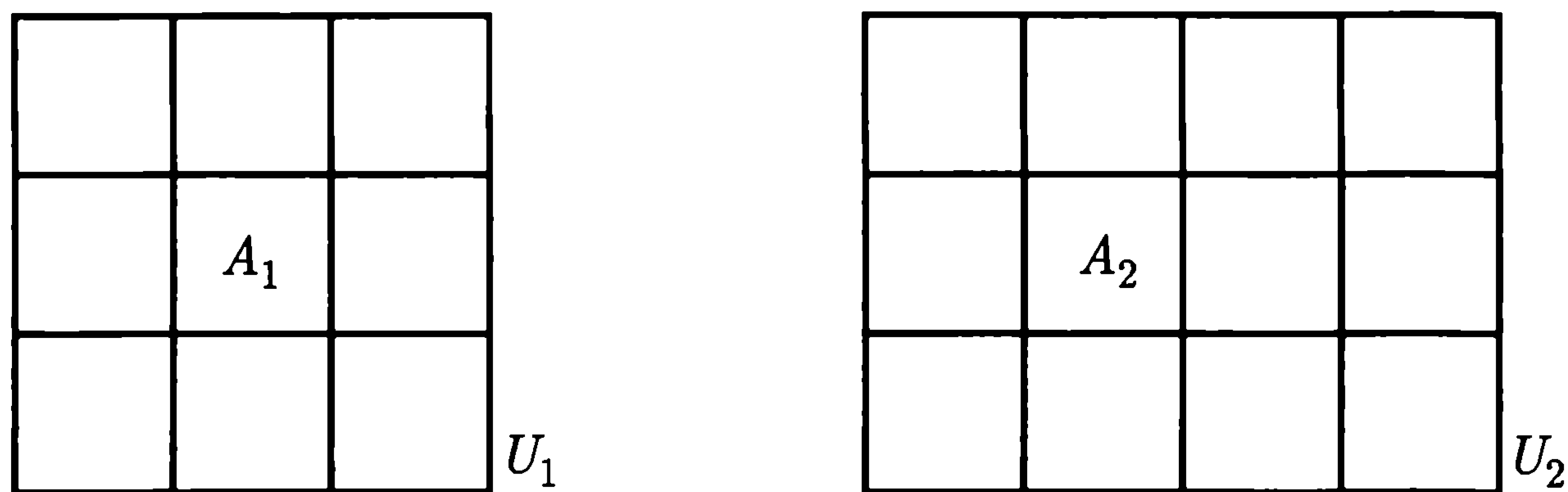


图 8.5

对固定的子长方形 $A_2\subset U_2$, 考虑多长方形 $A_1\times A_2$, 这里 A_1 在 U_1 的分解中变动. 由引理 8.15, 沿着 U_1 各行, 各解可融合. 再对各行利用引理 8.15, 就可得到 $U_1\times A_2$ 上长度有限的投影分解 (见图 8.6).

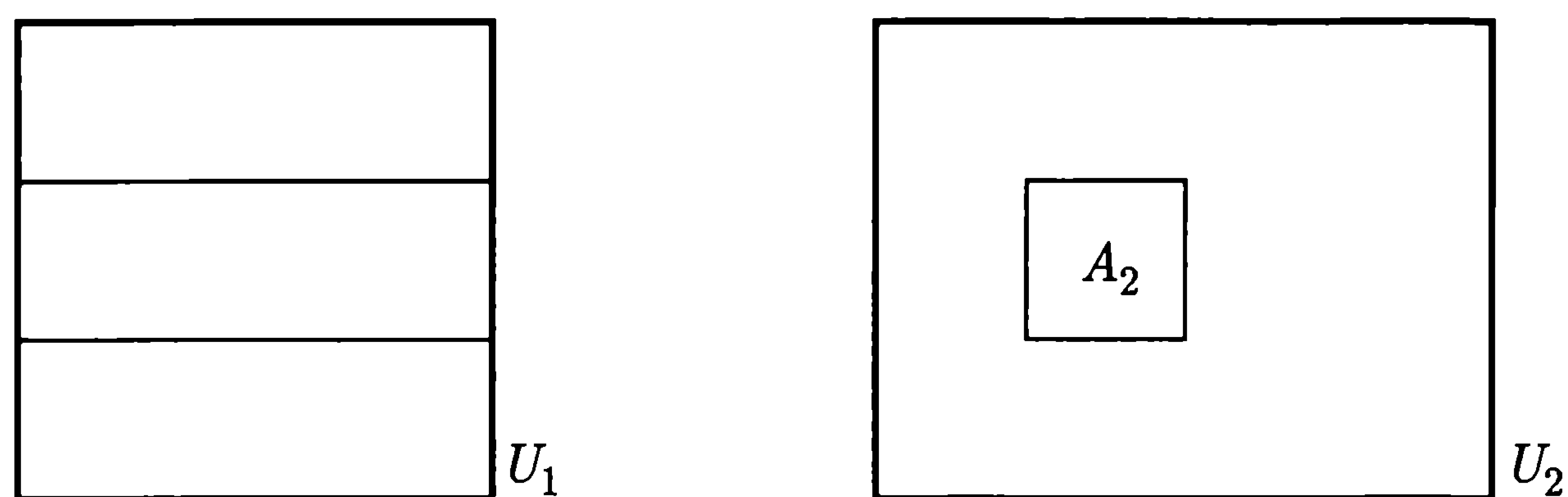


图 8.6

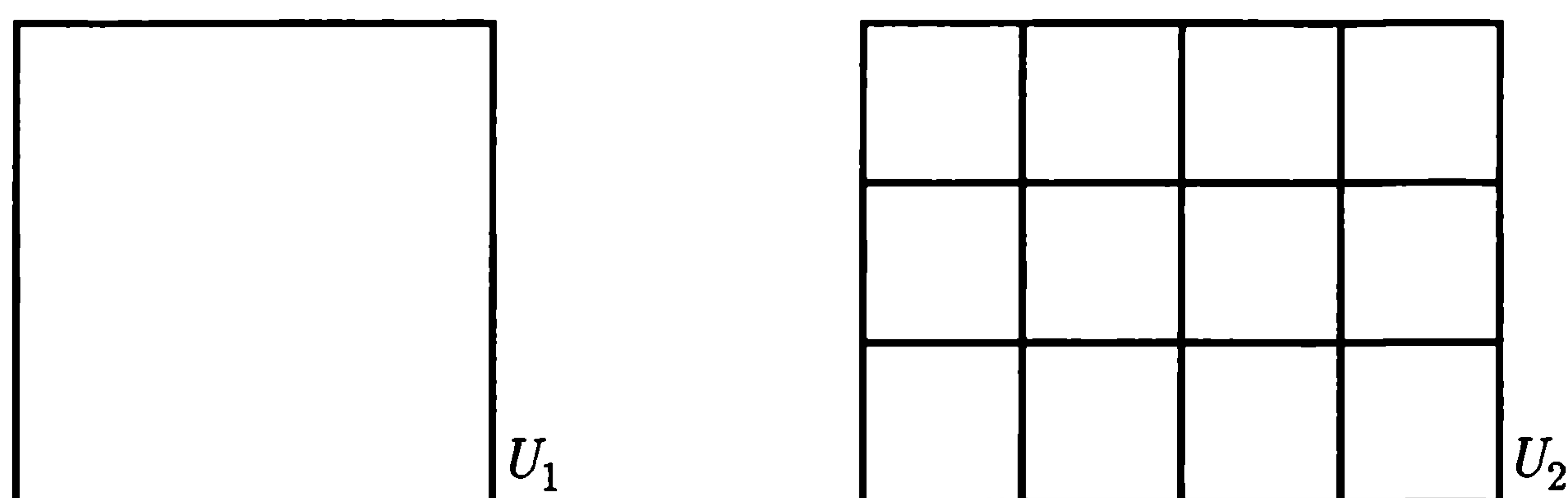


图 8.7

再对所有子长方形 $A_2 \subset U_2$ 做类似讨论 (见图 8.7), 最终可得到 $U_1 \times U_2$ 上长度有限的投影分解. □

作为合并定理的应用, 我们有以下优美且有用的结论.

定理 8.17 *令 $\mathcal{F}$ 是单连通多圆域 $D \subset \mathbf{C}^n$ 上的凝聚解析层, 则对任意单连通多圆域 $K, \overline{K} \subset D$, 有*

(1) 层 $\mathcal{F}|K$ 由 $\Gamma(K,\mathcal{F})$ 中有限多个整体截影生成;

(2) $H^q(K,\mathcal{F}) = 0, \forall q \geqslant 1$.

证明: 由投影分解合并定理, 层 $\mathcal{F}$ 在 $\overline{K}$ 含在 D 中的某开邻域上有长度有限的投影分解, 自然在 K 上亦如此, 即形如

$$\cdots \longrightarrow p(\mathcal{O}|K) \xrightarrow{\mu} \mathcal{F}|K \longrightarrow 0$$

投影分解正合列长度有限. 由于 $p(\mathcal{O}|K)$ 可由整体截影 $E_i \in \Gamma(K, p\ \mathcal{O})$ 生成, 且 $\mu(p\ \mathcal{O}) = \mathcal{F}|K$, 故 $\mathcal{F}|K$ 可由整体截影 $\mu(E_i) \in \Gamma(K,\mathcal{F})$ 生成, 结论 (1) 得证. (2) 可由定理 8.4 得到. □

第九章 Stein 空间

本章, 我们先证明 Oka 定理, 即解析子集的理想层是凝聚解析层. 而后, 我们讨论 Stein 空间上的 Cantan 定理 A、B 及其应用.

§9.1 Oka 定理

定义 9.1 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的区域, V 是 Ω 的子集, 若

(1) V 是 Ω 的闭子集;

(2) 任意 $x \in \Omega$, 存在 $U_x \in \mathcal{U}_x$ 满足

$$V \cap U_x = \{x \in U | f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0\},$$

这里 $f_1, \cdots, f_r$ 是 U_x 中的全纯函数, 则称 V 是**解析子集**.

由于 V 是 Ω 的闭子集, 若 $x \in \Omega \backslash V$, 则存在开集 $U_x \in \mathcal{U}_x$, 使得 $U_x \cap V = \varnothing$. 因此, 条件 (2) 可减弱到 $x \in V$ 的情形.

若 V 是区域 $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ 的解析子集, 利用其在 Ω 上各点处的芽 (见第六章) 的零化理想, 可自然地构造 Ω 上的层 $\mathcal{I}_V$, 称其为 V 的理想层. 我们要说明, $\mathcal{I}_V$ 是 Ω 上的 $\mathcal{O}$-模层: $\forall x \in \Omega$, $(\mathcal{I}_V)_x$ 是所有在 x 某邻域全纯, 且在 V (精确地说, 是在 V 的含于此邻域的部分) 上为零的全纯函数在 x 点的芽的集合. 若 $\mathbf{f} \in (\mathcal{I}_\mathbf{V})_\mathbf{x}$, 则 f 在某个 $U_x \in \mathcal{U}_x$ 上全纯, 且 $f|_{V \cap U_x} = 0$, 于是, 对任意 $y \in U_x$, $\mathbf{f}_y \in \mathcal{O}_y$. 从而 $\{\mathbf{f}_y | y \in U_x\}$ 是 $\mathcal{O}$ 中的开集, 于是

$$\mathcal{I}_V = \bigcup_{x \in \Omega} (\mathcal{I}_V)_x$$

是 $\mathcal{O}$ 中的开集. 显然, 任意 $x \in \Omega$, $(\mathcal{I}_V)_x$ 均为 $\mathcal{O}_x$ 的理想. 于是 $\mathcal{I}_V$ 是 $\mathcal{O}$ 的理想层, 自然是 $\mathcal{O}$- 模层.

由于 V 是 Ω 的闭子集, $\forall x \in \Omega\backslash V$, 存在 $U_x \in \mathcal{U}_x$, $U_x \cap V = \varnothing$, 则由 $(\mathcal{I}_V)_x$ 的定义, 若 $x \in \Omega\backslash V$, $(\mathcal{I}_V)_x = \mathcal{O}_x$.

以下定理是 $\mathcal{O}$-模层 $\mathcal{I}_V$ 的重要性质.

定理 9.2 (Oka 定理)　*$\mathcal{I}_V$ 是 $\mathcal{O}$ 凝聚层.*

证明: 由于 $\mathcal{I}_V$ 是 $\mathcal{O}$ 的子层, 只需证 $\mathcal{I}_V$ 有限生成. 由于 $\forall x \in \Omega\backslash V$, 存在 $U_x \in \mathcal{U}_x$, 使得 $U_x \cap V = \varnothing$, 于是 $\mathcal{I}_V|U_x = \mathcal{O}|U_x$ 自然有限生成. 故只需讨论 $x \in V$ 的情形.

$\forall x \in V$, 存在其开邻域 $U_x \subset \Omega$, 使得

$$U_x \cap V = \{y \in U_x | f_1(y) = \cdots = f_k(y) = 0\}.$$

于是 $f_1, \cdots, f_k$ 在 x 点的芽生成 $\mathcal{O}_x$ 的理想 $\mathcal{I} = (f_1, \cdots, f_k)$, 在不引起混淆的情况下, 不区分 $\mathrm{loc}\,\mathcal{I}$ 与其代表元, 则存在 x 的邻域 U, $U \in \mathcal{U}_x$, 使得

$$\mathrm{loc}\,\mathcal{I} = U \cap V.$$

$\mathcal{I}$ 有准素分解

$$\mathcal{I} = Q_1 \cap \cdots \cap Q_l,$$

故

$$\sqrt{\mathcal{I}} = P_1 \cap \cdots \cap P_l,$$

这里 $P_i = \sqrt{Q_i}$, $1 \leqslant i \leqslant l$, 且 P_i, $1 \leqslant i \leqslant l$ 是 $\mathcal{O}_x$ 的素理想. 更进一步, 在 x 的某邻域上有

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_l; \quad V_i = \mathrm{loc}\ P_i; \quad 1 \leqslant i \leqslant l.$$

故在此邻域上

$$\mathcal{I}_V = \mathcal{I}_{V_1} \cap \cdots \cap \mathcal{I}_{V_l}.$$

若各个 $\mathcal{I}_{V_i}$, $1 \leqslant i \leqslant l$ 均为 $\mathcal{O}$ 凝聚层, 由于凝聚是局部性质, 故 $\mathcal{I}_V$ 也是凝聚层. 故只需讨论 $V = \mathrm{loc}\ P$, P 是素理想的情形.

简单起见, 假定 $x = 0 \in \Omega$. 由于证明很大程度上依赖第六章的结论, 我们采用定理 6.14 中的记号:

$$R_n = {}_n\mathcal{O}_0, \quad R_n/P = R_k[\overline{z_{k+1}}, \cdots, \overline{z_n}].$$

记 R_n/P 的商域为 $M_k(\overline{z_{k+1}},\cdots,\overline{z_n})=M_k(\overline{z_{k+1}})$, 这里 M_k 是 R_k 的商域. 对 $k+1\leqslant\nu\leqslant n$, $\varphi_\nu(z)\in R_k[z]$ 是 $\overline{z_v}$ 的首一极小多项式.

$$Dz_\nu-\psi_\nu(z_{k+1})\in P;\quad k+2\leqslant\nu\leqslant n.$$

D 是 φ_{k+1} 的判别式. 由引理 6.15, 在 0 的某邻域上有

$$V\backslash\{D=0\}=\mathrm{loc}\{\varphi_{k+1},Dz_{k+2}-\psi_{k+2}(z_{k+1}),\cdots,Dz_n-\psi_n(z_{k+1})\}\backslash\{D=0\},$$

这里 $\varphi_{k+1}[z_{k+1}]\in R_k[z_{k+1}]$ 是 0 点关于 z_{k+1} 的 Weierstrass 多项式.

由于 R_n 是 Nöether 环, 知 P 有限生成, 设 $P=(g_{1,0},\cdots,g_{r,0})$. 取 0 点充分小的开邻域, 使得 $g_1,\cdots,g_r$ 都有定义. 类似, 存在 0 点充分小的开邻域, 使得 $g_1,\cdots,g_r$, $\varphi_{k+1},\cdots,\varphi_n$, $Dz_{k+2}-\psi_{k+2}(z_{k+1}),\cdots,Dz_n-\psi_n(z_{k+1})$ 在其上均有定义.

引入 0 点充分小的开邻域上的理想层 $\mathcal{I}$, 使得其在 z (z 在前面提到的邻域中) 点处的茎是由

$$g_1,\cdots,g_r,\ \varphi_{k+1},\cdots,\varphi_n,\ Dz_{k+2}-\psi_{k+2}(z_{k+1}),\cdots,Dz_n-\psi_n(z_{k+1})$$

在 z 点的芽作为生成元所生成的理想. 显然 $\mathcal{I}$ 各点的代表元 (即那一点附近的全纯函数) 均在 V 上为零, 于是 $\mathcal{I}$ 自然是 $\mathcal{I}_V$ 的子层. 若能证明在 0 点某邻域上,

$$\mathcal{I}_V\subset\mathcal{I},$$

则定理自然成立. 为证明反方向包含关系, 我们要做一些准备.

简单起见, 将 $\mathcal{I}$ 的生成元集记为

$$g:=\{g_1,\cdots,g_r,g_{r+1},\cdots,g_t\},$$

于是

$$\mathcal{I}=(g).$$

由于 $\mathcal{I}$ 是 $\mathcal{O}$ 凝聚理想层, 故 $\mathcal{O}/(g)$ 是 $\mathcal{O}$ 凝聚层. 定义层同态

$$\lambda:{}_n\mathcal{O}/(g)\longrightarrow{}_n\mathcal{O}/(g),$$

$$[\mathbf{f}]\longmapsto[\mathbf{Df}],$$

这里 $[\mathbf{f}]$ 是 $\mathbf{f}\in{}_n\mathcal{O}$ 的等价类. 于是 $\mathrm{Ker}(\lambda)$ 也是 $\mathcal{O}$ 凝聚层, 由于 $\mathcal{I}_0=P$, $D_0\notin P=\mathcal{I}_0$, 且 P 是素理想, 知 $\mathrm{Ker}(\lambda)_0=0$. 由于 $\mathrm{Ker}(\lambda)$ 是凝聚层, 由命题 7.5, 存在 0 点的开邻域 W, 使得在 W 上 $\mathrm{Ker}(\lambda)\equiv0$, 从而 $\forall D^mf\in\mathcal{I}_y$, $m\in\mathbf{Z}^+$, $y\in W$, 都有 $f\in\mathcal{I}_y$.

现在, 若 $x \notin V$, 由于 $V = \mathrm{loc}(g_1, \cdots, g_r)$, 知 $g_1, \cdots, g_r$ 至少有一个在 x 点不为零. 不妨假定 $g_1(x) \neq 0$, 则 $\mathcal{I}_x \supset (g_1)_x = \mathcal{O}_x = (\mathcal{I}_V)_x$.

若 $x \in V$, 且 $x = (x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n) \neq 0$. 一般来说, $\varphi_{k+1}(z_{k+1})$, $\varphi_{k+2}(z_{k+2}), \cdots, \varphi_n(z_n)$ 并非 x 点分别关于 $(z_{k+1} - x_{k+1}), \cdots, (z_n - x_n)$ 的 Weierstrass 多项式. 但由 Weierstrass 预备定理, 有分解

$$\varphi_\nu(z_\nu) = U_\nu \Phi_\nu(z_\nu - x_\nu); \quad k+1 \leqslant \nu \leqslant n.$$

这里 $\Phi_\nu(z_\nu - x_\nu)$ 是 x 点关于 $z_\nu - x_\nu$ 的 Weierstrass 多项式, U_ν 是 $\mathcal{O}_x$ 中的单位. 于是

$$\Phi_\nu \in \mathcal{I}_x; \quad k+1 \leqslant \nu \leqslant n.$$

因此, 不妨假定 Weierstrass 多项式 $\Phi_\nu = \varphi_\nu$. 进一步, 考虑分解

$$\Phi_\nu = \Phi'_\nu \Phi''_\nu,$$

这里, Φ'_ν 是 Φ_ν 的所有满足条件 (*) 的不可约因子的乘积, 不可约因子满足条件 (*) 是指, 其在 $(x_1, \cdots, x_k, x_\nu)$ 附近零点的提升过点 x (见图 9.1). 易知, Φ'_ν 与 Φ''_ν 均为 x 点关于 $(z_\nu - x_\nu)$ 的 Weierstrass 多项式.

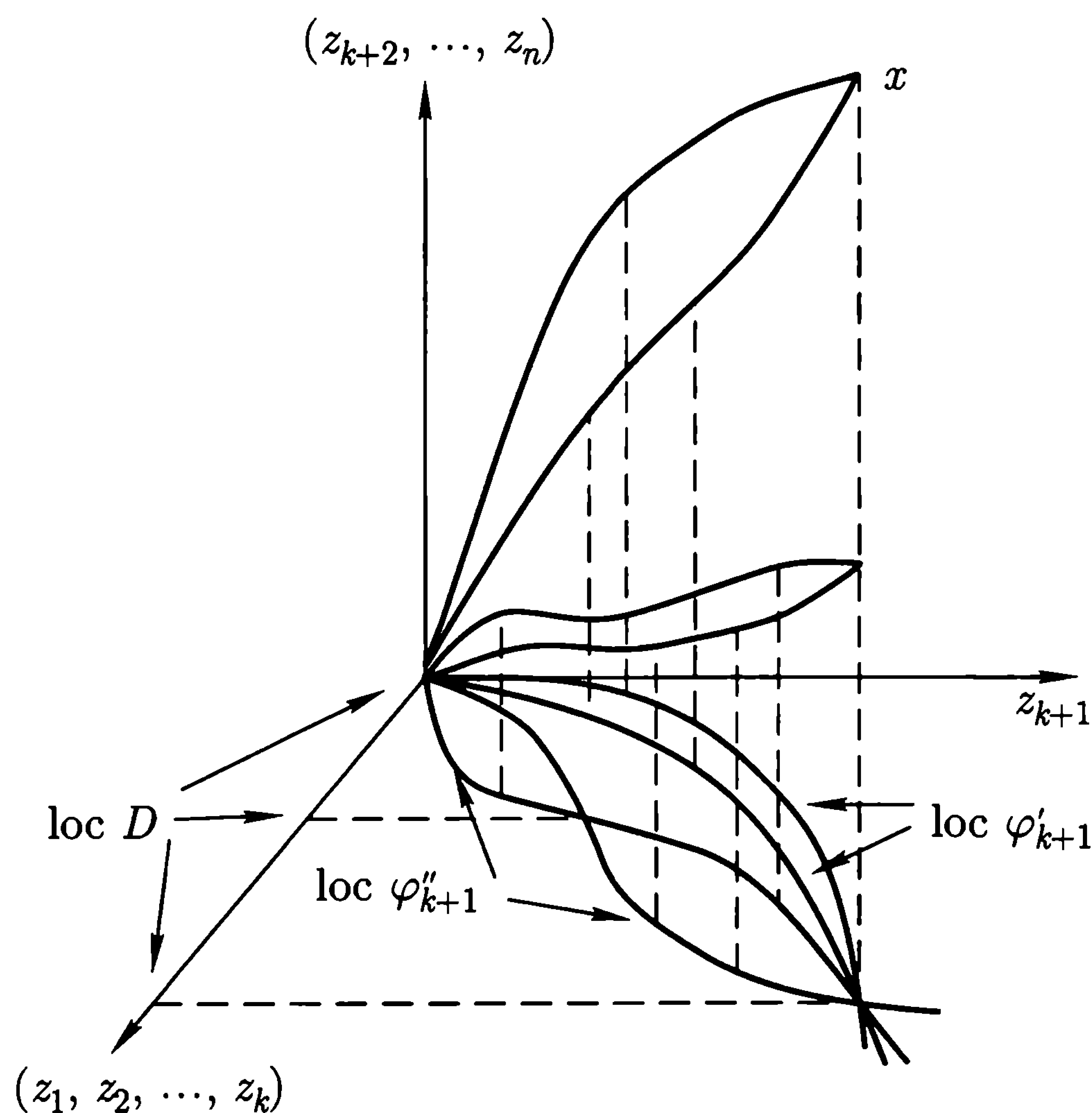


图 9.1

特别的, 对 $\nu = k+1$,

$$\deg \Phi'_{k+1} = \lambda' \leqslant \lambda = \deg \Phi_{k+1},$$

类似定理 6.14 的证明, 任意 $f \in \mathcal{O}_x$, 存在 $\alpha \in \mathbf{Z}^+$, 使得

$$D^\alpha f = \sum_{j=k+1}^{n} A_j \Phi'_j + \sum_{i=k+2}^{n} B_i(Dz_i - \psi_i(z_{k+1})) + r_f, \tag{9.1}$$

这里 $A_j, B_i \in \mathcal{O}_x$; $k+1 \leqslant j \leqslant n$; $k+2 \leqslant i \leqslant n$, $r_f \in {}_k\mathcal{O}\left[z_{k+1} - x_{k+1}\right]$ 且

$$\deg r_f < \lambda' = \deg \Phi'_{k+1}.$$

令 $\pi : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^{k+1}$ 是 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 向 $(z_1, \cdots, z_{k+1})$ 的投影; $\tau : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^k$ 是 $(z_1, \cdots, z_n)$ 向 $(z_1, \cdots, z_k)$ 的投影.

若 $x \notin \operatorname{loc} D$, 由引理 6.15, τ 限制在 $U_x \cap V$ 上是到 $\tau(U_x)$ 的双全纯同胚, 这里 U_x 是 x 的某个充分小的开邻域, 于是, $\forall y = (y_1, \cdots, y_k) \in \tau(U_x)$, 在 $U_x \cap V$ 中存在唯一 $\tilde{y} = (y_1, \cdots, y_k, y_{k+1}, \cdots, y_n)$, 使得 $\tau(\tilde{y}) = y$. 事实上, 引理 6.15 告诉我们更多: $\pi(U_x \cap V)$ 可看成是 $\tau(U_x \cap V)$ 的单页覆盖, 且

$$\pi(U_x \cap V) = \operatorname{loc} \Phi'_{k+1} \cap \pi(U_x).$$

于是 Φ_{k+1} 在 $(y_1, \cdots, y_k, y_{k+1})$ 附近的零点集是单页的. 由于 Φ'_{k+1} 是 x 点处关于 $(z_{k+1} - x_{k+1})$ 的 Weierstrass 多项式, 知 Φ''_{k+1} 在 x 点附近无零点, 即 Φ''_{k+1} 是 $\mathcal{O}_x$ 中单位, 因此

$$\Phi'_{k+1} \in \mathcal{I}_x.$$

若 $x \in \operatorname{loc} D$, 问题就变得复杂了, 图 9.1 可帮助我们理解.

图 9.1 中通过 x 点的两条 "曲线" 是 $\operatorname{loc} \Phi'_{k+1}$ 在 V 上的提升, 另外两条是 $\operatorname{loc} \Phi''_{k+1}$ 在 V 上的提升.

现在令

$$\mathcal{I}_x = \bigcap_{j=1}^{s} F_j$$

是 $\mathcal{I}_x$ 的准素分解. 由于

$$\Phi'_{k+1,x}\Phi''_{k+1,x} \in \mathcal{I}_x \subset F_j; \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

若 $\Phi''_{k+1,x} \notin \sqrt{F_j}$, 则由准素理想的定义, $\Phi'_{k+1,x} \in F_j$. 若 $\Phi''_{k+1,x} \in \sqrt{F_j}$, 则

$$\operatorname{loc}\sqrt{F_j} = \operatorname{loc} F_j \subset \operatorname{loc} \Phi''_{k+1}.$$

另一方面, $\operatorname{loc} F_j \subset \operatorname{loc} \mathcal{I}_x$. 由引理 6.15,

$$\operatorname{loc} \mathcal{I}_x \backslash \operatorname{loc} D = \operatorname{loc}(\mathcal{I}_V)_x \backslash \operatorname{loc} D,$$

于是

$$\operatorname{loc} \mathcal{I}_x \subset \operatorname{loc}(\mathcal{I}_V)_x \cup \operatorname{loc} D,$$

故

$$\operatorname{loc} F_j \subset (\operatorname{loc} \mathcal{I}_V)_x \cup \operatorname{loc} D,$$

因此

$$\operatorname{loc} F_j \subset ((\operatorname{loc} \mathcal{I}_V)_x \cap \operatorname{loc} \Phi''_{k+1,x}) \cup (\operatorname{loc} D \cap \operatorname{loc} \Phi''_{k+1,x}).$$

由于在 x 点附近, $V\backslash\operatorname{loc} D$ 是 $\tau(V\backslash\operatorname{loc} D)$ 的 λ' 页覆盖, 又因为 $\forall y \in \tau(V\backslash\operatorname{loc} D)$, $\Phi'_{k+1}(y, z_{k+1}) = 0$ 恰有 λ' 个根, 故

$$\operatorname{loc} \Phi''_{k+1,x} \cap (V\backslash\operatorname{loc} D) = \varnothing,$$

于是

$$\operatorname{loc} \Phi''_{k+1,x} \cap (\operatorname{loc} \mathcal{I}_V)_x \subset \operatorname{loc} D,$$

因此

$$\operatorname{loc} F_j \subset \operatorname{loc} D,$$

故 $D \in \sqrt{F_j}$, 即存在 $m_j \in \mathbf{Z}^+$, 使得 $D^{m_j} \in F_j$. 综上所述, 令

$$m = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} m_j,$$

则

$$D^m \Phi'_{k+1,x} \in F_j; \quad 1 \leqslant j \leqslant s.$$

故

$$D^m \Phi'_{k+1,x} \in \mathcal{I}_x.$$

由前面的铺垫知

$$\Phi'_{k+1,x} \in \mathcal{I}_x.$$

同理可得

$$\Phi'_{j,x} \in \mathcal{I}_x, \quad k+2 \leqslant j \leqslant n.$$

有了这些准备, 就可以方便地证明反方向包含关系了.

对任意 $f \in (\mathcal{I}_V)_x$, 由 (9.1), 存在 $\alpha \in \mathbf{Z}^+$, 使得

$$D^\alpha f = \sum_{j=k+1}^{m} A_j \Phi'_j + \sum_{j=k+2}^{n} B_j (D z_j - \psi_j) + r_f.$$

由

$$(D z_j - \psi_j)_x, \quad \Phi'_{j,x} \in (\mathcal{I}_V)_x,$$

知 $r_f \in (\mathcal{I}_V)_x$ 满足

$$r_f \in_k \mathcal{O}_x[z_{k+1} - x_{k+1}], \quad \deg r_f < \lambda'.$$

由于 $V\backslash \mathrm{loc}\, D$ 是 $\tau(V\backslash \mathrm{loc}\, D)$ 的 λ' 页覆盖, 必有 $r_f \equiv 0$. 现在 $\Phi'_{j,x}$ 及 $(Dz_j - \psi_j)_x$ 均属于 $\mathcal{I}_x$. 故 $f \in \mathcal{I}_x$, 于是在 x 附近,

$$\mathcal{I}_V = \mathcal{I}.$$

这就证明了 $\mathcal{I}_V$ 是 $\mathcal{O}$ 凝聚层. □

定义 9.3 令 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的区域, V 是 Ω 的解析子集. 定义 $\mathcal{O}$-模层

$${}_V\mathcal{O} = \mathcal{O}/\mathcal{I}_V.$$

若 $x \in \Omega\backslash V$, $(\mathcal{I}_V)_x = \mathcal{O}_x$, 故 $({}_V\mathcal{O})_x = 0$. 我们有以下 $\mathcal{O}$-模层正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_V \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{P} {}_V\mathcal{O} \longrightarrow 0, \tag{9.2}$$

由定理 7.12, ${}_V\mathcal{O}$ 是 $\mathcal{O}$ 凝聚层.

定义 9.4 令 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中的区域, V 是 Ω 的解析子集. $f: V \longrightarrow \mathbf{C}$ 是 V 上函数. 若对任意 $x \in V$, 存在 $U_x \in \mathcal{U}_x$ 及 U_x 上全纯函数 $\tilde{f}$, 使得

$$\tilde{f}|_{U_x \cap V} = f,$$

则称 f 是 V **上全纯函数.**

若 f 在 V 的开子集 W 上满足定义 9.4, 则称 f 在 W 上全纯. 由于

$$({}_V\mathcal{O})_x = \mathcal{O}_x/(\mathcal{I}_V)_x, \quad \forall x \in V,$$

$\forall \mathbf{f} \in {}_V\mathcal{O}_x$ 均为某个 $\tilde{\mathbf{f}}_x \in \mathcal{O}_x$ 在投影下的像, 易知 $\mathbf{f}_x \in {}_V\mathcal{O}_x$ 的代表元 f 是 $\tilde{\mathbf{f}}_x$ 的代表元 $\tilde{f}$ 在 V 上的限制. 因此 ${}_V\mathcal{O}_x$ 是 V 上全纯函数芽环. 由 (9.2), ${}_V\mathcal{O}$ 是 $\mathcal{O}$ 凝聚层. 注意到 ${}_V\mathcal{O}$ 不是 Hausdorff 空间. 令 $x \in V$, $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in {}_V\mathcal{O}_x$, $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$, U_f 与 W_g 分别是 $\mathbf{f}$ 及 $\mathbf{g}$ 的开邻域. 适当缩小这两个开邻域, 使得

$$\pi|_{V_f} : V_f \longrightarrow \pi(V_f)$$

与

$$\pi|_{W_g} : W_g \longrightarrow \pi(W_g)$$

均为同胚, 由于 $\forall y \in \pi(U_f) \cap \pi(W_g)\backslash V$, 茎 ${}_V\mathcal{O}_y$ 仅含零元素, 故 ${}_V\mathcal{O}_y \in U_f \cap W_g$. 因此 ${}_V\mathcal{O}$ 不是 Hausdorff 空间. 若将 ${}_V\mathcal{O}$ 限制在 V 上, 则 ${}_V\mathcal{O}|V$ 是一个环层, 满足 $1 \in \Gamma(V, {}_V\mathcal{O}|V)$. 我们已经知道 ${}_V\mathcal{O}$ 是 $\mathcal{O}$ 凝聚层. 事实上, 可进一步证明 ${}_V\mathcal{O}|V$ 是 Oka 环层, 即 ${}_V\mathcal{O}|V$ 是 ${}_V\mathcal{O}|V$ 凝聚层.

定理 9.5 ${}_V\mathcal{O}|V$ 是 ${}_V\mathcal{O}|V$ 凝聚层.

证明: 只需证明 ${}_V\mathcal{O}|V$ 的每个关系层有限生成. 任取 V 的开子集 $\tilde{U}$ 上的层同态

$$\tilde{\eta}: p({}_V\mathcal{O}|V) \longrightarrow {}_V\mathcal{O}|V,$$

取 Ω 的开集 U, 满足 $U\cap V=\tilde{U}$, 则有 U 上层同态

$$\eta: p({}_V\mathcal{O}) \longrightarrow {}_V\mathcal{O},$$

满足

$$\eta|_{U\cap V}=\tilde{\eta},\quad \eta|_{U\setminus V}\equiv 0.$$

由于 $p({}_V\mathcal{O})$ 和 ${}_V\mathcal{O}$ 均为 $\mathcal{O}$ 凝聚层, $\forall x\in\tilde{U}\subset U$, 存在开邻域 $U_x\in\mathcal{U}_x$, $U_x\subset U$ 及 U_x 上 $\mathcal{O}$ 层同态 $\lambda: q\mathcal{O}\longrightarrow p({}_V\mathcal{O})$, 使得

$$q\mathcal{O}\xrightarrow{\lambda} p({}_V\mathcal{O}) \xrightarrow{\eta} {}_V\mathcal{O} \tag{9.3}$$

在 U_x 上正合. 令 $\widetilde{U_x}=U_x\cap V$, 则 $\widetilde{U_x}$ 是 V 的开子集, 且 (9.3) 诱导了 $\widetilde{U_x}$ 上层同态

$$q_V\mathcal{O}|V \xrightarrow{\tilde{\lambda}} p({}_V\mathcal{O}|V) \xrightarrow{\tilde{\eta}} {}_V\mathcal{O}|V, \tag{9.4}$$

这里 $\tilde{\lambda}$ 由

$$\tilde{\lambda}((\widetilde{E_i})_y)=\lambda(E_i)_y,\quad \forall y\in\widetilde{U_x},\quad 1\leqslant i\leqslant q$$

决定; $E_i,\widetilde{E_i}=(E_i)|_V$; $1\leqslant i\leqslant q$, 分别为 $q\mathcal{O}$ 及 $q_V\mathcal{O}|V$ 的典则截影. 由 (9.3) 正合不难得出 (9.4) 也正合. 因此 ${}_V\mathcal{O}|V$ 是 ${}_V\mathcal{O}|V$ 凝聚层. □

§9.2 Stein 空间

大家都知道微分流形的定义, 给定拓扑流形上一个微分结构, 等价于给出一种拓扑流形上光滑函数的合理定义. 推广这一想法, 就有了下述环空间的概念.

定义 9.6 若 X 是 Hausdorff 空间, ${}_X\mathcal{O}$ 是其上复值连续函数芽层的含幺元的环子层, 称 $(X,{}_X\mathcal{O})$ 为**环空间**.

定义 9.7 令 $(X,{}_X\mathcal{O})$ 与 $(Y,{}_Y\mathcal{O})$ 是两个环空间, $f: X\longrightarrow Y$ 是连续映射. 若 $\forall x\in X$, $\forall \mathbf{h}\in {}_Y\mathcal{O}_{f(x)}$, $\mathbf{h}\circ\mathbf{f}\in {}_X\mathcal{O}_x$, 则称 f 是环空间 $(X,{}_X\mathcal{O})$ 与 $(Y,{}_Y\mathcal{O})$ 之间的**映射**.

我们对定义中出现的 $\mathbf{h}\circ\mathbf{f}$ 加以解释: $\mathbf{h}$ 是在点 $f(x)$ 某邻域上连续的函数 h 在点 $f(x)$ 处的芽, $\mathbf{h}\circ\mathbf{f}$ 是 $h\circ f$ 在 x 点处的芽. 于是, 环空间之间的映射可诱导环层之间的同态: $\forall x\in X$, 此环层同态在茎上的限制是下面的环同态

$$f^*: {}_Y\mathcal{O}_{f(x)} \longrightarrow {}_X\mathcal{O}_x,$$

$$\mathbf{h} \longrightarrow \mathbf{h}\circ\mathbf{f}.$$

若 f 是单射且 f^* 是满射, 则称 f 是环空间之间的单射.

定义 9.8 令 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 和 $(Y, {}_Y\mathcal{O})$ 是两个环空间, 若 $f: X\longrightarrow Y$ 是同胚且是环空间之间的单射, 则称其为环空间之间的**同构**.

此时, $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$, 故 $f^{-1}: Y\longrightarrow X$ 也是环空间之间的单射.

下面我们来说明, 环空间的确是流形的推广. 令 $(X,\mathcal{F})$ 是环空间, 若 $\forall x\in X$, 存在开邻域 $U\in\mathcal{U}_x$, 使得环空间 $(U,\mathcal{F}|_U)$ 同构于 $(G,\varepsilon|_G)$, 这里 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中开集, ε 是其上 C^∞ 函数芽层. 此时, 称 X 上函数是 C^∞, 当且仅当它是 $(X,\mathcal{F})$ 的截影, 则 $(X,\mathcal{F})$ 就有 C^∞ 流形结构, 称 $\mathcal{F}$ 是 C^∞ 函数芽层. 考虑同构

$$\Gamma(U,\mathcal{F}) \equiv \Gamma(G,\varepsilon),$$

称一截影为 U 上 C^∞ 函数, 当且仅当其在同构下的像是 G 上 C^∞ 函数.

定义 9.9 若对任意 $x\in X$, 都有其邻域 $U_x\in\mathcal{U}_x$,

$${}_X\mathcal{O}|U_x \cong {}_V\mathcal{O}|V,$$

这里 $\cong$ 是指环空间之间的同构, V 是某个复欧氏空间 $\mathbf{C}^n$ 的某个开集 Ω 的解析子集, 称环空间 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 为**复空间**.

定义 9.10 若

(1) $(X, {}_X\mathcal{O})$ 是复空间;

(2) $\Gamma(X, {}_X\mathcal{O})$ 在 X 中分离点且提供 X 的局部嵌入;

(3) X 全纯凸;

(4) X 满足第二可数公理.

称环空间 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 为 **Stein 空间**.

现在首先对定义 9.10 做进一步解释. (1) 就是定义 9.9, 故只需解释定义 9.10 中的 (2)、(3) 和 (4). (2) 中 $\Gamma(X, {}_X\mathcal{O})$ 在 X 中分离点是指, $\forall x,y\in X$, $x\neq y$, 都有 $f\in\Gamma(X, {}_X\mathcal{O})$, 使得 $f(x)\neq f(y)$; 提供局部嵌入是指, $\forall x\in X$, 都可找到

$$f_1,\cdots,f_n\in\Gamma(X, {}_X\mathcal{O})$$

给出 x 的开邻域到 $\mathbf{C}^n$ 的嵌入. 定义 9.10 中的条件 (3) 类似全纯域的定义, 即对 X 的任意紧集 K, 其全纯凸包

$$\hat{K} := \{x \in X|\ \ |f(x)| \leqslant \operatorname*{Sup}_{y\in K}|f(y)|,\ \forall f \in \Gamma(X,{}_X\mathcal{O})\}$$

也是紧的. 条件 (4) 及 (1) 表明 X 是局部紧的 Hausdorff 空间, 故 X 是 σ-紧的, 即

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i,$$

这里 K_i 是 X 的紧子集.

若 X 是紧空间, X 上全纯函数在 X 的每个分量上为常数. 从而, 若 X 是紧的解析空间, $(X, {}_X\mathcal{O})$ 不可能分离 X 中的点, 故 Stein 空间总是非紧的.

下面, 我们将证明 Cartan 定理 A 与 B. 为此, 首先介绍 Remmert 定理.

定义 9.11 令 X 和 Y 是两个拓扑空间, 若 f 连续, 且对 Y 的任意紧子集 K, $f^{-1}(K)$ 是 X 的紧子集, 称 $f : X \longrightarrow Y$ 为逆紧映射.

定理 9.12 (Remmert 定理) 令 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 和 $(Y, {}_Y\mathcal{O})$ 是两个复空间, $f : X \longrightarrow Y$ 是逆紧全纯映射, 则 $\operatorname{Im} f = f(X)$ 是 Y 的解析子集.

这个定理的证明归功于 R. Remmert. 读者可参照 R. Remmert 的论文

Projection Analytischer Neugen, Math. Ann. 130 (1956), 410-441

及

Holomorphe and Meromorphe Abbildungen Komplexer Räume, Math. Ann. 133 (1957), 328-370.

下面对 Remmert 定理的结论加以解释: 前面, 我们只定义了 $\mathbf{C}^n$ 的解析子集, 并没有给出复空间的解析子集的定义. 但是我们已经给出解析子集上全纯函数的定义, 知道它是一个局部概念. 于是, 自然有复空间上全纯函数的定义. 若 U 是复空间 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 的开集, 记 $\Gamma(U, {}_X\mathcal{O})$ 为 U 上所有全纯函数集合. 现在, 就可以定义复空间的解析子集了, 若 V 是 X 的闭子集, 且对任意 $x \in V$, 存在其开邻域 U_x; $U_x \subset X$, 满足

$$U_x \cap V = \{y \in U_x | f_1(y) = \cdots = f_r(y) = 0\},$$

这里 $f_1, \cdots, f_r$ 是 U_x 上全纯函数, 称 V 是复空间 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 的解析子集.

为方便以后讨论, 先对一些记号加以说明.

令 A, B 是两个含幺元 1 的交换环, M 是 B- 模, $f: A \longrightarrow B$ 是环同态, 则可利用 f 赋予 M 以 A-模结构. 模运算定义如下:

$$A \times M \longrightarrow M,$$
$$(a, m) \mapsto a \cdot m = f(a) \cdot m, \quad \forall a \in A, \quad \forall m \in M.$$

令 V 是 $\mathbf{C}^n$ 中区域 Ω 的解析子集, $\mathcal{F}$ 是 ${}_V\mathcal{O}|V$ 模层,

$$p: \mathcal{O}|V \longrightarrow {}_V\mathcal{O}|V = (\mathcal{O}/\mathcal{I}_V)|V$$

是层投影同态. 于是可赋予 $\mathcal{F}$ 以 $\mathcal{O}|V$ 模层结构. 由于 p 是满射, 故若 $\mathcal{F}$ 是 ${}_V\mathcal{O}|V$ 凝聚层, $\mathcal{F}$ 也是 $\mathcal{O}|V$ 凝聚层. 设 $\tilde{F}$ 是 $\mathcal{F}$ 到 Ω 的平凡延拓, 即若 $x \in V$, 则 $\tilde{\mathcal{F}}_x = \mathcal{F}_x$; 若 $x \in \Omega \backslash V$, 则 $\tilde{\mathcal{F}}_x = 0$. $\tilde{\mathcal{F}}$ 上拓扑的定义类似 ${}_V\mathcal{O}$:

$$\{\mathrm{Im}\ g \cup \{0_x\}_{x \in U \backslash V} | \forall g \in \Gamma(U \cap V, \mathcal{F})\},$$

U 取遍 Ω 的开子集, 可定义 $\tilde{\mathcal{F}}$ 的拓扑基. 因此, 若视为 $\mathcal{O}$ 模层, $\tilde{\mathcal{F}}$ 与 $\mathcal{F}$ 没有本质区别. 不同的是, 视前者定义在整个 Ω 上, 而视后者定义于 V. 由于 $\tilde{\mathcal{F}}_x = 0$; $\forall x \in \Omega \backslash V$, 故若 $\mathcal{F}$ 作为 ${}_V\mathcal{O}|V$ 模层, 在 V 上有长度有限的投影分解, 则 $\tilde{\mathcal{F}}$ 作为 $\mathcal{O}$ 模层, 在 Ω 上有相同长度的投影分解.

假定 V, W 分别为 $\mathbf{C}^n$ 与 $\mathbf{C}^m$ 的解析子集, $f: V \longrightarrow W$ 是双全纯同胚, 则 f 可诱导 ${}_W\mathcal{O}|W$ 到 ${}_V\mathcal{O}|V$ 的层同构 f^*,

$$f^*: {}_W\mathcal{O}|W \longrightarrow {}_V\mathcal{O}|V,$$
$$f^*|_{{}_W\mathcal{O}_{f(x)}} = f_x^*: \mathbf{g} \longrightarrow \mathbf{g} \circ \mathbf{f}; \quad \forall \mathbf{g} \in {}_W\mathcal{O}_{f(x)},$$

这里 $f: V \longrightarrow W$ 是双全纯同胚等价于 $f: (V, {}_V\mathcal{O}|V) \longrightarrow (W, {}_W\mathcal{O}|W)$ 是环空间同构. 若 $\mathcal{F}$ 是 V 上的 ${}_V\mathcal{O}|V$ 模层, 则可定义 W 上的层 $\mathcal{F}_f$,

$$(\mathcal{F}_f)_{f(x)} := \mathcal{F}_x.$$

$\mathcal{F}_f$ 的拓扑与 $\mathcal{F}$ 相同, 即 $\mathcal{F}$ 的开集等同于 $\mathcal{F}_f$ 的开集. 利用 f^*, 赋予 $\mathcal{F}_f$ 以 ${}_W\mathcal{O}|W$ 模层结构, 称 ${}_W\mathcal{O}|W$ 模层 $\mathcal{F}_f$ 为层 $\mathcal{F}$ 在双全纯同胚 f 下的变换. ${}_W\mathcal{O}|W$ 模层 F_f 与 ${}_V\mathcal{O}|V$ 模层 $\mathcal{F}$ 的拓扑与代数性质完全相同. 故若 $\mathcal{F}$ 是 ${}_V\mathcal{O}|V$ 凝聚层, 必有 $\mathcal{F}_f$ 是 ${}_W\mathcal{O}|W$ 凝聚层. 若 $\mathcal{F}$ 有长度有限的投影分解, $\mathcal{F}_f$ 亦如此.

§9.3 Cartan 定理 A, B

定理 9.13 (Cartan 定理 A) *若 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 是 Stein 空间, $\mathcal{F}$ 是 X 上的 ${}_X\mathcal{O}$ 凝聚层, 则整体截影*

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$$

可生成 $\mathcal{F}_x$; $\forall x \in X$.

定理 9.14 (Cartan 定理 B) 若 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 是 Stein 空间, $\mathcal{F}$ 是 X 上的 ${}_X\mathcal{O}$ 凝聚层, 则

$$H^k(X, \mathcal{F}) = 0; \quad \forall k \geqslant 1.$$

首先, 我们证明 Cartan 定理 A 是 Cartan 定理 B 的推论.

证明: 对任意 $x \in X$, 用 $[x]$ 表示仅含点 x 的解析子集, 则 $(\mathcal{I}_{[x]})_x = m_x$ 是 ${}_X\mathcal{O}_x$ 的极大理想, 且当 $y \neq x$, $(\mathcal{I}_{[x]})_y = {}_X\mathcal{O}_y$. 于是有 ${}_X\mathcal{O}$ 模层正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{[x]} \xrightarrow{i} {}_X\mathcal{O} \xrightarrow{p} {}_{[x]}\mathcal{O} \longrightarrow 0, \tag{9.5}$$

当 $y \neq x$, $({}_{[x]}\mathcal{O})_y = 0$; $({}_{[x]}\mathcal{O})_x = \mathbf{C}$. 利用张量积函子, (9.5) 可诱导新的层正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{[x]} \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{i \otimes id} \mathcal{F} \xrightarrow{p \otimes id} \mathcal{F}_x \longrightarrow 0, \tag{9.6}$$

这里 $\mathcal{I}_{[x]} \otimes \mathcal{F}$ 是 $\mathcal{F}$ 的子层. 由于 $\mathcal{I}_{[x]}$ 与 $\mathcal{F}$ 均为 $\mathcal{O}$ 凝聚层, 故 $\mathcal{I}_{[x]} \otimes \mathcal{F}$ 局部有限生成, 从而 $\mathcal{I}_{[x]} \otimes \mathcal{F}$ 是 $\mathcal{O}$ 凝聚层. 由 Cartan 定理 B,

$$H^k(X, \mathcal{I}_{[x]} \otimes \mathcal{F}) = 0, \quad k \geqslant 1.$$

正合列 (9.6) 可诱导上同调群的长正合列

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}_{[x]} \otimes \mathcal{F}) \xrightarrow{(i \otimes id)_*} \Gamma(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{(p \otimes id)_*} \Gamma(x, \mathcal{F}_x) \xrightarrow{\delta_*} 0, \tag{9.7}$$

这里 $\Gamma(x, \mathcal{F}_x) = \mathcal{F}_x$. 由于 $\mathcal{F}$ 是凝聚层, 故 $\mathcal{F}_x$ 是有限生成 $\mathcal{O}_x$-模, 又因为此时 $(p \otimes id)_*$ 是限制满同态, 故存在有限个 $f_1, \cdots, f_k \in \Gamma(X, \mathcal{F})$ 生成 $\mathcal{F}_x$. □

在证明 Cartan 定理 B 之前, 我们需要一些准备工作.

命题 9.15 令 X 是 Stein 空间, $K = \hat{K}$ 是全纯凸紧集, $U \supset K$ 是开集. 则存在开集 W, $K \subset W \subset \bar{W} \subset U$ 及 $\bar{W}$ 邻域上的取值于 $\mathbf{C}^t$ 的全纯映射 ϕ, 使得 $\phi|_W$ 是 W 到$\mathbf{C}^t$ 中单位多圆盘的解析子集的双全纯映射.

证明: 不失一般性, 假定 $\bar{U}$ 也是紧集. 由 Stein 空间定义中的条件 (2), 对任意 $\bar{U}$ 中的点, 存在其开邻域及有限个 $\Gamma(X, {}_X\mathcal{O})$ 中元, 将此开邻域嵌入 $\mathbf{C}^n$, 这里 n 可能随着点的变化而改变. 由于 $\bar{U}$ 是紧集, 存在有限个 $U_1, \cdots, U_k$ 覆盖 $\bar{U}$. 将实现开邻域 $U_1, \cdots, U_k$ 嵌入的 $\Gamma(X, {}_X\mathcal{O})$ 中元的集合记为 $\{f_1, \cdots, f_l\} \subset \Gamma(X, {}_X\mathcal{O})$.

令 $\tilde{U} = \bar{U} \times \bar{U}$, $N = \{(x, y) \in \tilde{U} | x, y$ 属于相同的 U_i; $1 \leqslant i \leqslant k\}$ 是 $\tilde{U}$ 对角集的开邻域. 由于 $\Gamma(X, {}_X\mathcal{O})$ 分离 X 中的点, 任意 $(p, q) \in \tilde{U} \backslash N$, 存在 $f \in \Gamma(X, {}_X\mathcal{O})$,

使得 $f(p) \neq f(q)$. 由 f 的连续性, 存在 (p,q) 在 $X \times X$ 中邻域 $N(p,q)$, 满足 $f(p') \neq f(q')$; $\forall (p',q') \in N(p,q)$. 由于 $\tilde{U} \backslash N$ 是 $X \times X$ 中紧集, 存在有限个

$$N_{(p_1,q_1)}, \cdots, N_{(p_s,q_s)}$$

覆盖 $\tilde{U} \backslash N$; 对应的分离点 $(p_1,q_1), \cdots, (p_s,q_s)$ 的全纯函数分别记为

$$f_{l+1}, \cdots, f_{l+s} \in \Gamma(X, {}_X\mathcal{O}).$$

此时, $\forall x, y \in \bar{U}$; $x \neq y$, $f_1, \cdots, f_l, f_{l+1}, \cdots, f_{l+s}$ 中至少有一个 f_i, 满足

$$f_i(x) \neq f_i(y).$$

这是因为, 若 x, y 属于 U_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, 则存在 $1 \leqslant i \leqslant l$, $f_i(x) \neq f_i(y)$. 若 x, y 不在 $U_1 \cup \cdots \cup U_k$ 中, (x,y) 必在某个 $N_{(p_1,q_1)}, \cdots, N_{(p_s,q_s)}$ 中, 于是在

$$f_{l+1}, \cdots, f_{l+s}$$

中存在某个 f_i, 满足 $f_i(x) \neq f_i(y)$.

由于 $\bar{U}$ 紧, 不妨假定

$$\operatorname*{Sup}_{z \in \bar{U}} |f_i(z)| \leqslant 1; \quad 1 \leqslant i \leqslant l+s,$$

由于函数乘常数后, 函数分离点的性质不会改变. 故 $f_1, \cdots, f_{l+s}$ 可将 U 嵌入到 $\mathbf{C}^{l+s}$ 中单位多圆盘.

对任意 $p \in \partial U$, 由于 $p \notin K = \hat{K}$, 存在 $f \in \Gamma(X, {}_X\mathcal{O})$, 使得

$$|f(p)| > 1 > \operatorname*{Sup}_{z \in K} |f(z)|,$$

由连续函数性质, 存在 p 的开邻域 U_p, 使得任意 $q \in U_p$; $|f(q)| > 1$. 由于 ∂U 紧, 存在有限个 $U_{p_1}, \cdots, U_{p_r}$ 覆盖 ∂U, 记对应的全纯函数为

$$f_{l+s+1}, \cdots, f_{l+s+r}.$$

令 $t = l+s+r$, 则 $\phi := (f_1, \cdots, f_t)$ 是

$$W = \{y \in U | \ |f_i(y)| < 1; \quad 1 \leqslant j \leqslant t\}$$

到单位多圆盘 $\Delta(0,1) \subset \mathbf{C}^t$ 的逆紧嵌入: 只需证明逆紧性, 令 S 是 $\Delta(0,1)$ 中紧集, 则 $\phi^{-1}(S) \cap W = \phi^{-1}(S) \cap U = \phi^{-1}(S) \cap (\partial U \cup U) = \phi^{-1}(S) \cap \bar{U}$, 这是因为, 由 W 的定义, 任意 $p \in \bar{U} \backslash W$, $f_1, \cdots, f_t$ 中存在 f_i, 满足 $|f_i(p)| \geqslant 1$. 由于 $\phi^{-1}(S)$ 闭, 且 $\bar{U}$ 紧, 故 $\phi^{-1}(S) \cap W = \phi^{-1}(S) \cap \bar{U}$ 紧. 因此 $\phi|_W$ 是全纯逆紧嵌入. 由 Remmert 定理, $\phi(W)$ 是 $\Delta(0,1) \subset \mathbf{C}^t$ 的解析子集. 由于 ϕ 逆紧, $\phi|_W$ 是开映射, 故 $\phi : W \longrightarrow \phi(W)$ 双全纯. □

定义 9.16 令 E 是复向量空间, 若

(1) $p(a+b) \leqslant p(a)+p(b), \quad \forall a,b \in E$;

(2) $p(\lambda a) = |\lambda| p(a), \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad \forall a \in E$.

称 $p: E \longrightarrow R^{+} \cup 0$ 为 E 上**拟范数**, E 为由拟范数 p 定义的**赋拟范线性空间**.

利用 p 可定义 E 上拓扑: 由于 E 是线性空间, 故只需定义 0 点开邻域基, 然后利用加法连续性将其平移到任意给定点, 成为那一点的邻域基. $N(\epsilon) = \{p(x) < \epsilon | \forall \epsilon \in \mathbf{R}^{+}\}$ 就可定义 0 点开邻域基. 若 p 满足

$$p(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$$

则 p 就是 E 上范数, 此时 E 就是通常的赋范线性空间.

定义 9.17 若 F 是复向量空间, 且 F 上有一族拟范数 $\{p_n\}_{n \in \mathbf{Z}^{+}}$, 满足

(1) $p_n(a) = 0, \forall n \in \mathbf{Z}^{+} \Longleftrightarrow a = 0$;

(2) 任给点列 $\{a_k\}_{k \in \mathbf{Z}^{+}}$, 若它关于每个拟范数 p_n, $n \in \mathbf{Z}^{+}$ 均为 Cauchy 列, 则存在 $a_0 \in F$, 满足 $\{a_k\}_{k \in \mathbf{Z}^{+}}$ 关于每个拟范数 p_n, $n \in \mathbf{Z}^{+}$ 收敛到 a_0.

称 F 是 **Frechet 空间**.

注意到, 定义中一族拟范数 $\{p_n\}_n$, $n \in \mathbf{Z}^{+}$ 可赋予 Frechet 空间以拓扑: 由于 Frechet 空间是向量空间, 故只需定义 0 点的开邻域基. 为此, 定义集族

$$N(k,\epsilon) = \{x \in F | p_k(x) < \epsilon\}, \quad k \in \mathbf{Z}^{+}, \quad \epsilon \in \mathbf{R}^{+}$$

为 0 点的邻域基. 在此拓扑下, Frechet 空间成为拓扑线性空间. 事实上, 我们可进一步在 Frechet 空间 F 上定义距离, 即对 $\forall a,b \in F$,

$$d(a,b) := \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} \frac{p_n(a-b)}{1+p_n(a)+p_n(b)}, \tag{9.8}$$

不难验证 (9.8) 中 $d(a,b)$ 确实满足距离函数条件, 且由 Frechet 空间定义知, (F,d) 是完备度量空间.

令 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 是复空间, U 是 X 中开集, 则 $H^0(U, {}_X\mathcal{O})$ 可赋予 Frechet 空间结构. 为此, 将 U 表示为可列个相对紧开集的并, 即

$$U = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n,$$

不失一般性, 不妨假定

$$K_n \subset \bar{K}_n \subset \mathring{K}_{n+1} \subset K_{n+1}; \quad \forall n \in \mathbf{Z}^{+}.$$

现在, 对 $n \in \mathbf{Z}^+$, 定义拟范数

$$p_n(f) = \operatorname*{Sup}_{z \in K_n} |f(z)|; \quad \forall f \in \Gamma(U, {}_X\mathcal{O}), \tag{9.9}$$

则 $\Gamma(U, {}_X\mathcal{O})$ 关于这一族拟范数成为 Frechet 空间: 只需验证定义 9.17 中的 (1) 和 (2), (1) 自然满足, (2) 成立是因为, 若全纯函数列 $\{a_i\} \in \Gamma(U, {}_X\mathcal{O})$ 在任意紧集上一致收敛, 则存在其局部一致收敛极限 a, 满足 a 在 U 上全纯, 即 $a \in \Gamma(U, {}_X\mathcal{O})$.

更进一步, 对任意 $t \in \mathbf{Z}^+$, 类似 $t = 1$, 可在 $\Gamma(U, t({}_X\mathcal{O}))$ 上定义一族拟范数:

$$p_n(f) := \sum_{i=1}^{t} p_n(f_i), \quad \forall f = (f_1, \cdots, f_t) \in \Gamma(U, t({}_X\mathcal{O})), \tag{9.10}$$

则 $H^0(U, t({}_X\mathcal{O}))$ 关于这一族拟范数成为 Frechet 空间.

定理 9.18 令 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 是 Stein 空间, K 是 X 中全纯凸紧集, 则对任意 $f \in \Gamma(K, {}_X\mathcal{O})$, 任意 $\epsilon > 0$, 都存在 $g \in H^0(X, {}_X\mathcal{O})$, 满足

$$\|g - f\|_K = \operatorname*{Sup}_{z \in K} |f(z) - g(z)| < \epsilon.$$

证明: 首先对 $\Gamma(K, {}_X\mathcal{O})$ 加以解释: 通常涉及的截影都是定义在某个开集上的. 若 K 是紧集, 则 $f \in \Gamma(K, {}_X\mathcal{O})$ 是指, 存在开集 $U \supset K$ 及 $\tilde{f} \in \Gamma(U, {}_X\mathcal{O})$, 且

$$\tilde{f}|_K = f.$$

若不区分 $\tilde{f}$ 与 f, 则 f 是 K 的某开邻域 U 上的截影. 因此, 若 $f \in \Gamma(K, {}_X\mathcal{O})$, 则存在开集 $U \supset K$, $f \in \Gamma(U, {}_X\mathcal{O})$. 由命题 9.15, 存在开集 W 与 W', 满足

$$K \subset W' \subset \bar{W}' \subset W \subset \bar{W} \subset U,$$

及

$$\phi = (f_1, \cdots, f_t), \quad f_i \in \Gamma(X, {}_X\mathcal{O}), \quad 1 \leqslant i \leqslant t,$$

使得 ϕ 将 W 双全纯嵌入多圆盘 $\Delta(0,1) \subset \mathbf{C}^t$ 的解析子集 V, 且更进一步有

$$\phi(W') = V \cap \Delta(0, r); \quad 0 < r < 1.$$

由于 ϕ 双全纯,

$$f \circ \phi^{-1} \in H^0(V, {}_V\mathcal{O}).$$

现在 $\Delta(0, r')$; $r < r' < 1$ 上的层正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_V \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{O} \xrightarrow{\ p\ } {}_V\mathcal{O} \longrightarrow 0 \tag{9.11}$$

诱导了上同调群的长正合列

$$0 \longrightarrow \Gamma(\Delta(0,r'),\mathcal{I}_V) \longrightarrow \Gamma(\Delta(0,r'),\mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(\Delta(0,r'),{}_V\mathcal{O}) \\ \longrightarrow H^1(\Delta(0,r'),\mathcal{I}_V).$$

由定理 8.4,

$$H^1(\Delta(0,r'),\mathcal{I}_V)=0,$$

因此

$$\Gamma(\Delta(0,r'),\mathcal{O}) \xrightarrow{p_*} \Gamma(\Delta(0,r'),{}_V\mathcal{O}) \tag{9.12}$$

是满射. 定义 V 的开集 $V'=V\cap\Delta(0,r')$, 则

$$\Gamma(\Delta(0,r'),{}_V\mathcal{O}) \cong \Gamma(V',{}_V\mathcal{O}|V'),$$

而 $f\circ\phi^{-1}|_{V'}\in\Gamma(V',{}_V\mathcal{O}|V')$, 由于 (9.12) 中的 p_* 是满射, 故存在 $F\in\Gamma(\Delta(0,r'),$ $\mathcal{O})$, 使得

$$F|_{V'}=f\circ\phi^{-1}|_{V'}.$$

另一方面, 由于 $\Delta(0,r')$ 多项式凸, 故任取 $\epsilon>0$, 都可找到多项式 p, 满足

$$\|F-p\|_{\overline{\Delta(0,r)}}=\operatorname*{Sup}_{z\in\overline{\Delta(0,r)}}|F(z)-p(z)|<\epsilon,$$

由于 $\phi(K)\subset\overline{\Delta(0,r)}$, 故

$$\|f\circ\phi^{-1}-p\|_{\phi(K)}<\epsilon,$$

即

$$\|f-p\circ\phi\|_K<\epsilon,$$

这里

$$p\circ\phi=p(f_1,\cdots,f_t)\in\Gamma(X,{}_X\mathcal{O}),$$

于是

$$g=p\circ\phi\in H^0(X,{}_X\mathcal{O})$$

满足定理要求. □

同理可得下面的推论.

推论 9.19 令 $(X,{}_X\mathcal{O})$ 是 Stein 空间, K 是 X 的全纯凸紧集, $f\in\Gamma(K,$ $t({}_X\mathcal{O}))$; $t\in\mathbf{Z}^+$, 则对任意 $\epsilon>0$, 都有 $g\in\Gamma(X,t({}_X\mathcal{O}))$, 使得

$$\|g-f\|_K<\epsilon,$$

这里 $f=(f_1,\cdots,f_t)$, $g=(g_1,\cdots,g_t)$.

命题 9.15 中的开集 W 为复空间中的 Oka-Weil 域. 精确地说, 若存在 $\overline{W}$ 邻域上的取值于 $\mathbf{C}^t$ 的全纯映射 ϕ, 满足 $\phi|_W$ 是 W 到多圆盘 $\Delta(0,1)\subset\mathbf{C}^t$ 的解析子族 V 上的双全纯映射, 称复空间 X 中的相对紧区域 W 为 Oka-Weil 域, 精确起见, 有时记 Oka-Weil 域为 (W,ϕ).

令 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 为复空间, (V,ϕ) 为 X 的 Oka-Weil 域, $\mathcal{F}$ 是 V 上的 ${}_V\mathcal{O}$ 凝聚层, 令ϕ 是 V 邻域上取值于 $\mathbf{C}^t$ 的全纯映射, 满足 $\phi|_V$ 是从 V 到多圆盘 $\Delta(0,1)\subset\mathbf{C}^t$ 的某个解析子族的双全纯映射, 因此, 利用 ${}_{\phi(V)}\mathcal{O}$ 到 ${}_V\mathcal{O}$ 的环层同构, 可将 $\mathcal{F}$ 转化为 $\phi(V)$ 上的 ${}_{\phi(V)}\mathcal{O}$ 凝聚层 $\tilde{\mathcal{F}}$, 更进一步, 通过对 $\tilde{\mathcal{F}}$ 平凡延拓, 可得到 $\Delta(0,1)$ 上的 $\mathcal{O}$ 凝聚层, 仍记为 $\tilde{\mathcal{F}}$, 则由定理 8.16, $\forall r<1$, $\tilde{\mathcal{F}}$ 在 $\overline{\Delta(0,r)}$ 的某邻域 U 上有长度有限的投影分解. 将此投影分解限制在 $U\cap\phi(V)$ 上, 利用 ϕ, 将其拉回, 从而得到 $\mathcal{F}$ 在 $\overline{\phi^{-1}(\Delta(0,r))}$ 某邻域上的长度有限的投影分解, 于是, 我们有以下结论.

命题 9.20 令 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 是复空间, (V,ϕ) 是 X 的 Oka-Weil 域, $\mathcal{F}$ 是 X 上 ${}_X\mathcal{O}$ 凝聚层, 任取 $0<r<1$, 令 $W=\phi^{-1}(\Delta(0,r))$, 则

$$H^q(W,\mathcal{F})\equiv 0;\quad q>1.$$

证明: 由前面的讨论, 利用定理 8.4, 知结论成立. □

由定理 8.16, 对任意 $0<r<1$, $\tilde{F}$ 在 $\Delta(0,r)$ 上有长度有限的投影分解, 由前面的讨论可知, 这等价于 F 在 $W=\phi^{-1}(\Delta(0,r))$ 上有长度有限的投影分解, 因此有 W 上正合列

$$k\ {}_W\mathcal{O}\xrightarrow{\lambda}\mathcal{F}|W\longrightarrow 0,$$

从而, $\forall x\in W$, $\mathcal{F}_x$ 可由 k 个截影

$$f_1,\cdots,f_k\in\Gamma(W,\mathcal{F})$$

生成, 这里

$$f_i=\lambda(E_i);\quad 1\leqslant i\leqslant k,$$

其中 E_i 是 $\Gamma(W,k\ {}_W\mathcal{O})$ 的典则截影.

命题 9.21 令 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 是复空间, 仍使用前面的记号, 令 (V,ϕ) 是 X 的 Oka-Weil 域, 对 $0<r<1$, 令 $W=\phi^{-1}(\Delta(0,r))$, 则对任意 V 上凝聚层 $\mathcal{F}$, $H^0(W,\mathcal{F})$ 作为 $H^0(W,{}_W\mathcal{O})$ 模均有限生成. 更进一步, 若 $\mathcal{G}$ 是 V 上另一个 ${}_V\mathcal{O}$ 凝聚层, 满足下面的 ${}_V\mathcal{O}$ 层同态正合图表

$$\begin{array}{ccc} k\ {}_V\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{F} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow\alpha & \\ t\ {}_V\mathcal{O} \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G} & \longrightarrow 0 \end{array}\tag{9.13}$$

则存在 α 的提升

$$\tilde{\alpha} : k\ {}_V\mathcal{O} \to t\ {}_V\mathcal{O},$$

使得在 W 上有

$$\alpha \circ \lambda = \mu \circ \tilde{\alpha}.$$

证明: 由于 V 是 Oka-Weil 域, 故 $\phi(V)$ 是 $\Delta(0,1)$ 的解析子集. 利用 ${}_{\phi(V)}\mathcal{O}$ 到 ${}_V\mathcal{O}$ 的层同态, 可将命题中出现的层看成是 ${}_{\phi(V)}\mathcal{O}$ 凝聚层, 于是就有 $\phi(V)$ 上层 $\tilde{\mathcal{F}}$, 将其平凡延拓仍记为 $\tilde{\mathcal{F}}$, 则 $\tilde{\mathcal{F}}$ 就成为 $\Delta(0,1)$ 上的 $\mathcal{O}$ 凝聚层, 故有 $\mathcal{O}$ 模层正合列

$$0 \longrightarrow \text{Ker } \lambda \longrightarrow k\mathcal{O} \xrightarrow{\tilde{\lambda}} \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow 0, \tag{9.14}$$

因此, 任取 $r < r_1 < 1$, Ker λ 是 $\Delta(0, r_1)$ 上 $\mathcal{O}$ 凝聚层. (9.14) 可诱导上同调群的正合列

$$\begin{aligned} 0 \ &\longrightarrow H^0(\Delta(0,r), \text{Ker } \lambda) \longrightarrow H^0(\Delta(0,r), k\mathcal{O}) \xrightarrow{(\tilde{\lambda})_*} H^0(\Delta(0,r), \mathcal{F}) \\ &\longrightarrow H^1(\Delta(0,r), \text{Ker } \lambda) = 0. \end{aligned} \tag{9.15}$$

最后一个等式成立是由于定理 8.17. 令 $E_1, \cdots, E_k$ 为 $H^0(\Delta(0,r), k\mathcal{O})$ 的典则截影, 则

$$\tilde{\sigma}_i = \tilde{\lambda}_*(E_i); \quad 1 \leqslant i \leqslant k$$

可生成 $H^0(\Delta(0,r), \mathcal{O})$ 模 $H^0(\Delta(0,r), \tilde{\mathcal{F}})$, 因此

$$\sigma_i = (\tilde{\sigma}_i|_{\phi(W)}) \circ \phi; \quad 1 \leqslant i \leqslant k$$

可生成 $H^0(W, {}_W\mathcal{O})$ 模 $H^0(W, \mathcal{F})$.

对 $\mathcal{G}$ 做类似讨论, 知 $H^0(W, \mathcal{G})$ 作为 $H^0(W, {}_W\mathcal{O})$ 模可由

$$\tau_1 = \mu(E_1'), \cdots, \tau_t = \mu(E_t')$$

生成, 这里 $E_1', \cdots, E_t'$ 是 $t\ {}_W\mathcal{O}$ 的典则截影.

有了这些准备, 可将层同态 α 表示为

$$\alpha(\sigma_i) = \sum_{j=1}^{t} k_{ij}\tau_j; \quad i = 1, \cdots, k. \tag{9.16}$$

则可由

$$\tilde{\alpha}(E_i) = \sum_{j=1}^{t} k_{ij}E_j', \quad i = 1, \cdots, k$$

定义 $\tilde{\alpha}$.

现在, 对任意 $x \in W$, 任取 $(\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_k) \in (k\ {}_W\mathcal{O})_x$, 有

$$\begin{aligned}\alpha \circ \lambda(\mathbf{s}_1, \cdots, \mathbf{s}_k) &= \alpha \circ \lambda\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbf{s}_i E_i(x)\right) = \alpha \sum_{i=1}^{k} \lambda(\mathbf{s}_i E_i(x)) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{k} \mathbf{s}_i \lambda(E_i(x)) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{s}_i \alpha(\sigma_i(x)) \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{t} \mathbf{s}_i k_{ij}(x)\tau_j(x).\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}\mu \circ \tilde{\alpha}(\mathbf{s}_1, \cdots, s_k) &= \mu \circ \tilde{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbf{s}_i E_i(x)\right) = \mu\left(\sum_{i=1}^{k} \mathbf{s}_i \sum_{j=1}^{t} k_{ij}(x) E'_j(x)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbf{s}_i k_{ij}(x) \sum_{j=1}^{t} \mu E'_j(x) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{t} \mathbf{s}_i k_{ij}(x)\tau_j(x).\end{aligned}$$

因此

$$\alpha \circ \lambda = \mu \circ \tilde{\alpha}.$$

□

在上述证明中, 我们首先使用 ϕ 将 Oka-Weil 域 V 全纯嵌入 $\mathbf{C}^t$ 中多圆盘 $\Delta(0,1)$ 的解析子集, 然后利用多圆域上的已知结果得到需要的结论. 对

$$W = \phi^{-1}(\Delta(0,r)); \quad r < 1,$$

有其上 ${}_W\mathcal{O}$ 模层正合列

$$k\ {}_W\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\lambda} 0.$$

令 $\mathcal{K} = \operatorname{Ker} \lambda$, 则有 ${}_W\mathcal{O}$ 模层正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow k\ {}_W\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda} \mathcal{F} \longrightarrow 0, \tag{9.17}$$

(9.17) 诱导了上同调群正合列

$$0 \longrightarrow H^0(W,\mathcal{K}) \longrightarrow H^0(W, k\ {}_W\mathcal{O}) \xrightarrow{\lambda_*} H^0(W,\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(W,\mathcal{K}) = 0. \tag{9.18}$$

最后的等式成立是因为 $H^1(W,\mathcal{K}) = H^1(\Delta(0,r),\tilde{\mathcal{K}}) = 0$. 现在, 由 (9.18),

$$H^0(W,\mathcal{F}) \cong H^0(W, k\ {}_W\mathcal{O})/H^0(W,\mathcal{K}).$$

由于 $\mathcal{K}$ 是 $k\ _W\mathcal{O}$ 的子层, 故 $H^0(W,\mathcal{K})$ 是 $H^0(W,k\ _W\mathcal{O})$ 的子空间. 由前面讨论, 可在 $H^0(W,k\ _W\mathcal{O})$ 上定义一族拟范数

$$\{p_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}.$$

可证明此时 $H^0(W,\mathcal{K})$ 是 $H^0(W,k\ _W\mathcal{O})$ 的闭子空间: 任取 $a\in\overline{H^0(W,\mathcal{K})}$, 则存在 $\{a_i\}\subset H^0(W,\mathcal{K})$, 使得 a_i 收敛到 a, 即对任意拟范数 p_n,

$$\lim_{i\to+\infty}p_n(a_i-a)=0,$$

故对任意 $x\in W$, a 可被 a_i 在任意包含 x 的紧集上一致逼近, 由于 $\mathcal{K}_x\subset k\ _W\mathcal{O}_x$ 是子模, 故由定理 6.18, $a(x)\in\mathcal{K}_x$. 于是 $a\in H^0(W,\mathcal{K})$, 即 $H^0(W,\mathcal{K})$ 是闭子空间. 因此, 可定义商空间

$$H^0(W,\mathcal{F})\cong H^0(W,k\ _W\mathcal{O})/H^0(W,\mathcal{K}).$$

赋予 $H^0(W,\mathcal{F})$ 商拓扑, 即保持 (9.18) 中 λ_* 连续的最细的拓扑, 我们要说明, 在商拓扑下, $H^0(W,\mathcal{F})$ 是 Frechet 空间. 为此, 对任意紧集 K, 定义拟范数 $\|\cdot\|_K$, 使得对任意 $\alpha\in H^0(W,\mathcal{F})$,

$$\|\alpha\|_K=\inf\{\|\sigma\|\mid\sigma\in H^0(W,k\ _W\mathcal{O}),\quad\lambda_*(\sigma)=\alpha\}.\tag{9.19}$$

由于 $\mathcal{F}$ 在 W 上的投影分解不唯一, 故 W 上可能存在另一条层正合列

$$\cdots\longrightarrow t\ _W\mathcal{O}\xrightarrow{\mu}\mathcal{F}\longrightarrow 0,$$

对应的上同调群正合列是

$$\cdots\longrightarrow H^0(W,t\ _W\mathcal{O})\xrightarrow{\mu_*}H^0(W,\mathcal{F})\longrightarrow 0.\tag{9.20}$$

利用 (9.20), 可定义另一族拟范数 $\|\cdot\|'_K$, 自然要问, 这两组范数是否等价? 答案是肯定的.

由命题 9.21, 下面的 W 上层同态图表交换

$$\begin{array}{ccccc} k\ _V\mathcal{O} & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{F} & \longrightarrow 0\\ \downarrow\tilde{h} & & \downarrow id & \\ t\ _V\mathcal{O} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{F} & \longrightarrow 0\end{array}\tag{9.21}$$

由命题 9.21 的证明可知, $\tilde{h}$ 在 $H^0(W,k\ _V\mathcal{O})$ 和 $H^0(W,t\ _V\mathcal{O})$ 的典则截影下有矩阵表示

$$\tilde{h}=(h_{ij})_{1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant t}.$$

取 $\sigma \in H^0(W, k\ {}_V\mathcal{O})$, 使得 $\lambda_*(\sigma)=\alpha$ 且达到 (9.19) 中的最小值. 由于 (9.21) 交换,

$$\mu_* \tilde{h}_*(\sigma)=\alpha.$$

若

$$\sigma=\sum_{i=1}^{k} s_i E_i,$$

则

$$\tilde{h}_*(\sigma)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{t} s_i h_{ij} E'_j,$$

这里 $E_1,\cdots,E_k$ 与 $E'_1,\cdots,E'_t$ 分别为 $H^0(W, k\ {}_V\mathcal{O})$ 及 $H^0(W, t\ {}_V\mathcal{O})$ 的典则截影, 于是

$$\|\tilde{h}_*(\sigma)\|'_K=\sum_{i=1}^{t}\left\|\sum_{i=1}^{k} s_i h_{ij}\right\|_K \leqslant bt\sum_{i=1}^{k}\|s_i\|=c_1\|\sigma\|_K,$$

这里

$$b=\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant k\\ 1\leqslant j\leqslant t}} |h_{ij}|_K,\quad c_1=bt.$$

由 $\|\cdot\|_K$ 与 $\|\cdot\|'_K$ 的定义可知, $\forall\alpha\in H^0(W,\mathcal{F})$,

$$\|\alpha\|'_K \leqslant c_1\|\alpha\|_K, \tag{9.22}$$

同理可得反方向不等式

$$\|\alpha\|_K \leqslant c_2\|\alpha\|'_K, \tag{9.23}$$

于是, 这两个拟范数等价.

现在令

$$W=\bigcup_{n\in\mathbf{Z}^+} K_n,$$

这里紧集 K_n 满足

$$K_n \subset \mathring{K}_{n+1} \subset K_{n+1}.$$

利用 $K_n;\ n\in\mathbf{Z}^+$, 可在 $H^0(W,\mathcal{F})$ 上定义一族拟范数

$$p_n(\cdot)=\|\cdot\|_{k_n},$$

则 $H^0(W,\mathcal{F})$ 在由这一族拟范数诱导的拓扑下成为 Frechet 空间. 更进一步, 此 Frechet 空间的拓扑独立于 $K_n, n\in\mathbf{Z}^+$ 的选取, 精确地说, 若取紧集 K'_i,

$$W=\bigcup_{i\in\mathbf{Z}^+} K'_i,\quad K'_i \subset \mathring{K}'_{i+1} \subset K'_{i+1},$$

与 K_i'; $i \in \mathbf{Z}^+$ 相对应的一族拟范数记为

$$p_i'(\cdot) = \|\cdot\|_{K_i'},$$

则 $\{p_i'\}_{i\in\mathbf{Z}^+}$ 与 $\{p_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 诱导了相同的拓扑: 这是因为对任意 K_i', 必有 K_n 满足 $K_i' \subset K_n$, 反之亦然, 且由前面的讨论, 我们定义的拓扑独立于投影分解的选取.

综上所述, 对复空间中的 Oka-Weil 域 V 的任意开子集 W, 若 $\mathcal{F}$ 是 V 上的 $\mathcal{O}$ 凝聚层, 则 $\Gamma(W,\mathcal{F})$ 有在拓扑向量空间同构意义下唯一的 Frechet 空间结构.

定理 9.22 *令 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 是仿紧复空间, $\mathcal{F}$ 是 ${}_X\mathcal{O}$ 凝聚层, U 是 X 中的开集, 则 $H^0(U,\mathcal{F})$有唯一 Frechet 空间结构, 使得每个限制映射连续: 即若 V, U 是 X 中两个开集, 且 $V \subset U$, 则限制映射*

$$r_{UV} : H^0(U,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(V,\mathcal{F})$$

连续.

证明: 由复空间定义, 对任意 $x \in X$, 都有其邻域 W_x, 满足 W_x 在全纯映射 ϕ 下, 双全纯同胚于 $\mathbf{C}^t$ 中多圆盘 $\Delta(0,1)$ 的解析子集. 缩小 W_x 至 $X \cap \phi^{-1}(\Delta(0,r))$, 仍记为 W_x, 则 $\{W_x\}_{x\in X}$ 是 X 的开覆盖. 由于 X 仿紧, 存在局部有限加细覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$. 由一般拓扑中的限制定理, 存在开覆盖 $\{U_i^*\}_{i\in I}$, 使得

$$U_i^* \subset \overline{U_i^*} \subset U_i, \quad \forall i \in I,$$

且 $\bar{U_i^*}$ 紧.

由于 $\mathcal{F}$ 是 X 上凝聚解析层, 由前面讨论可知, $H^0(U_i^*,\mathcal{F})$ 是 Frechet 空间. 对任意紧集 $K \subset U_i^*$, 记 $\|\cdot\|_K^i$ 为由 K 定义的拟范数, 若 $K \subset U_i^* \cap U_j^*$, 则对任意 $f \in H^0(K,\mathcal{F})$,

$$\|f\|_K^i \leqslant M_j^i \|f\|_K^j,$$

这里 M_j^i 是独立于 $f \in H^0(K,\mathcal{F})$ 的常数.

令 C 是 X 的紧子集, $\forall f \in H^0(C,\mathcal{F})$, 定义

$$\|f\|_c \equiv \mathrm{Sup}\{\|f\|_K^i \mid K \subset C \cap U_i^*\}.$$

因为 U_i^* 是局部有限覆盖, 满足 $U_i^* \cap C \neq \varnothing$ 的 U_i^* 至多有限, 故 $\|f\|_c$ 有限. 显然, 若 C 与 C' 是两个紧集, 满足 $C \subset C'$, 则对任意 $f \in H^0(C',\mathcal{F})$, $\|f\|_c \leqslant \|f\|_{c'}$.

对条件中的开集 U,

$$\{f \in H^0(U,\mathcal{F}) \mid \|f\|_c < \epsilon, \text{ 任意紧集 } C \subset U, \forall \epsilon \in \mathbf{R}^+\}$$

可定义 $H^0(U,\mathcal{F})$ 中 0 的开邻域基, 且若

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n,$$

这里 C_n 是紧子集, 则此开邻域基又可表示为

$$\{f \in H^0(U,F) | \ \|f\|_{c_n} < \epsilon; \quad n \in \mathbf{Z}; \ \forall \epsilon \in \mathbf{R}^+\}.$$

读者可直接验证这两个开邻域集等价.

我们要证明, 上面定义的 0 的开邻域基可赋予 $H^0(U,\mathcal{F})$ 以 Frechet 空间结构: 只需证明

1) 对 $f \in H^0(U,\mathcal{F})$, 若 $\|f\|_{c_n} = 0, \forall n \in \mathbf{Z}^+$, 则在 U 上 $f \equiv 0$;

2) $H^0(U,\mathcal{F})$ 完备.

先来证明 1). 由前面的讨论, 有分解

$$U = \bigcup_{\alpha=1}^{+\infty} W_\alpha,$$

使得对任意 $\alpha \in \mathbf{Z}^+$, $H^0(W_\alpha, F)$ 是 Frechet 空间, 于是对任意 $K \subset W_\alpha$, $\|f\|_K^\alpha = 0$, 从而在任意 W_α 上, $f \equiv 0$, 故在 U 上 $f \equiv 0$.

再来证明 2). 令 f_k 是 $H^0(U,\mathcal{F})$ 中 Cauchy 列, 则 f_n 在 W_α 中限制仍是 Cauchy 列. 由于 $H^0(W_\alpha,\mathcal{F})$ 是 Frechet 空间, 故

$$f_n \longrightarrow g_\alpha \in H^0(W_\alpha,\mathcal{F}), \quad n \to \infty.$$

若 $W_\alpha \cap W_\beta \neq \varnothing$, 将 f_n 限制在 $W_\alpha \cap W_\beta$ 上, 有

$$f_n \longrightarrow g_{\alpha\beta} \in H^0(U_\alpha \cap U_\beta,\mathcal{F}), \quad n \to \infty,$$

显然, 有

$$g_{\alpha\beta} = g_\beta|_{W_\alpha \cap U_\beta}, \quad g_{\alpha\beta} = g_\alpha|_{W_\beta \cap W_\beta},$$

于是定义 $g \in H^0(U,\mathcal{F})$, 使得

$$g|_{W_\alpha} = g_\alpha,$$

则

$$f_n \longrightarrow g \in H^0(U,\mathcal{F}), \quad n \to \infty.$$

故 $H^0(U,\mathcal{F})$ 完备.

现在我们证明限制映射

$$r_{UV} : H^0(U,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(V,\mathcal{F})$$

连续: 只需证明, 对任意固定 V 的紧子集 C, $\epsilon \in \mathbf{R}^+$,

$$N(C,\epsilon) := \{f \in H^0(V,F) \mid \|f\|_c < \epsilon\}$$

的原像是 0 的邻域. 事实上, 若取 $H^0(U,\mathcal{F})$ 中 0 的邻域

$$\tilde{N}(C,\epsilon) := \{g \in H^0(U,F) \mid \|g\|_c < \epsilon\},$$

则

$$r_{UV}(\tilde{N}(C,\epsilon)) \subset N(C,\epsilon),$$

从而 r_{UV} 在 0 点连续, 由于 r_{UV} 是拓扑向量空间中的线性映射, 故 r_{UV} 是连续映射.

最后, 我们来说明, 满足任意 $V \subset U$, 限制映射

$$r_{UV} : H^0(U,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(V,\mathcal{F})$$

连续的 Frechet 空间结构在拓扑同胚意义下唯一: 设 F 是 $H^0(U,\mathcal{F})$ 上的, 使得对任意 $U_n \subset U$, 限制映射

$$r_{U,U_n} : F \longrightarrow H^0(U_n,\mathcal{F})$$

连续的 Frechet 空间结构. 若在 F 中 f_k 收敛到 f, 由于 r_{U,U_n} 连续, $r_{U,U_n}(f_k)$ 收敛到 $r_{U,U_n}(f)$, 故对任意紧集 $K \subset U_n$, $\|f_k - f\|_K \longrightarrow 0$, 于是在前面构造的 $H^0(U,\mathcal{F})$ 上 Frechet 空间结构所诱导的拓扑下, f_k 收敛到 f, 因此

$$id : F \longrightarrow H^0(U,\mathcal{F}) \tag{9.24}$$

连续线性且是 Frechet 空间到 Frechet 空间的满射, 由开映射定理, 其为开映射, 于是 (9.24) 是拓扑同胚. □

定理 9.23 令 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 是 Stein 空间, $\mathcal{F}$ 是 ${}_X\mathcal{O}$ 凝聚层. 若 U 是全纯凸开集, 则

$$r_{X,V} : H^0(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(U,\mathcal{F})$$

的像在 $H^0(U,\mathcal{F})$ 中稠密.

证明: 令 K 是 U 的任一紧集, 只需证明, 对任意 $\epsilon > 0$, $\sigma \in H^0(U,F)$, 都可找到 $\tau \in H^0(X,F)$, 满足

$$\|\tau - \sigma\|_K < \epsilon.$$

由于 U 全纯凸, 故 $\hat{K} \subset U$, 由于

$$\|\cdot\|_K \leqslant \|\cdot\|_{\hat{K}},$$

故不妨假定 $K=\hat{K}$. 令 W 是 K 的开邻域. 由命题 9.15, 存在 Oka-Weil 域 (V,ϕ), 使得

$$K\subset\subset V\subset W,$$

这里 ϕ 将 V 全纯嵌入到 $\mathbf{C}^t$ 中多圆盘 $\Delta(0,1)$ 的解析子集. 取 $0<r<1$, 使得

$$K\subset V'=\phi^{-1}(\Delta(0,r)).$$

首先, 我们证明, 若存在

$$\sigma_1,\cdots,\sigma_k\in H^0(X,\mathcal{F})$$

生成 $\mathcal{F}_x$, $\forall x\in W$. 由命题 9.21 的证明, $\sigma_1,\cdots,\sigma_k\in H^0(X,\mathcal{F})$ 亦可生成 $H^0(V',{}_X\mathcal{O})$ 模 $H^0(V',\mathcal{F})$, 即

$$\Psi:H^0(V',k\ {}_X\mathcal{O})\longrightarrow H^0(V',F),$$

$$(h_1,\cdots,h_k)\longrightarrow\sum_{i=1}^k h_i\sigma_i$$

是满射, 故对任意的 $\sigma\in H^0(U,\mathcal{F})$, 都有 $h\in H^0(V',k\ {}_X\mathcal{O})$, 满足

$$\Psi(h)=r_{UV'}(\sigma).$$

取充分大的 M, 使得

$$\|\Psi(h)\|_K\leqslant M\|h\|_K,$$

由推论 9.19, 存在

$$g=(g_1,\cdots,g_k)\in H^0(X,k\ {}_X\mathcal{O}),$$

满足

$$\|h-g\|_K\leqslant\frac{\epsilon}{M},$$

于是, 若令

$$\tau=\sum_{i=1}^k g_i\sigma_i\in H^0(X,k\ {}_X\mathcal{O}),$$

就有

$$\|\sigma-\tau\|_K=\|\Psi(g)-\Psi(h)\|_K\leqslant M\cdot\frac{\epsilon}{M}=\epsilon.$$

对于一般情形, 令

$$X=\bigcup_{n=1}^{+\infty}V_n,$$

这里 (V_n, ϕ_n) 是 Oka-Weil 域, 满足

$$V_n \subset \overline{V}_n \subset V_{n+1}, \quad K \subset V_1.$$

适当选取 $r_n < 1$, 使得

$$W_n = \phi_n^{-1}(\Delta(0, r_n))$$

满足

$$\overline{V}_{n-1} \subset W_n \subset \overline{W}_n \subset V_n.$$

由命题 9.21 的证明, 存在截影

$$\sigma_1, \cdots, \sigma_k \in H^0(W_n, \mathcal{F})$$

生成 $\mathcal{F}_x$; $\forall x \in W_{n-1}$. 由于 W_{n-1} 是 W_n 的全纯凸开集, 由前面特殊情形讨论知 $H^0(W_n, \mathcal{F})$ 在 $H^0(W_{n-1}, \mathcal{F})$ 中稠密, 因此, $\forall \epsilon > 0$, $\forall \sigma \in H^0(U, \mathcal{F})$. 我们要证明可选 $\tau_n \in H^0(W_n, \mathcal{F})$, 使得

$$\|\tau_1 - \sigma\|_K < 2^{-1}\epsilon, \quad \|\tau_n - \tau_{n-1}\|_{\overline{W_{n-2}}} < 2^{-n}\epsilon.$$

由于 K 是 W_1 的全纯凸子集, τ_1 自然存在. 若已选好 $\tau_1, \cdots, \tau_{n-1}$, 由于 $H^0(W_n, \mathcal{F})$ 在 $H^0(W_{n-1}, \mathcal{F})$ 中稠密, 故存在 $\tau_n \in H^0(W_n, \mathcal{F})$, 满足

$$\|\tau_n - \tau_{n-1}\|_{\overline{W_{n-2}}} < 2^{-n}\epsilon,$$

于是对任意 k, 序列

$$\{\tau_n\}_{n \geqslant k+1}$$

关于拟范数 $\|\cdot\|_{W_k}$ 收敛, 令

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \geqslant k+1}} \tau_n = \tau(k) \in H^0(W_k, \mathcal{F}).$$

现在, 定义 $\tau \in H^0(X, \mathcal{F})$, 使得在 W_k 上 $\tau = \tau(k)$, 则

$$\|\tau - \sigma\|_K \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \|\tau_n - \tau_{n-1}\|_K + \|\tau_1 - \sigma\|_K < \epsilon(\sum 2^{-n}) = \epsilon.$$

□

定理 9.24 (Cartan 定理 B) 令 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 是 Stein 空间, $\mathcal{F}$ 是 X 上凝聚解析层, 则

$$H^q(X, \mathcal{F}) = 0, \quad \forall q \geqslant 1.$$

证明: 令

$$X = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}^+} W_n,$$

这里 (W_n, ϕ_n) 是 Oka-Weil 域, 满足

$$W_n \subset \overline{W_n} \subset W_{n+1}.$$

由命题 9.20, 适当缩小 W_n, 不妨假定

$$H^q(W_n, \mathcal{F}) = 0, \quad \forall q \geqslant 1.$$

首先证明 $q > 1$ 的情形. 令

$$\begin{aligned} &0 \longrightarrow F \xrightarrow{i} C_0(F) \xrightarrow{\delta_0} C_1(F) \xrightarrow{\delta_1} C_2(F) \longrightarrow \cdots \\ &\xrightarrow{\delta_{q-1}} C_q(F) \xrightarrow{\delta_q} C_{q+1} \longrightarrow \cdots \end{aligned} \tag{9.25}$$

是 $\mathcal{F}$ 的松弛解. 由定理 4.23 及 4.26,

$$H^q(X, F) \cong H^q(X, \dot{C}(\mathcal{F})); \quad q = 0, 1, 2, \cdots.$$

故只需证明, 若 (以后, 在不引起混淆的情况下, 将 δ_q 简写成 δ)

$$f \in H^0(X, C_q(\mathcal{F})), \quad \delta f = 0,$$

则存在 $g \in H^0(X, C_{q-1}(\mathcal{F}))$, 满足

$$\delta g = f.$$

我们将归纳证明存在序列 $\{g_n\}$, $g_n \in H^0(W_n, C_{q-1}(\mathcal{F}))$, 满足

$$g_n|_{W_{n-1}} = g_{n-1}.$$

此时, 只需定义

$$g|_{W_n} = g_n.$$

由于 $\mathcal{F}$ 在 W_n 上零调, 特别的, 在 W_1 上零调. 由定理 4.26, 存在

$$g_1 \in H^0(W_1, C_{q-1}(\mathcal{F})),$$

使得 (在不引起混淆的情况下, 略去 $|_{W_q}$)

$$\delta g_1 = f.$$

假定对 $n \leqslant m$, 已经找到需要的

$$g_n \in H^0(W_n, C_{q-1}(\mathcal{F})).$$

由于 $\mathcal{F}$ 在 W_{m+1} 上零调, 存在

$$\tilde{g}_{m+1} \in H^0(W_{m+1}, C_{q-1}(\mathcal{F})),$$

使得 $\delta\tilde{g}_{m+1} = f$, 故在 W_m 上,

$$\delta\tilde{g}_{m+1} - \delta g_m = 0,$$

于是存在 $h \in H^0(W_m, C_{q-2}(\mathcal{F}))$, 使得

$$\tilde{g}_{m+1} - g_m = \delta h,$$

即在 W_m 上有

$$\tilde{g}_{m+1} - \delta h = g_m.$$

由于 $C_{q-2}(\mathcal{F})$ 是松弛层, 故存在 $\tilde{h} \in H^0(X, C_{q-2}(\mathcal{F}))$, 使得

$$\tilde{h}|_{W_n} = h.$$

令

$$g_{m+1} := \tilde{g}_{m+1} - \delta\tilde{h} \in H^0(W_{m+1}, C_{q-1}(\mathcal{F})),$$

则

$$\delta g_{m+1} = f, \quad g_{m+1}|_{W_n} = g_m.$$

因此, 我们在 $q > 1$ 的情形证明了定理.

现在证明 $q = 1$ 的情形, 对

$$f \in H^0(X, C_1(\mathcal{F})), \quad \delta f = 0,$$

由于 $\mathcal{F}$ 在每个 W_n; $n \in \mathbf{Z}^+$ 上零调, 知存在

$$g_1 \in H^0(W_1, C_0(F)), \quad g_2 \in H^0(W_2, C_0(\mathcal{F})),$$

使得

$$\delta g_1 = f, \quad \delta g_2 = f.$$

更进一步, 存在 $g_3 \in H^0(W_3, C_0(\mathcal{F}))$, $\delta g_3 = f$. 于是在 W_2 上

$$\delta g_3 - \delta g_2 = 0.$$

由 (9.24), 有下列层同态正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} C_0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Im}\ \delta_0 \longrightarrow 0, \tag{9.26}$$

且对任意开集 U,

$$0 \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{F}) \xrightarrow{i} \Gamma(U,C_0(\mathcal{F})) \longrightarrow \Gamma(U,\mathrm{Im}\ \delta_0) \tag{9.27}$$

正合, 因此

$$g_3 - g_2 \in \Gamma(W_2,\mathcal{F}),$$

由定理 9.18, 存在 $h_3 \in \Gamma(X,\mathcal{F})$ (从而 $\delta(h_3)=0$), 使得

$$\|g_3 - g_2 - h_3\|_{\bar{W}_1} < 2^{-1},$$

现在

$$\delta(g_3 - h_3) = \delta g_3 = f,$$

用 $g_3 - h_3$ 代替 g_3, 且仍记其为 g_3, 则有

$$\delta g_3 = f, \quad \|g_3 - g_2\|_{\bar{W}_1} \leqslant 2^{-1},$$

重复使用这个过程, 可相继找到 $g_n \in H^0(W_n, C_0(\mathcal{F})); n > 3$, 使得

$$\delta g_n = f,$$

且 $h_n := g_n - g_{n-1} \in \Gamma(W_n,\mathcal{F})$ 满足

$$\|h_n\|_{\overline{W_{n-2}}} = \|g_n - g_{n-1}\|_{\overline{W_{n-2}}} < 2^{-(n-2)}.$$

于是, 定义 $g \in \Gamma(X, C_0(\mathcal{F}))$, 使得

$$g|_{W_n} = g'_n := g_{n+2} + \sum_{k>n+2} h_k, \tag{9.28}$$

现在, $h_k \in \Gamma(W_k,\mathcal{F})$,

$$\left\|\sum_{k>n+2} h_k\right\|_{W_n} \leqslant \sum_{k>n+2} \|h_k\|_{W_n} \leqslant 2^{-(n+2)},$$

由于 $\Gamma(W_n, F)$ 是 Frechet 空间, 故绝对局部一致收敛级数

$$\sum_{k>n+2} h_k \in \Gamma(W_n,\mathcal{F}),$$

因此

$$g_n' \in \Gamma(W_n, C_0(\mathcal{F})).$$

为证明 g 是 $\Gamma(X, C_0(F))$ 中元, 只需

$$g_{n+1}'|_{W_n} = g_n',$$

事实上,

$$g_{n+1}' = g_{n+3} + \sum_{k>n+3} h_k = g_{n+2} + h_{n+3} + \sum_{k>n+3} h_k = g_{n+2} + \sum_{k>n+2} h_k = g_n'.$$

于是 $g \in \Gamma(X, C_0(F))$, 且

$$\delta g_{n+1}' = \delta g_{n+3} + \delta\left(\sum_{k>n+3} h_k\right) = f.$$

定理得证. □

现在讨论 Cartan 定理 A, B 的应用.

定理 9.25 令 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中全纯域, V 是 Ω 的解析子集, 若 f 在 V 上全纯, 则存在 Ω 上全纯函数 $\tilde{f}$, 使得

$$\tilde{f}|_V = f.$$

证明: 考虑层正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_V \stackrel{i}{\longrightarrow} \mathcal{O} \stackrel{p}{\longrightarrow} {}_V\mathcal{O} \longrightarrow 0, \tag{9.29}$$

及其诱导的上同调群正合列

$$0 \longrightarrow H^0(\Omega, \mathcal{I}_V) \stackrel{i_*}{\longrightarrow} H^0(\Omega, \mathcal{O}) \stackrel{p_*}{\longrightarrow} H^0(\Omega, {}_V\mathcal{O}) \stackrel{\delta_*}{\longrightarrow} H^1(\Omega, \mathcal{I}_V). \tag{9.30}$$

由于 $\mathcal{I}_V$ 是凝聚解析层, 由 Cartan 定理 B,

$$H^1(\Omega, \mathcal{I}_V) = 0,$$

故 (9.30) 中 p_* 是满射, 于是, 对任意

$$f \in \Gamma(V, {}_V\mathcal{O}|V) \cong \Gamma(\Omega, {}_V\mathcal{O}) \equiv H^0(\Omega, {}_V\mathcal{O}),$$

存在 $\tilde{f} \in H^0(\Omega, \mathcal{O})$, 使得

$$p_*(\tilde{f}) = f,$$

即 $\tilde{f}|_V = f$. □

定理 9.26 令 Ω 是 $\mathbf{C}^n$ 中全纯域, 若 $f_1,\cdots,f_k$ 是 Ω 中无公共零点的全纯函数, 则存在 Ω 上全纯函数 $g_1,\cdots,g_k$, 使得

$$\sum_{i=1}^{k} g_i f_i \equiv 1.$$

证明: 考虑 Ω 上层同态

$$\lambda : k\ {}_n\mathcal{O} \longrightarrow {}_n\mathcal{O},$$

$$(\mathbf{g}_1,\cdots,\mathbf{g}_k) \longrightarrow \mathbf{f}_1\mathbf{g}_1+\cdots+\mathbf{f}_k\mathbf{g}_k,$$

这里 $\mathbf{f}_1,\cdots,\mathbf{f}_k$ 是 $f_1,\cdots,f_k$ 的芽. 由于 $f_1,\cdots,f_k$ 无公共零点, 知 λ 是满射, 又因为 $\text{Ker}\ \lambda$ 是 $k\ {}_n\mathcal{O}$ 的子层, 故有以下层正合列

$$0 \longrightarrow \text{Ker}\ \lambda \xrightarrow{i} k\ {}_n\mathcal{O} \xrightarrow{\lambda} {}_n\mathcal{O} \longrightarrow 0.$$

由于 $\text{Ker}\ \lambda$ 是凝聚解析层, 由 Cartaon 定理 B,

$$H^1(\Omega, \text{Ker}\ \lambda) = 0.$$

于是

$$\lambda_* : \Gamma(\Omega, k\ {}_n\mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(\Omega, {}_n\mathcal{O})$$

是满射, 故 $1 \in \Gamma(\Omega, {}_n\mathcal{O})$ 有原像, 由 λ_* 的定义知, 存在

$$g = (g_1,\cdots,g_h) \in \Gamma(\Omega, k\ {}_nO),$$

使得 $\lambda_*(g) = 1$, 即

$$\sum_{i=1}^{k} g_i f_i = 1.$$

□

与此定理密切相关的是著名的 Corona 问题: 令 Ω 是强拟凸域, $f_1,\cdots,f_k$ 是 Ω 上全纯函数, 满足存在 $\epsilon > 0$,

$$\sum_{i=1}^{k} |f_i(x)|^2 \geqslant \epsilon; \quad \forall x \in \Omega,$$

问是否存在 Ω 上有界全纯函数 $g_1,\cdots,g_k$, 使得

$$\sum_{i=1}^{k} g_i f_i = 1.$$

到目前为止, Corona 问题仅在 $n=1$ 的情形得以解决.

定理 9.27 令 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 是 Stein 空间, $\mathcal{F}$ 是 X 上 ${}_X\mathcal{O}$ 凝聚层, 若 $\sigma_1, \cdots, \sigma_k \in H^0(X, \mathcal{F})$ 生成 ${}_X\mathcal{O}_x$ 模 $\mathcal{F}_x$, $\forall x \in X$, 则 $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ 生成 $H^0(X, {}_X\mathcal{O})$ 模 $H^0(X, \mathcal{F})$.

证明: 考虑

$$\phi : k\ {}_X\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F},$$

使得对任意 $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \cdots, \mathbf{h}_k) \in (k\ {}_X\mathcal{O})_x$,

$$\phi(\mathbf{h}_1, \cdots, \mathbf{h}_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{h}_i \sigma_i(x).$$

令 $\mathcal{K}$ 是 ϕ 的核, 则存在 X 上层正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow k\ {}_X\mathcal{O} \xrightarrow{\phi} \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

由 Cartan 定理 B, $H^1(X, \mathcal{K}) = 0$, 于是

$$\phi_* : H^0(X, k\ {}_X\mathcal{O}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F})$$

是满射. 由 ϕ_* 的定义, $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ 生成 $H^0(X, {}_X\mathcal{O})$ 模 $H^0(X, \mathcal{F})$. □

定理 9.28 令 $(X, {}_X\mathcal{O})$ 是 Stein 空间, $\mathcal{F}$ 是 X 上 ${}_X\mathcal{O}$ 凝聚层, K 在 X 中紧全纯凸, 则存在有限个 $\sigma_1, \cdots, \sigma_k \in H^0(X, \mathcal{F})$ 生成 $H^0(K, {}_K\mathcal{O})$ 模 $H^0(K, \mathcal{F})$.

证明: 由 Cartan 定理 A, $H^0(X, \mathcal{F})$ 生成 ${}_X\mathcal{O}_x$ 模 $\mathcal{F}_x$, $\forall x \in X$. 故给定 $x \in X$, 存在 $\sigma_1, \cdots, \sigma_t \in H^0(X, \mathcal{F})$, 使得 $\sigma_1(x), \cdots, \sigma_t(x)$ 生成 $\mathcal{F}_x$. 由于 $\mathcal{F}$ 是凝聚层, 存在 $U_x \in \mathcal{U}_x$, 使得对任意 $y \in U_x$, $\sigma_1(y), \cdots, \sigma_t(y)$ 生成 $\mathcal{F}_y$. 由于 $K = \hat{K}$ 紧, 存在有限个 U_x 覆盖 $\hat{K}$, 记它们的并为 U, 对应 $\mathcal{F}$ 的整体截影的并为 $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$. 定义

$$\lambda : k\ {}_X\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{F},$$

$$(\mathbf{h}_1, \cdots, \mathbf{h}_k) \longrightarrow \sum_{i=1}^{k} \mathbf{h}_i \sigma_i(x), \quad \forall \mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \cdots, \mathbf{h}_k) \in k\ {}_X\mathcal{O},$$

则 λ 在 $U \supset K$ 上是满射. 对 $\sigma \in H^0(K, \mathcal{F})$, 由定义, 存在开集 $V \supset K$, σ 可视为 $H^0(V, \mathcal{F})$ 中元 (在 K 上限制). 由于 $K = \hat{K}$ 全纯凸, 故存在 Oka-Weil 域 W,

$$K \subset W \subset \bar{W} \subset V \cap U.$$

现在 W 是 Stein 空间, 由定理 9.27, 存在

$$h_i; \quad 1 \leqslant i \leqslant k \in H^0(W, {}_W\mathcal{O}),$$

使得在 W 上有

$$\sigma = \sum_{i=1}^{k} h_i \sigma_i,$$

从而 $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ 生成 $H^0(K, {}_K\mathcal{O})$ 模 $H^0(K, \mathcal{F})$. □

第十章 Hermite 流形与 Hermite 向量丛

在这一章, 我们将讨论紧复流形上的 **Hermite** 几何理论, 包括 **Hodge** 定理、**Kodaira** 消灭定理、嵌入定理等这些基本定理, 同时也为下一章做知识上的准备.

§10.1 全纯向量丛

定义 10.1 设 M 是一个复流形, E 是拓扑空间. 若存在连续映射 $\pi : E \longrightarrow M$ 满足

(1) $E_p = \pi^{-1}(p)$; $\forall p \in M$, 是秩为 r 的线性空间, 即 $E_p \cong \mathbf{C}^r$ 是点 p 处的纤维;

(2) 存在 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, 且 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 全纯等价于拓扑积 $U_\alpha \times \mathbf{C}^r$, 即

$$\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\sim} U_\alpha \times \mathbf{C}^r, \quad \forall \alpha \in I$$

使得

$$E_P \underset{\phi_\alpha}{\xrightarrow{\sim}} \{p\} \times \mathbf{C}^r \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}^r, \quad \forall p \in U_\alpha$$

是复向量空间 E_p 和 $\mathbf{C}^r$ 之间的一个 $\mathbf{C}$ 线性同构. (U_α, ϕ_α) 可看成是局部坐标邻域, 称 U_α 是 E 的**平凡化邻域**.

称 E 为 M 上的**全纯向量丛**.

$\forall p \in U_\alpha \cap U_\beta, U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, 令 $\phi_{\alpha\beta} := \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}|_{\phi_\beta(E_p)} : \mathbf{C}^r \xrightarrow{\phi_\beta^{-1}} E_p \xrightarrow{\phi_\alpha} \mathbf{C}^r$, $\phi_{\alpha\beta}(p) \in GL(r, \mathbf{C})$, 且 $\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r, \mathbf{C})$ 是全纯的, 则 $\phi_{\alpha\beta}$ 称为 E 的**转换函数**.

$\phi_{\alpha\beta}$ 的意思是: 对 E_p 上的任意向量, 存在 E 的不同平凡化邻域的坐标, 则坐标会根据转换函数来变换. 由于转换函数仅依赖于 p, 所以不同坐标间的变换仅依赖于 p 而与向量无关. 例如, 任意 $V \in E_p, p \in U_\alpha \cap U_\beta, V_\alpha^i$ 和 $V_\beta^j, 1 \leqslant i, j \leqslant r$ 分别是向量 V 在邻域 $\phi^{-1}(U_\alpha) \cong U_\alpha \times \mathbf{C}^r$ 和 $\phi^{-1}(U_\beta) \cong U_\beta \times \mathbf{C}^r$ 上的坐标, 则

$$V^\alpha = V^\beta \phi_{\alpha\beta}(p), \tag{10.1}$$

这里 $V^\alpha = (V_1^\alpha, \cdots, V_r^\alpha)$, $V^\beta = (V_1^\beta, \cdots, V_r^\beta)$, $\phi_{\alpha\beta}(p) \in GL(r, \mathbf{C})$ 仅依赖于 p 且与向量 V 无关.

若 $\phi_{\alpha\beta}$ 满足如下相容条件:

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta}(p)\phi_{\beta\gamma}(p) = \phi_{\alpha\gamma}(p), &\quad p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma, \\ \phi_{\alpha\beta}(p) = \phi_{\beta\alpha}(p)^{-1}, &\quad p \in U_\alpha \cap U_\beta, \end{aligned} \tag{10.2}$$

则称 E, ϕ, M (或简写成 E) 是**秩为 r 的全纯向量丛**.

事实上 E 也是一个复流形, 邻域 $\{\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbf{C}^r\}_{\alpha \in I}$ 是局部坐标的开覆盖, 且投影映射 $\pi : E \longrightarrow M$ 是一个全纯映射.

一般 E 的秩不依赖于流形 M 的维数. 当 E 的秩为 1 时, 称 E 是**全纯线丛**.

上述定义中, 转换函数 $\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r, \mathbf{C})$ 是全纯的, 这表明 $\phi_{\alpha\beta}$ 的表示矩阵中每个分量在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上都是全纯的. 设 M 是一复流形, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 M 的覆盖, 若存在 $\phi_{\alpha\beta}$, $\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(r, \mathbf{C})$, 使得 $\phi_{\alpha\beta}$ 全纯且满足 (10.2), 则可以构造转换函数为 $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ 的全纯向量丛.

首先我们在 $\bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \times \mathbf{C}^r)$ 引入等价关系. 设 $(p, a_\alpha) \in U_\alpha \times \mathbf{C}^r$, $(q, a_\beta) \in U_\beta \times \mathbf{C}^r$, 则 $(p, a_\alpha) \sim (q, a_\beta) \Longleftrightarrow p = q, a_\alpha = a_\beta \phi_{\alpha\beta}$. 根据 (10.2), 易验证上述 "$\sim$" 是 $\bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \times \mathbf{C}^r)$ 的一个等价关系. 令 $E = \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \times \mathbf{C}^r) / \sim$, 定义 $\pi : E \longrightarrow M$ 满足 $\pi([p, a_\alpha]) = p$, 这里 $[p, a_\alpha]$ 是 (p, a_α) 的等价类, 则 (E, ϕ, M) 是秩为 r 的全纯向量丛, 这里 $U_\alpha; \alpha \in I$ 是 E 的平凡化邻域且 $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ 是 E 的转换函数. 一般的, 所有 $\phi_{\alpha\beta}$ 属于某个函数范畴, 则称 E 是这个范畴中的向量丛. 例如, 如果所有 $\phi_{\alpha\beta}$ 都全纯, 则 E 是一个全纯向量丛; 如果所有 $\phi_{\alpha\beta}$ 都是 C^∞, 则 E 是一个 C^∞ 向量丛; 如果所有 $\phi_{\alpha\beta}$ 都连续, 则 E 是一个拓扑向量丛. 这里 $\phi_{\alpha\beta}$ 是 C^∞ 或者连续的意思是指 $\phi_{\alpha\beta}$ 的所有分量都是 C^∞ 或者连续.

在如上定义中, E 是一全纯向量丛, 复流形 M 和 $\mathbf{C}^r$ 分别是底空间和纤维. 显然, E 也是复流形, $\{\pi^{-1}(U_\alpha)\cong U_\alpha\times\mathbf{C}^r\}$ 是 E 的坐标覆盖. 向量丛的概念不仅出现在复范畴, 也在其他范畴中出现. 当 M 是一实的微分流形, E 是拓扑空间, $\phi: E\longrightarrow M$ 是一连续的映射, 且对 $\forall x\in M$, $E_x:=\pi^{-1}(x)$ 具有一个 $\mathbf{R}(\mathbf{C})$ 上的向量空间结构. 若存在 M 的开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 和同构 $\phi_\alpha:=\pi^{-1}(U_\alpha)\xrightarrow{\sim} U_\alpha\times\mathbf{R}^r(\mathbf{C}^r)$ 使得 $\phi_\alpha|_{E_x}: E_x\xrightarrow{\sim}(x)\times\mathbf{R}^r(\mathbf{C}^r)$; $\forall x\in U_\alpha$, 是从 E_x 到 $\mathbf{R}^r(\mathbf{C}^r)$ 的 $\mathbf{R}(\mathbf{C})$ 线性同构. 进而, 由于 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$, $\phi_{\alpha\beta}=\phi_\alpha\circ\phi_\beta^{-1}: U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow GL(r,\mathbf{R})$ $(GL(r,\mathbf{C}))$ 是光滑的, 则 (E,π,M) 是一实 (复) 向量丛, 对应的底空间和纤维分别是 M 和 $\mathbf{C}^r$.

定义 10.2 设 $\pi: E\longrightarrow M$ 是复流形 M 上的全纯向量丛, U 是 M 上的开集, 一个连续 (C^∞, 全纯) 映射 $f: U\longrightarrow E$, 使得 $\pi\circ f=id_U$. 称这样的 f 是 U 上的一个连续 (C^∞, 全纯) 截形. 用 $\Gamma^0(U,E)(\Gamma(U,E),\tilde{\Gamma}(U,E))$ 来表示这些 U 上的连续 (C^∞, 全纯) 截形的全体组成的集合.

设 U_α 是秩为 r 的全纯向量丛 E 的平凡化邻域. 定义 U_α 上的**典则截形**为

$$e_i^\alpha(x)=\phi_\alpha^{-1}(x,(0,\cdots,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{ 位置}}}{1},0,\cdots,0)),\quad \forall x\in U_\alpha,\quad 1\leqslant i\leqslant r,$$

这里 e_i^α; $1\leqslant i\leqslant r$ 是 U_α 上的全纯截形, 且对 $\forall x\in U_\alpha$, $\{e_i^\alpha\}$, $1\leqslant i\leqslant r$ 生成纤维 E_x, 故称 $\{e_i^\alpha\}_{1\leqslant i\leqslant r}$ 是 E 的**局部标架**. 所以, 对于每个全纯向量丛 E 和每个平凡化邻域 U_α, 都存在由 U_α 上的全纯截形组成的局部标架. 更一般的, 对于任一 M 中的开集 U, 如果存在 $s_1,\cdots,s_r\in\Gamma(U,E)$, 且对 $\forall x\in U, s_1(x),\cdots,s_r(x)$ 生成纤维 E_x; 即 $s_1(x),\cdots,s_r(x)$ 是 E_x 的基, 则称 $s_1,\cdots,s_r$ 是 U 上的**局部标架**或简称为**标架**.

设 U 是 M 的开集, $s: U\longrightarrow E$ 是一截形, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 E 的平凡化邻域, 则截形 $s|_{U\cap U_\alpha}$ 可表示成 $(x,s_\alpha(x))\in U_\alpha\times\mathbf{C}^r\cong\pi^{-1}(U_\alpha)$; 且 $x\in U_\alpha\cap U$, s 是连续 (C^∞, 全纯) 截形等价于 s_α, $\alpha\in I$ 在 $U_\alpha\cap U$ 上是连续 (C^∞, 全纯). 若 $s,t\in\Gamma^0(U,E)(\Gamma(U,E),\tilde{\Gamma}(U,E))$, 定义 $(s+t)(x)=s(x)+t(x),\forall x\in U$, 则 $s+t$ 仍然是 U 上的截形, $s+t\in\Gamma^0(U,E)(\Gamma(U,E),\tilde{\Gamma}(U,E))$.

进而容易验证 $\Gamma^0(U,E)(\Gamma(U,E),\tilde{\Gamma}(U,E))$ 是关于上述加法运算的 Abel 群, 则 $(\tilde{\Gamma}(U,E),r_{UV})_{U\in\mathcal{U}_M}$ 是 M 上的预层, 这里 r_{UV} 是限制映射. 用 $\mathcal{O}(E)$ 来表示由预层 $(\tilde{\Gamma}(U,E),r_{UV})_{U\in\mathcal{U}_M}$ 生成的层, $\mathcal{O}(E)$ 称为 E 的**全纯截形芽层**, 对每个 E 的平凡化邻域 U_α, $\mathcal{O}(E)|U_\alpha\cong r\mathcal{O}|U_\alpha$, 这里 r 是向量丛 E 的秩.

设 X 是复流形, 一个 $\mathcal{O}$ 层 $\mathcal{F}$ 称为**局部自由的**, 若存在开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 和层同构 $\phi_\alpha: p_\alpha\mathcal{O}|U_\alpha\cong\mathcal{F}|U_\alpha$; $p_\alpha\in\mathbf{Z}^+$, 对所有 $\alpha\in I$ 均成立. 特别的, 若 X 是连通的, 则 $p_\alpha=p_\beta$, $\forall\alpha,\beta\in I$, 故 $\mathcal{O}(E)$ 是一个局部自由层. 相反的, 若 $\mathcal{F}$ 是连通的

复流形 M 上的一个局部自由 $\mathcal{O}$ 层, 即存在开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, 使得 $\mathcal{F}\mid U_\alpha \cong r\mathcal{O}$; $\forall\alpha\in I$, $r\in\mathbf{Z}^+$, 则存在 M 上一个秩为 r 的全纯向量丛 E, 使得 $\mathcal{F}\cong\mathcal{O}(E)$.

因为 $\mathcal{F}|U_\alpha\cong r\mathcal{O}|U_\alpha$, 故可设 $E_1^{(\alpha)},\cdots,E_r^{(\alpha)}$ 是层 $\mathcal{F}$ 在 U_α 上的典则截形; 类似的, 在 $r\mathcal{O}|U_\beta$ 上也存在 r 个典则截形 $E_1^{(\beta)},\cdots,E_r^{(\beta)}$. 若 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$, 则在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上 $(E_i^{(\alpha)})_{1\leqslant i\leqslant r}$, $(E_i^{(\beta)})_{1\leqslant i\leqslant r}$ 分别生成 $r\mathcal{O}|U_\alpha$ 和 $r\mathcal{O}|U_\beta$. 故

$$E_i^{(\alpha)}=\sum_{j=1}^{r}a^\alpha_{\beta ij}E_j^{(\beta)},\quad 1\leqslant i\leqslant r, \tag{10.3}$$

其中 $a^\alpha_{\beta ij}$ 在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上都是全纯的, 并且 $\phi_{\beta\alpha}=(a^\alpha_{\beta ij})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$ 是 $r\times r$ 非奇异矩阵. 若通过转换函数 $\phi_{\beta\alpha}$ 来构造全纯向量丛 E, 则 $\mathcal{F}\cong\mathcal{O}(E)$.

例 1. 平凡丛 $E=M\times\mathbf{C}^r$, $\pi(p\times\mathbf{C}^r)=p$; $\forall p\in M$, 则

$$g_{\alpha\beta}=I_r,\quad \forall\alpha,\beta\in I, \tag{10.4}$$

这里 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 M 的任意给定的开覆盖.

例 2. 切丛. 这是最重要的向量丛的例子, 也是向量丛概念的起源. 假设 M 是维数为 n 的实微分流形. $M=\bigcup\limits_{\alpha\in I}U_\alpha$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 M 的包含局部坐标邻域的开覆盖. $\forall p\in M$, T_pM 是 M 在点 p 的切空间, $TM=\bigcup\limits_{p\in M}T_pM$ 是 M 的切丛, 这里 $\pi:TM\longrightarrow M$ 由 $\pi(T_pM)=p$ 所定义. 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 M 的坐标覆盖, 即每个 U_α; $\alpha\in I$ 都是局部坐标邻域. $\pi^{-1}(U_\alpha)=\bigcup\limits_{p\in U_\alpha}T_p(M)$, $\phi_\alpha:\pi^{-1}(U_\alpha)\xrightarrow{\sim}U_\alpha\times\mathbf{R}^n$. 若 $(x^1,\cdots,x^n)$ 是 U_α, $\forall p\in U_\alpha$ 的局部坐标, 则 $T_p(M)=\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}a^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p \mid a^i\in\mathbf{R}, i=1,\cdots,n\right\}$. $\forall\, V=\sum\limits_{i=1}^{n}a^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p\in T_pM$, 则 $\phi_\alpha(V)=(x^1(p),\cdots,x^n(p),a^1,\cdots,a^n)$, 若 U_β 是另一个在点 p 的局部坐标邻域且 $(y^1,\cdots,y^n)$ 是 U_β 的局部坐标, 则 $V\in T_pM$ 有另一个表示 $V=\sum\limits_{j=1}^{n}b^j\dfrac{\partial}{\partial y^j}\Big|_p$, 那么

$$a^i=\sum_{j=1}^{n}b^j\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\Big|_p,\quad i=1,\cdots,n. \tag{10.5}$$

下面等式是 (10.5) 的矩阵表示

$$(a^1,\cdots,a^n)=(b^1,\cdots,b^n)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial y^n}\\ \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial x^n}{\partial y^1} & \dfrac{\partial x^n}{\partial y^n}\end{pmatrix}_p^t. \tag{10.6}$$

故转换函数 $\phi_{\alpha\beta}=\left(\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)^t:U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow GL(n,\mathbf{R})$ 是局部坐标系之间的 Jacobi 矩阵的转置, 容易验证转换函数 $\phi_{\alpha\beta}$ 满足 (10.2) 且 C^∞ 依赖于 M 的局部坐标. TM 是一秩为 n 的实向量丛.

例 3. 全纯切丛 $T^{1,0}(M)$. 空间 M 是一个 n 维复流形, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是由 M 的局部坐标邻域组成的开覆盖. 若 $(z^1,\cdots,z^n)$ 是 U_α 的局部坐标, $T_p^{1,0}(M)$ 是所有 (1,0) 切向量组成的集合. 考虑 U_α 的局部坐标, $\forall p\in U_\alpha$, $T_p^{1,0}(M):=\left\{\sum\limits_{i=1}^n a^i\dfrac{\partial}{\partial z^i}\Big|_p|a^i\in\mathbf{C};a\leqslant i\leqslant n\right\}$, $T^{1,0}(M)=\bigcup\limits_{p\in M}T_p^{1,0}(M)$, $\pi:T^{1,0}(M)\longrightarrow M$ 由 $\pi(T_p^{1,0}(M))=p$ 所定义. 那么 $\pi^{-1}(U_\alpha)=\bigcup\limits_{p\in U_\alpha}T_p^{1,0}(M)$, ϕ_α: $\pi^{-1}(U_\alpha)\xrightarrow{\sim}U_\alpha\times C^n$; $V=\sum\limits_{i=1}^n a^i\dfrac{\partial}{\partial z^i}\Big|_p\in T_p^{1,0}(M)$, $\phi_\alpha(V)=(p,a^1,\cdots,a^n)=(z^1(p),\cdots,z^n(p),a^1,\cdots,a^n)$. 若 $(w^1,\cdots,w^n)$ 是 U_β 的局部坐标, $p\in U_\alpha\cap U_\beta$, 则每个 (1,0) 切向量 $V\in T_p^{1,0}(M)$ 都有另一个 U_β 的局部坐标表示, 即 $V=\sum\limits_{j=1}^n b^j\dfrac{\partial}{\partial w^j}\Big|_p$. 故

$$(a^1,\cdots,a^n)=(b^1,\cdots,b^n)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial z^1}{\partial w^1} & \cdots & \dfrac{\partial z^1}{\partial w^n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial z^n}{\partial w^1} & \cdots & \dfrac{\partial z^n}{\partial w^n}\end{pmatrix}_p^t \tag{10.7}$$

且 $\phi_{\alpha\beta}=\left(\dfrac{\partial z^i}{\partial w^i}\right)^t:U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow GL(n,\mathbf{C})$. $\phi_{\alpha\beta}$ 是局部坐标系之间的 Jacobi 矩阵的转置. 由于 $\dfrac{\partial z^i}{\partial w^j}$, $1\leqslant i,j\leqslant n$ 都是 $(w^1,\cdots,w^n)$ 上的全纯函数, 故 $\phi_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow GL(n,\mathbf{C})$ 是全纯的, $\phi_{\alpha\beta}$ 满足 (10.2), 故 $T^{1,0}(M)$ 是一秩为 n 的全纯向量丛.

例 4. 全纯余切丛 $T^{*(1,0)}(M)$. 设 M 是一个 n 维复流形, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 M 的包含局部坐标邻域的开覆盖, $\forall p\in U_\alpha\subset M$, $z^1,\cdots,z^n$ 是 U_α 的局部坐

标. $T_p^{*(1,0)}(M)=\left\{\sum_{i=1}^{n}c_idz^i\middle|c_i\in\mathbf{C};\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$, $T^{*(1,0)}(M)=\bigcup_{p\in M}T_p^{*(1,0)}(M)$. $\pi:T^{*(1,0)}(M)\longrightarrow M$ 由 $\pi(T_p^{*(1,0)})=p$ 所定义, $\pi^{-1}(U_\alpha)=\bigcup_{p\in U_\alpha}T_p^{*(1,0)}(M)$.

$\phi_\alpha^*:\pi^{-1}(U_\alpha)\xrightarrow{\sim}U_\alpha\times\mathbf{C}^n$, $\forall\omega=\sum_{i=1}^{n}c_idz^i\in T_p^{*(1,0)}(M)$, $\phi_\alpha^*(\omega)=(p,c_1,\cdots,c_n)$. 若 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$, $\omega^1,\cdots,\omega^n$ 是 U_β 的局部坐标, 则 $\omega\subset T_p^{*(1,0)}(M)$ 具有另一个局部坐标 $\omega^1,\cdots,\omega^n$ 的表示, $\omega=\sum_{j=1}^{n}d_jd\omega^j$, $c_i=\sum_{j=1}^{n}d_j\dfrac{\partial\omega^j}{\partial z^i}$, $1\leqslant i\leqslant n$, 由矩阵表示

$$(c_1,\cdots,c_n)=(d_1,\cdots,d_n)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\omega^1}{\partial z^1} & & \dfrac{\partial\omega^1}{\partial z^n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\omega^n}{\partial z^1} & & \dfrac{\partial\omega^n}{\partial z^n}\end{pmatrix}$$

或

$$\begin{pmatrix}c^1\\ \vdots\\ c^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\omega^1}{\partial z^1} & & \dfrac{\partial\omega^1}{\partial z^n}\\ \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\omega^n}{\partial z^1} & \cdots & \dfrac{\partial\omega^n}{\partial z^n}\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}d^1\\ \vdots\\ d^n\end{pmatrix},\tag{10.8}$$

故 $g_{\alpha\beta}^*=\phi_\alpha^*{\phi_\beta^*}^{-1}=\left(\dfrac{\partial\omega^i}{\partial z^j}\right)^t:U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow Gl(r,\mathbf{C})$ 是全纯的且满足 (10.2), 这样 $T^{*(1,0)}(M)$ 是一秩为 n 的全纯向量丛.

比较 (10.7) 和 (10.8), 转换函数的矩阵表示为 $g_{\alpha\beta}^*=(g_{\alpha\beta}^{-1})$.

例 5. 设 (A,π,M) 和 (B,π,M) 是流形 M 上的两个向量丛, 那么可以用 A 和 B 来生成新的向量丛. 例如

(1) A 的对偶丛 A^*. $\pi:A^*\longrightarrow M$ 由 $\pi(A_p^*)=p$ 所定义, $A_p^*=(A_p)^*$ 是 A_p 的对偶空间.

(2) $A\oplus B$, $(A\oplus B)_p=A_p\oplus B_p$, $\pi:A\oplus B\longrightarrow M$ 由 $\pi((A\oplus B)_p)=p$ 所定义.

(3) $A\otimes B$, $(A\otimes B)_p=A_p\otimes B_p$, $\pi:A\otimes B\longrightarrow M$ 由 $\pi((A\otimes B)_p)=p$ 所定义.

设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是由 A 和 B 的公共的平凡化邻域所组成的 M 的开覆盖, $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ 和 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ 分别为 A 和 B 的转换函数, 则 A^*, $A\oplus B$ 和 $A\otimes B$ 的转换函数分别为 $(g_{\alpha\beta}^{-1})^t$, $\begin{pmatrix}g_{\alpha\beta} & 0\\ 0 & \Psi_{\alpha\beta}\end{pmatrix}$ 和 $g_{\alpha\beta}\cdot\!\times\psi_{\alpha\beta}$ 或 $g_{\alpha\beta}\times\!\cdot\,\psi_{\alpha\beta}$, 这里 $g_{\alpha\beta}\cdot\!\times\psi_{\alpha\beta}$ 或 $g_{\alpha\beta}\times\!\cdot\,\psi_{\alpha\beta}$ 由 $A\otimes B$ 局部标架的排序决定.

例 6. $\Lambda^q T^{*(0,1)}(M)$. $T^{*(0,1)}(M)$ 的 q 次外积, $E=\Lambda^q T^{*(1,0)}(M)$, $\forall p\in M$,

$$E_p=\{\sum a_{i_1,\cdots,i_q}(p)d\bar{z}^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{i_q}|a_{i_1,\cdots,i_q}(p)\in\mathbf{C}\},$$

$a_{i_1\cdots i_q}$ 是关于 $i_1,\cdots,i_q$ 反对称的. 显然 $\dim E_p=\binom{n}{q}$, E 是 M 上秩为 $\binom{n}{q}$ 的 C^∞ 向量丛.

设 $\pi:E\longrightarrow M$ 是复流形 M 上秩为 r 的全纯向量丛, U 是 M 上的开集, 一个 E **值** $(0,q)$ **形式** ω 具有如下的局部表示:

$$\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant m}s_{i_1\cdots i_q}d\bar{z}^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{i_q},$$

$s_{i_1\cdots,i_p}\in\Gamma(U,E)$, $1\leqslant i_1<\cdots<i_q\leqslant m$. 这里 $\Gamma(U,E)$ 表示 U 上所有光滑截形组成的群, $z^1,\cdots,z^n$ 是 M 的局部坐标.

设 $\varepsilon^{0,q}(U,E)$ 表示所有 U 上 E 值 $(0,q)$ 形式组成的集合, 对 $\omega,\eta\in\varepsilon^{0,q}(U,E)$, 定义加法运算如下, 若

$$\eta=\sum_{1\leqslant p_1<\cdots<p_q\leqslant m}t_{i_1,\cdots,i_q}d\bar{z}^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{i_q},$$

这里 $t_{i_1,\cdots,i_q}\in\Gamma(U,E)$, $1\leqslant i_1<\cdots<i_q\leqslant m$.

$$\omega+\eta=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_q\leqslant m}(s_{i_1,\cdots,i_q}+t_{i_1,\cdots,i_q})d\bar{z}^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{i_q}.$$

显然 $s_{i_1,\cdots,i_q}+t_{i_1,\cdots,i_q}\in\Gamma(U,E)$; $1\leqslant i_1<\cdots<i_q\leqslant m$, 故 $\omega+\eta\in\varepsilon^{0,q}(U,E)$, $\varepsilon^{0,q}(U,E)$ 赋予这个加法运算形成一个 Abel 群. 类似的 $(\varepsilon^{0,q}(U,E),r_{UV})_{U\in\mathcal{U}_M}$ 是一个预层, 这里 r_{UV} 是全纯限制映射. $\varepsilon^{0,q}(E)$ 表示由预层 $(\varepsilon^{0,q}(U,E),r_{UV})_{U\in\mathcal{U}_M}$ 生成的 E 值 $(0,q)$ 形式芽层. 设 U 是开集, 则 $\Gamma(U,\varepsilon^{0,q}(E))=\varepsilon^{0,q}(U,E)$. $\forall\omega\in\Gamma(M,\varepsilon^{0,q}(E))=\varepsilon^{0,q}(M,E)$ $M=\bigcup\limits_{\alpha\in I}U_\alpha$, 每个 U_α 是 E 的平凡化邻域, 则 ω 在 U_α 上具有局部表示

$$\omega|_{U_\alpha}=\sum_{1\leqslant p_1<\cdots<p_q\leqslant m}S^{(\alpha)}_{i_1,\cdots,i_q}d\bar{z}^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{i_q},$$

$S^{(\alpha)}_{i_1,\cdots,i_q}\in\Gamma(U_\alpha,E)$, $1\leqslant i_1<\cdots<i_q\leqslant m$, 则

$$S^{(\alpha)}_{i_1,\cdots,i_q}=\sum_{k=1}^{r}S^{\alpha,k}_{i_1,\cdots,i_q}e_{\alpha,k}. \tag{10.9}$$

类似的, ω 在 U_β 上有局部表示

$$\omega|_{U_\beta} = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_q\leqslant m} S^{\beta}_{i_1,\cdots,i_q} d\bar{z}^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{i_q},$$

$$S^{(\beta)}_{i_1,\cdots,i_q} = \sum_{k=1}^{r} S^{\beta,k}_{i_1,\cdots,i_q} e_{\beta,k},$$

若 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$, 由于

$$e_{\alpha,k} = \sum_{j=1}^{r} \phi_{\beta\alpha jk} e_{\beta,j},$$

$\phi_{\alpha\beta} = (\phi_{\alpha\beta ij})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$ 是 E 的转换函数的矩阵表示. 由 (10.9)

$$\begin{aligned} S^{(\alpha)}_{i_1,\cdots,i_q} &= \sum_{k=1}^{r} S^{\alpha,k}_{i_1,\cdots,i_q} e_{\beta,j} \\ &= \sum_{j,k=1}^{r} S^{\alpha,k}_{i_1,\cdots,i_q} \phi_{\beta\alpha jk} e_{\beta,j}, \end{aligned} \tag{10.10}$$

故

$$S^{\beta,j}_{i_1,\cdots,i_q} = \sum_{k=1}^{r} S^{\alpha,k}_{i_1,\cdots,i_q} g_{\beta\alpha jk}, \tag{10.11}$$

即

$$S^\beta = \phi_{\beta\alpha} S^\alpha; \quad 在\ U_\alpha\cap U_\beta\ 上,$$

这里

$$S^\alpha = \begin{pmatrix} S^{\alpha,1}_{i_1,\cdots,i_q} \\ \vdots \\ S^{\alpha,r}_{i_1,\cdots,i_q} \end{pmatrix} \quad 且 \quad S^\beta = \begin{pmatrix} S^{\beta,1}_{i_1,\cdots,i_q} \\ \vdots \\ S^{\beta,r}_{i_1,\cdots,i_q} \end{pmatrix},$$

$S^\alpha\in\Gamma(U_\alpha,E)$, $S^\beta\in\Gamma(U_\beta,E)$.

设 L 是一阶微分算子, 则

$$LS^\alpha = \phi_{\alpha\beta}(LS^\beta) + L(\phi_{\alpha\beta})S^\beta, \quad 在\ U_\alpha\cap U_\beta\ 上. \tag{10.12}$$

若 $L(\phi_{\alpha\beta})=0$, 则在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上, $LS^\alpha = g_{\alpha\beta}(LS^\beta)$, 这表明 LS^α 仍是 M 上的一个截形. 当 $L=\bar\partial$, 有 $L(\phi_{\alpha\beta})=0$, 因为 $\phi_{\alpha\beta}$ 是全纯. 故若 $S\in\Gamma(M,E)$, 则 $\bar\partial S\in\Gamma(M,E)$, 所以得到以下层的正合序列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathcal{O}(E) \xrightarrow{i} \varepsilon^{0,0}(E) \xrightarrow{\bar\partial} \varepsilon^{0,1}(E) \xrightarrow{\bar\partial} \varepsilon^{0,2}(E) \\ \xrightarrow{\bar\partial} \varepsilon^{0,3}(E) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} \varepsilon^{0,n}(E) \longrightarrow 0, \end{aligned} \tag{10.13}$$

其中 $\mathcal{O}(E)$ 是 E 的全纯截形芽层.

由 $\bar{\partial}\bar{\partial}=0$ 和 Dolbeault 定理, (10.13) 是一个层的正合序列. 根据定理 4.33, $\varepsilon^{0,q}(E)$, $0\leqslant q\leqslant n$ 都是复流形上的零调, 尽管定理的证明只适用于 $\mathbf{C}^n$. 定理 4.33 仍适用于复流形, 因为当单位分解存在时, 定理仍适用. 因此 (10.13) 是层 $\mathcal{O}(E)$ 的零调解, 由定理 4.26, $\mathcal{O}(E)$ 的上同调群可由下面 M 的截形序列得到.

$$\begin{aligned}&0\longrightarrow\Gamma(M,\mathcal{O}(E))\xrightarrow{i}H(M,\varepsilon^{0,0}(E))\xrightarrow{\bar{\partial}}H(M,\varepsilon^{0,1}(E))\\&\xrightarrow{\bar{\partial}}\cdots\xrightarrow{\bar{\partial}}H(M,\varepsilon^{0,n-1}(E))\xrightarrow{\bar{\partial}}H(M,\varepsilon^{0,n}(E))\xrightarrow{\bar{\partial}}0,\end{aligned}\tag{10.14}$$

即

$$\begin{aligned}H^{0,q}(M,E)&=H^q(M,\varepsilon^{0,\cdot}(E))\\&=\frac{\{\omega\in\Gamma(M,\varepsilon^{0,q}(E)\mid\bar{\partial}\omega=0\}}{\{\bar{\partial}\eta\mid\eta\in\Gamma(M,\varepsilon^{0,q-1}(E))\}},\quad 1\leqslant q\leqslant n,\\&H^{0,0}(M,E)\equiv\Gamma(M,\mathcal{O}(E)).\end{aligned}\tag{10.15}$$

引入截形的根本目的是研究 $H^q(M,\mathcal{O}(E))$, $0\leqslant q\leqslant n$. 当 M 是紧复流形时, 证明 $\dim_C H^{0,q}(M,E)<+\infty$ 的可行的方法, 是将上同调群和调和形式联系起来并讨论调和算子的解. 在讨论调和算子的解时, 我们需要延拓 $\Gamma(M,\varepsilon^{0,q}(E))$ 到一个 Hilbert 空间, 使调和算子作用在其上, 再在 Hilbert 空间中运用 L^2 估计的方法.

§10.2　Hermite 流形的几何

首先我们需要在 E 的全纯向量丛和底空间流形 M 上赋予度量.

设 M 是 n 维复流形, $T^{1,0}(M)$ 是 M 的 (1,0) 切向量丛, 有时称 $T^{1,0}(M)$ 为 M 上的全纯切丛..

定义 10.3　一个 **Hermite 度量** ds^2 是指内积的集合 $\{\langle\cdot,\cdot\rangle_p\}_{p\in M}$, 使得

(1) $\forall p\in M$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$ 是 $T_p^{1,0}(M)$ 上的 Hermite 内积, 即 $\forall\eta,\zeta\in T_p^{1,0}(M),\forall c_1,c_2\in\mathbf{C}$, $\langle\xi,\xi\rangle\geqslant 0$; 且 $\langle\xi,\xi\rangle=0$ 的充要条件是 $\xi=0$, $\langle c_1\xi+c_2\eta,\zeta\rangle=c_1\langle\xi,\zeta\rangle+c_2\langle\eta,\zeta\rangle$ 且 $\langle\xi,\eta\rangle=\overline{\langle\eta,\xi\rangle}$.

(2) 若 ξ,η 是 $T^{1,0}(M)$ 在开集 U 上的 C^∞ 截形, 则 $\langle\xi,\eta\rangle$ 是 U 上的 C^∞ 函数.

设 $z^1,\cdots,z^n$ 是 M 的一局部坐标系, 则 $\dfrac{\partial}{\partial z^i}$, $1\leqslant i\leqslant n$ 是局部坐标邻域 U 上的全纯截形, 且

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial z^i},\frac{\partial}{\partial z^j}\right\rangle,\quad 1\leqslant i,j\leqslant n\tag{10.16}$$

是 U 上的 C^∞ 函数, 满足 $g_{i\bar{j}} = \overline{g_{j\bar{i}}}$, 这个 Hermite 度量可写成 $ds^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$. 由于当 $\xi \neq 0$ 时, $\langle \xi, \xi \rangle > 0$ 故矩阵 $g = (g_{i\bar{j}})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} > 0$, 即 $g = (g_{i\bar{j}})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ 是正定 Hermite 矩阵.

给定 Hermite 度量的复流形称为 **Hermite 流形**.

M 是 n 维复流形, 故 M 是 $2n$ 维实流形, 若 $z^1, \cdots, z^n$ 是一个局部复坐标系, $z^i = x^i + \sqrt{-1} y^i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 则 $(x^1, x^2, \cdots, x^n, y^1, \cdots y^n)$ 是同一坐标邻域内的局部坐标系. $\forall p \in M$, 则 $T_p(M)$ 是 M 在点 p 处的切空间. 由于 M 是实 $2n$ 维流形, $T_p(M) \cong \mathbf{R}^{2n}$, $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right|_p \left.\dfrac{\partial}{\partial x^2}\right|_p \cdots \left.\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right|_p \left.\dfrac{\partial}{\partial y^1}\right|_p \cdots \left.\dfrac{\partial}{\partial y^n}\right|_p$ 是 $T_p(M)$ 的一个标架. 设 M 是复流形, 那么存在自然的**概复结构** $J: T_pM \longrightarrow T_pM$, $\forall p \in M$, J 是 T_pM 上的线性变换使得

$$\begin{cases} J\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y^i}, \\ J\left(\dfrac{\partial}{\partial y^i}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial x^i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases} \tag{10.17}$$

尽管定义 (10.17) 是由局部坐标 $z^1, \cdots, z^n$ 所定义, 容易验证 (10.17) 不依赖于复流形 M 上的复坐标 $z^1, \cdots, z^n$. 若延拓 $J: \mathbf{C} \otimes T_p(M) \longrightarrow \mathbf{C} \otimes T_p(M)$, 令

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right), \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

则

$$\begin{aligned} J\frac{\partial}{\partial z^i} &= \frac{1}{2}\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) - \sqrt{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial z^i}, \\ J\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} &= \frac{1}{2}\left(J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) + \sqrt{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y^i} - \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{-1}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = -\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}. \end{aligned}$$

因为 $J^2 = -id$, 故 $\dfrac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial z^n}$ 是 J 的具有特征值 $\sqrt{-1}$ 的特征向量. $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}^n}$ 是 J 的特征值为 $-\sqrt{-1}$ 的特征向量, 而且这是 J 作用在 $T_p^{1,0}(M)$ 的所有特征向量. 任意 n 维 Hermite 流形 M, 可看成实的 $2n$ 维光滑流形, 若 $ds^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 是 Hermite 度量, Hermite 度量矩阵 $G = (g_{ij})$ 是一个

$n\times n$ 的正定 Hermite 矩阵, $G=A+\sqrt{-1}B$, 由于 $G=\bar{G}^t$, 则 $A^t=A$, $B=-B^t$, 通过矩阵表示,

$$ds^2=dzGd\bar{z}^t,$$

由 $dz^k=dx^k+\sqrt{-1}dy^k$, $1\leqslant k\leqslant n$, 则 $x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n$ 是 M 的实的局部坐标,

$$\begin{aligned}ds^2&=(dx+\sqrt{-1}\,dy)(A+\sqrt{-1}B)(dx-\sqrt{-1}dy)^t\\&=(dx,dy)\begin{pmatrix}A&B\\-B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx^t\\dy^t\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{10.18}$$

这个 ds^2 是 M 上的 Riemann 度量, 称这个度量为 Hermite 流形上的**诱导的 Riemann 度量**. 矩阵 $\begin{pmatrix}A&B\\-B&A\end{pmatrix}$ 显然是对称的, $\forall v=\sum_{i=1}^{n}\left(a^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}+b^i\dfrac{\partial}{\partial y^i}\right)\neq 0$,

$$\begin{aligned}|v|^2=\langle v,v\rangle&=(a,b)\begin{pmatrix}A&B\\-B&A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^t\\b^t\end{pmatrix}\\&=aAa^t+bBb^t-bBa^t+aBb^t\\&=(a+\sqrt{-1}b)G(a-\sqrt{-1}b)^t>0.\end{aligned}\tag{10.19}$$

因此 (10.19) 是 M 上的一个 Riemann 度量. 这里 $(a+\sqrt{-1}b)=(a^1+\sqrt{-1}b^1,\cdots,a^n+\sqrt{-1}b^n)$, $(a-\sqrt{-1}b)$ 是相应的行向量. 这个诱导的 Riemann 度量具有 J-不变性质, 即 $\forall V,W\in T_p(M)$, $\forall p\in M$,

$$\langle V,W\rangle=\langle JV,JW\rangle.\tag{10.20}$$

若

$$V=\sum_{i=1}^{n}\left(a^i\frac{\partial}{\partial x^i}+b^i\frac{\partial}{\partial y^i}\right),\quad W=\sum_{i=1}^{n}\left(c^i\frac{\partial}{\partial x^i}+d^i\frac{\partial}{\partial y^i}\right),$$

则

$$JV=\sum_{i=1}^{n}\left(-b^i\frac{\partial}{\partial x^i}+a^i\frac{\partial}{\partial y^i}\right),$$

$$JW=\sum_{i=1}^{n}\left(-d^i\frac{\partial}{\partial x^i}+c^i\frac{\partial}{\partial y^i}\right).$$

因此

$$\begin{aligned}\langle JV, JW\rangle &= (-b,a)\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -d^t \\ c^t\end{pmatrix}\\ &= (a,b)\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d\end{pmatrix}\\ &= (-b,a)\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d\end{pmatrix}\\ &= \langle V, W\rangle.\end{aligned}$$

相反的, 若 M 是一个 n 维复流形, 具有 J-不变 Riemann 度量, 那么这个 J-不变 Riemann 度量是一个 Hermite 流形的诱导 Riemann 度量. 假设 $(z^1,\cdots,z^n)$ 是一局部坐标系, $z^i = x^i + \sqrt{-1}y^i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, Riemann 度量具有如下表达式

$$ds^2 = (dx, dy)\begin{pmatrix} A & B \\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx^t \\ dy^t\end{pmatrix}.$$

这个 Riemann 度量的 J-不变性质表明 $A = A^t, A = D, B = B^t$, $B = -C$, 则 $ds^2 = dz(A + \sqrt{-1}B)\overline{dz}^t$ 是一个 Hermite 度量, 并且这个 J-不变 Riemann 度量显然是这个 Hermite 度量诱导的 Riemann 度量.

设 E 是秩为 r 的 n 维复流形 M 上的全纯向量丛, 类似于在 $T^{1,0}(M)$ 上一样, 可以在 E 上赋予 Hermite 度量.

定义 10.4 向量丛 E 上的 Hermite 度量是 E_p 上内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle_p$, $\forall p \in M$ 的集合, 满足如下条件:

(1) $\{\cdot,\cdot\}_p$ 是 E_p 上 Hermite 内积;

(2) $\{\cdot,\cdot\}_p$ 在 M 上光滑, 即 M 上的任意开集 U, $s_1, s_2 \in \Gamma(U, E)$, 则 $\langle s_1, s_2\rangle_p$ 是 U 上的光滑函数.

设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 E 上的平凡化邻域, $e_{\alpha,1},\cdots,e_{\alpha,r}$ 是 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上的全纯标架, $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ 是关于平凡化邻域 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 的转换函数. 令

$$h^{(\alpha)}_{\lambda\bar\mu} = \{e_{\alpha,\lambda}, e_{\alpha,\mu}\}, \quad 1 \leqslant \lambda,\mu \leqslant r,$$

$\forall \xi,\eta \in E_p, \xi = \sum\limits_{\lambda=1}^{r} \xi^\lambda_{(\alpha)} e_{\alpha,\lambda}$, $\eta = \sum\limits_{\lambda=1}^{r} \eta^\mu_{(\alpha)} e_{\alpha,\mu}$,

$$\{\xi,\eta\}_p = \xi^\lambda_{(\alpha)}\overline{\eta}^\mu_{(\alpha)} h^{(\alpha)}_{\lambda\bar\mu}(p), \tag{10.21}$$

$h^{(\alpha)} = (h^{(\alpha)}_{\lambda\bar\mu})_{1\leqslant\lambda,\mu\leqslant r}$ 是一个 $r\times r$ 正定 Hermite 矩阵. 故

$$\{\xi,\eta\}_p = \xi_{(\alpha)} h^{(\alpha)} \overline{\eta}^t_{(\alpha)},$$

这里 $\xi_{(\alpha)}=(\xi_{(\alpha)}^1,\cdots,\xi_{(\alpha)}^r)$ 是行向量, $\eta_{(\alpha)}$ 也是行向量. 设 U_β 是 E 的另一个平凡化邻域, $p\in U_\alpha\cap U_\beta$, 则

$$\xi=\sum_{\lambda=1}^r \xi_{(\alpha)}^\lambda e_{\alpha,\lambda}=\sum_{\lambda=1}^r \xi_{(\beta)}^\lambda e_{\beta,\lambda}$$

且

$$\begin{aligned}\xi_{(\alpha)}&=\xi_{(\beta)}\phi_{\alpha\beta},\\ \{\xi,\eta\}_p=\xi_{(\alpha)}h^{(\alpha)}\overline{\eta}_{(\alpha)}^t&=\xi_{(\beta)}\phi_{\alpha\beta}h^{(\alpha)}\overline{\phi}_{\alpha\beta}^t\overline{\eta}_{(\beta)}^t=\xi_{(\beta)}^t h^{(\beta)}\overline{\eta}_{(\beta)}.\end{aligned} \tag{10.22}$$

故在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上,

$$h^{(\beta)}=\phi_{\alpha\beta}h^{(\alpha)}\overline{\phi}_{\alpha\beta}^t. \tag{10.23}$$

一个赋予 Hermite 度量的全纯向量丛称为 **Hermite 向量丛**.

定义 10.5 若线性算子 $D:\Gamma(M,E)\longrightarrow\Gamma(M,\varepsilon^1(E))$ 满足如下条件

$$D(fs)=df\otimes S+fDs, \tag{10.24}$$

$\forall s\in\Gamma(M,E)$, $f\in\Gamma(M,\varepsilon^0)$, 则 D 称为 E 上的**联络**.

设 U_α 是 E 的一个平凡邻域, $e_{\alpha,1},\cdots,e_{\alpha,r}$ 是 $\pi^{-1}(U_\alpha)$ 上的标架, 则根据定义 10.5,

$$De_{\alpha,i}=\sum_{j=1}^r \theta_{ij}^{(\alpha)}e_{\alpha,j},$$

$s\in\Gamma(M,E)$, 在 U_α 上 $s=\sum\limits_{i=1}^l s_i^{(\alpha)}e_{\alpha,i}$,

$$Ds=\sum_{i=1}^r ds_i^{(\alpha)}e_{\alpha,i}+\sum_{i,j=1}^r s_i^{(\alpha)}\theta_{ij}^{(\alpha)}e_{\alpha,j}.$$

若有

$$e(\alpha)^t=\begin{pmatrix}e_{\alpha,1}\\ \vdots\\ e_{\alpha,r}\end{pmatrix},$$

则

$$Ds=ds(\alpha)e(\alpha)^t+s(\alpha)\theta(\alpha)e(\alpha)^t,$$

这里 $s=(s_1,\cdots,s_r)$, $\theta(\alpha)=(\theta_{ij}^{(\alpha)})$ 是 $r\times r$ 矩阵, 其元素都是关于标架 $e(\alpha)$ 的 1-形式, $\theta(\alpha)$ 称为**关于标架 $e(\alpha)$ 的联络矩阵**.

U_β 是 E 的另一个平凡邻域, 且 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, 则在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上, Ds 有另一个表示

$$\begin{aligned} Ds &= \sum_{i=1}^{r} ds_i^{(\alpha)} e_{\alpha,i} + \sum_{i=1}^{r} s_i^{(\alpha)} De_{\alpha,i} \\ &= ds(\alpha)e(\alpha)^t + s(\alpha)De(\alpha)^t \\ &= ds(\alpha)e(\alpha)^t + s(\alpha)\theta(\alpha)e(\alpha)^t \\ &= ds(\beta)e(\beta)^t + s(\beta)\theta(\beta)e(\beta)^t. \end{aligned} \tag{10.25}$$

由于 $s(\beta) = s(\alpha)\phi_{\beta\alpha}$, $e(\alpha)^t = {\phi_{\alpha\beta}^t}^{-1} e(\beta)^t$,

$$ds(\beta) = ds(\alpha)\phi_{\beta\alpha} + s(\alpha)d\phi_{\beta\alpha},$$

$$\begin{aligned} & ds(\beta)e(\beta)^t + s(\beta)\theta(\beta)e(\beta)^t \\ =& (ds(\alpha)\phi_{\beta\alpha} + s(\alpha)d\phi_{\beta\alpha}){\phi_{\beta\alpha}}^{-1}e(\alpha)^t + s(\alpha)\phi_{\beta\alpha}\theta(\beta){\phi_{\beta\alpha}}^{-1}e(\alpha)^t \\ =& ds(\alpha)e(\alpha)^t + s(\alpha)(d\phi_{\beta\alpha}, {\phi_{\beta\alpha}}^{-1})e(\alpha)^t + \phi_{\beta\alpha}\theta(\beta){\phi_{\beta\alpha}}^{-1}e(\alpha)^t, \end{aligned}$$

故

$$\theta(\alpha) = d\phi_{\beta\alpha} \cdot {\phi_{\beta\alpha}}^{-1} + \phi_{\beta\alpha}\theta(\beta){\phi_{\beta\alpha}}^{-1}. \tag{10.26}$$

公式 (10.26) 是两个联络矩阵 $\theta(\alpha)$ 和 $\theta(\beta)$ 关于全纯标架 $e(\alpha)$ 和 $e(\beta)$ 的转换关系.

事实上, 易验证此公式对如下任意两个标架都成立,

$$e = (e_1, \cdots, e_r), \quad d = (d_1, \cdots, d_r)$$

是 $\pi^{-1}(U)$ 上的两个 C^∞ 标架, $\theta(e)$ 和 $\theta(d)$ 分别是关于标架 e 和 d 的联络矩阵, 这里 U 是 M 中的开集, 使得

$$e^t = Ad^t.$$

这里 A 是一个 $r \times r$ 非奇异矩阵且 A 中所有元素都在 U 上是 C^∞ 的, 则

$$\theta(e) = dA \cdot A^{-1} + A\theta(d)A^{-1}. \tag{10.27}$$

E 存在很多联络, 因此可以做如下约定, 使 Hermite 向量丛上的联络具有一种典范的取法.

(1) 若 $D = D' + D''$, 这里 $D' : \varepsilon^1(E) \longrightarrow \varepsilon^{1,0}(E)$, $D'' : \varepsilon^1(E) \longrightarrow \varepsilon^{0,1}(E)$ 是投影映射. 若 $D'' = \bar\partial$, 称联络 D **与复结构相容**.

(2) 若

$$d\{\xi, \eta\} = \{D\xi, \eta\} + \{\xi, D\eta\}, \tag{10.28}$$

这里 $\xi, \eta \in \Gamma(M, E)$, 称 D 与 Hermite 度量相容.

引理 10.6 设 E 是 Hermite 向量丛, 则 E 上存在唯一的联络 D 与度量和复结构都相容. 这个联络 D 称为 E 上的 **Hermite 联络**.

证明: 设 $e=(e_1,\cdots,e_r)$ 是 E 上的全纯标架, $h_{\alpha\bar\beta}=\{e_\alpha,e_\beta\}$, 若这样的 D 存在, 关于 e 的联络矩阵 θ 一定是 $(1,0)$ 型, 因为 $D''e=0$, 则

$$
\begin{aligned}
dh_{\alpha\bar\beta}&=\{e_\alpha,e_\beta\}=\{De_\alpha,e_\beta\}+\{e_\alpha,De_\beta\}\\
&=\{\sum\theta_{\alpha r}e_r,e_\beta\}+\{e_\alpha,\theta_{\beta r}e_r\}\\
&=\sum_r\theta_{\alpha r}h_{r\bar\beta}+h_{\alpha\beta}\bar\theta_{\beta r},
\end{aligned}
$$

故

$$\partial h_{\alpha\bar\beta}=\sum_r\theta_{\alpha r}h_{r\bar\beta},$$

即

$$\partial h=\theta h.$$

故 $\theta=\partial h\cdot h^{-1}$ 是唯一解, 这里 $h=(h_{\alpha\bar\beta})$ 是一个 $r\times r$ 的 Hermite 度量矩阵.

设 $e=(e_1,\cdots,e_r)$ 是 E 的一个酉标架, 即 $\{e_\alpha,e_\beta\}=\delta_{\alpha,\beta}$; $1\leqslant\alpha,\beta\leqslant r$, 则

$$
\begin{aligned}
0=d\{e_i,e_j\}&=\{De_\alpha,e_\beta\}+\{e_\alpha,De_\beta\}\\
&=\{\theta_{\alpha r}e_r,e_\beta\}+\{e_\alpha,\theta_{\beta r}e_r\}=\theta_{\alpha\beta}+\bar\theta_{\beta\alpha},
\end{aligned}
$$

故联络矩阵 θ 关于每个酉标架是 Hermite 反对称的.

现在延拓这个联络算子到 $D:\Gamma(M,\varepsilon^p(E))\longrightarrow\Gamma(M,\varepsilon^{p+1}(E))$, $1\leqslant p\leqslant 2n$, 由 Lebnitz 法则,

$$D(\psi\wedge\sigma)=d\psi\otimes\sigma+(-1)^p\psi\wedge D\sigma,$$

这里 $\psi\in\Gamma(M,\varepsilon^p)$, $\sigma\in\Gamma(M,E)$. 特别的, 考虑 $D^2:\Gamma(M,E)\longrightarrow\Gamma(M,\varepsilon^2(E))$, 设 $f\in\Gamma(M,\varepsilon^0)$, $\sigma\in\Gamma(M,E)$,

$$
\begin{aligned}
D^2(f\sigma)&=D(df\otimes\sigma+fD\sigma)\\
&=-df\otimes D\sigma+dfD\sigma+fD^2\sigma=fD^2\sigma.
\end{aligned}
\tag{10.29}
$$

(10.29) 表明了一个重要的性质, 即 D^2 在 $\Gamma(M,\varepsilon^0)$ 上是线性的. 若 $e=(e_1,\cdots,e_r)$ 是 E 的局部标架,

$$D^2e^t=\Theta(e)e^t,$$

这里 $e=(e_1,\cdots,e_r)$ 表示成行向量, $\Theta(e)$ 称为 Hermite 向量丛 E 关于标架 e 的**曲率方阵**. $\Theta(e)$ 是 $r\times r$ 矩阵, 其元素都是 2-形式, 若 $e'=(e'_1,\cdots,e'_r)$ 是另一个标架,

$$e'_i=a_i^je_j,\quad 1\leqslant i\leqslant r,$$

则 $A=(a_i^j)$ 是 $r\times r$ 非奇异矩阵, 且

$$D^2e'^t=\Theta(e')e'^t=A\Theta(e)A^{-1}e'^t.$$

由 (10.29), 故

$$\Theta(e')=A\Theta(e)A^{-1}. \tag{10.30}$$

另一方面,

$$D^2e^t=D(De^t)=D(\theta(e)e^t)=(d\theta(e)-\theta(e)\wedge\theta(e))e^t,$$

故

$$\Theta(e)=d\theta(e)-\theta(e)\wedge\theta(e). \tag{10.31}$$

由 (10.31) 得

$$\begin{aligned}d\Theta(e)&=-d\theta(e)\wedge\theta(e)+\theta(e)\wedge d\theta(e)\\&=-(\Theta(e)+\theta(e)\wedge\theta(e))\wedge\theta(e)+\theta(e)\wedge\Theta(e)+\theta(e)\wedge\theta(e)\\&=-\Theta(e)\wedge\theta(e)+\theta(e)\wedge\Theta(e),\end{aligned}$$

所以

$$d\Theta(e)-\theta(e)\wedge\Theta(e)+(\Theta(e)\wedge\theta(e))=0. \tag{10.32}$$

这就是第一 **Bianchi 不等式**.

设 e 是 Hermite 向量丛 E 的全纯局部标架, 则 $\theta(e)=\partial h\cdot h^{-1}$,

$$\begin{aligned}\Theta(e)&=d\theta(e)-\theta(e)\wedge\theta(e)=d(\partial h\cdot h^{-1})-\partial hh^{-1}\cdot\partial h\cdot h^{-1}\\&=\bar\partial\partial h\cdot h^{-1}-\partial h\cdot\bar\partial h^{-1}-\partial h\cdot\partial h^{-1}-\partial h\cdot h^{-1}\partial h\cdot h^{-1}\\&=\bar\partial\partial h\cdot h^{-1}+\partial h\wedge h^{-1}\bar\partial h\cdot h^{-1}\\&=\bar\partial(\partial h\cdot h^{-1})\\&=\bar\partial\theta(e).\end{aligned} \tag{10.33}$$

(10.33) 表明 $\Theta(e)$ 中的所有元素都是 $(1,1)$ 形式, (10.31) 表明曲率矩阵中的所有元素关于任何标架都是 $(1,1)$ 形式.

设 e 是酉标架, 则 $\theta(e)+\overline{\theta(e)}^t=0$,

$$\Theta(e)+\overline{\Theta(e)}^t = d\theta(e)+d\overline{\theta(e)}^t-\theta(e)\wedge\theta(e)-\overline{\theta(e)\wedge\theta(e)}^t$$
$$= -\theta(e)\wedge\theta(e)+\overline{\theta(e)}^t\wedge\overline{\theta(e)}^t=0.$$

故曲率矩阵 $\Theta(e)$ 关于任何酉标架都是 Hermite 反对称的.

现在考虑复流形 M 上两种特殊的全纯向量丛.

(1) 全纯切丛 $T^{1,0}(M)$, 即秩为 $r=\dim_C M$ 的全纯向量丛, 若 M 已经被赋予了 Hermite 度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$, 其局部可表示为

$$ds^2=g_{ij}dz^i\otimes d\bar{z}^j,$$

这里 $g_{ij}=\left\langle\dfrac{\partial}{\partial z^i},\dfrac{\partial}{\partial z^j}\right\rangle=\overline{g_{\bar{j}\bar{i}}}$.

用 ω 表示 Hermite 联络矩阵, Ω 表示其在自然标架 $\left(\dfrac{\partial}{\partial z^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial z^n}\right)$ 下的曲率矩阵, 则有

$$\omega=\partial g\cdot g^{-1},$$

$$\Omega=d\omega-\omega\wedge\omega=\bar{\partial}(\partial g\cdot g^{-1})=\bar{\partial}(\omega),$$

这里 $g=(g_{ij})$ 是 M 上的 Hermite 度量矩阵. 一般的, 设 e 是 $T^{1,0}(M)$ 的一个标架, 在此标架下的 Hermite 联络矩阵和曲率矩阵分别是 $\omega(e)$ 和 $\Omega(e)$, 则

$$\Omega(e)=d\omega(e)-\omega(e)\wedge\omega(e).$$

(2) 全纯线丛 L, 即 $r=1$, 此时 Hermite 矩阵局部地是一个正函数 h. 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是线丛 L 的平凡邻域, 则 Hermite 度量 $\{h_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一族正函数, 使得

$$h_\alpha=|\phi_{\beta\alpha}|^2h_\beta,\quad 在\ U_\alpha\cap U_\beta\ 上.$$

其联络形式是

$$\theta=\partial h_\alpha\cdot {h_\alpha}^{-1}=\partial\log h_\alpha.$$

曲率形式

$$\Theta=\bar{\partial}\partial\log h_\alpha=\bar{\partial}\partial\log h_\beta,\quad 在\ U_\alpha\cap U_\beta\ 上.$$

最后一个不等式成立, 因为 $\phi_{\alpha\beta}$ 是 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上的全纯函数.

命题 10.7 设 E 是复流形 M 上的 Hermite 向量丛, $\forall p\in M$, 存在全纯局部标架 e' 使得

(1) $h(z)=I+O(|z|^2)$;

(2) $\Omega(0)=\bar{\partial}\partial h(0)$.

证明: 首先选取局部坐标 $z^1,\cdots,z^n$ 使得 $z(p)=(z^1(p),\cdots,z^n(p))=0$. 另外对于点 p, 一定存在 p 的某开邻域的全纯标架 e, 关于 e 的度量矩阵用 h 记之, 则有 $h(0)>0$, 故存在非奇异矩阵 B, 使得 $h(0)=B\bar{B}^t$. 取新的全纯标架 $f=B^{-1}e$, 则关于标架 f 的度量矩阵 $\tilde{h}$ 适合 $\tilde{h}(0)=I$,

$$\tilde{h}(z)=I+S(z)+O(|z|^2),$$

这里 $S(z)$ 是 $r\times r$ 矩阵, 其元素都是 $z^1,\cdots,z^n,\bar{z}^1,\cdots,\bar{z}^n$ 的线性函数. 由于 $\tilde{h}=\bar{\tilde{h}}^t$, 故 $S(z)=\overline{S(z)}^t$. 分解 $S(z)=S_1(z)+S_2(\bar{z})$, $S_1(z)$ 和 $S_2(\bar{z})$ 的元素分别是关于 $z^1,\cdots,z^n$ 和 $\bar{z^1},\cdots,\bar{z^n}$ 的线性函数, 则

$$\overline{S(z)}^t=\overline{S_1(z)}^t+\overline{S_2(\bar{z})}^t=S_1(z)+S_2(\bar{z}),$$

故 $S_1(z)=\overline{S_2(\bar{z})}^t$, $S_2(\bar{z})=\overline{S_1(z)}^t$. 因为 $S_1(0)=0$, 因此 $I-S_1(z)$ 在 p 的一个小邻域是非奇异的, 故可以选取新的标架 $e'=(I-S_1(z))f$. 用 h' 表示关于标架 e' 的度量矩阵, 则

$$h'=(I-S_1(z))(I+S_1(z)+\overline{S_1(z)}^t+O(|z|^2))(I-\overline{S_1(z)}^t)$$

$$=I+O(|z|^2),$$

易验证在 p 的某开邻域中 $(h')^{-1}=I+O(|z|^2)$. 故

$$\Omega(z)=\bar{\partial}(\partial h'\cdot h'^{-1})=\bar{\partial}\partial h+O(|z|^2).$$

特别的

$$\Omega(0)=\bar{\partial}\partial h(0).$$

□

考虑关于 Hermite 度量 $ds^2=g_{i\bar{j}}dz^i\otimes d\bar{z}^j$ 的全纯切丛 $T^{1,0}(M)$, 这里 $z_1,\cdots,z_n$ 是一个局部坐标系. $\frac{\partial}{\partial z_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial z_n}$ 是一个标架. 则在此标架下的曲率矩阵为

$$\Omega=(\Omega^i_j),$$

Ω^i_j 是一个 $(1,1)$ 形式, $1\leqslant i,j\leqslant n$, 故

$$\Omega^i_j=R^i_{j\bar{h}l}d\bar{z}^k\wedge dz^l,$$

$$\Omega_{\bar{i}j}:=g_{s\bar{i}}\Omega^s_j=R_{\bar{i}j\bar{k}l}d\bar{z}^k\wedge dz^l.$$

$R_{\bar{i}j\bar{h}l}$ 称为**曲率张量**, $R_{\bar{k}j}:=R_{\bar{i}j\bar{k}l}g^{\bar{i}j}$ 称为 Hermite 流形 M 的 **Ricci 张量**, 这里 $g^{\bar{i}j}$ 是度量矩阵 g 的逆矩阵中的元素.

定义 10.8 设 M 是一个 Hermite 流形, 度量为 $ds^2 = g_{i\bar{j}}dz^i \otimes d\bar{z}^j$. 若 Kähler 形式

$$\Phi = \frac{\sqrt{i}}{2} g_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j$$

是闭的, 即 $d\Phi = 0$, 称 M 是一个 **Kähler 流形**.

命题 10.9 对于 Hermite 流形 M, 如下情形等价

(1) M 是 Kähler 流形;

(2) $\omega^i_j = \Gamma^i_{jk} dz^k$ 是局部联络形式的局部表示, 则 $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$;

(3) $\forall p \in M$, 存在一个 p 的开邻域上的 C^∞ 函数 ϕ, 使得 $\Phi = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\phi$;

(4) $\forall p \in M$, 存在一个局部全纯坐标系 $z^1, \cdots, z^n$, 使得 $g_{ij}(p) = \delta_{ij}, dg_{ij}(p) = 0$, 这样的局部坐标称为**在 p 点正则**.

证明: (1) $\Longleftrightarrow$ (2). $d\Phi = \dfrac{\sqrt{-1}}{2} \dfrac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} dz^k \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^{\bar{j}} + \dfrac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} d\bar{z}^k \wedge dz^i \wedge d\bar{z}^j = 0$, 这表明

$$\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k} = \frac{\partial g_{k\bar{j}}}{\partial z^i}, \quad \frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}^k} = \frac{\partial g_{i\bar{k}}}{\partial \bar{z}^j}, \quad \forall 1 \leqslant i, j \leqslant n. \tag{10.34}$$

由于 $\omega^j_i = \dfrac{\partial g_{i\bar{t}}}{\partial z^k} g^{\bar{t}j} dz^k$, 故 $\Gamma^j_{ik} = \dfrac{\partial g_{i\bar{t}}}{\partial z^k} g^{\bar{t}j} = \dfrac{\partial g_{k\bar{t}}}{\partial z^i} g^{\bar{t}j} = \Gamma^j_{ki}; \forall 1 \leqslant i, j \leqslant r.$

反之, 若已知 $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}; 1 \leqslant i, j, k \leqslant n.$

$$g_{j\bar{s}}\Gamma^j_{ik} = \frac{\partial g_{i\bar{t}}}{\partial z^k} g^{\bar{t}j} g_{j\bar{s}} = \frac{\partial g_{i\bar{s}}}{\partial z^k} = g_{j\bar{s}}\Gamma^j_{ki} = g_{j\bar{s}} \frac{\partial g_{k\bar{t}}}{\partial z^i} g^{\bar{t}j} = \frac{\partial g_{k\bar{s}}}{\partial z^i}.$$

故

$$\frac{\partial g_{i\bar{s}}}{\partial z^k} = \frac{\partial g_{k\bar{s}}}{\partial z^i}; \quad 1 \leqslant i, k, s \leqslant n \ ,$$

上面不等式的共轭是

$$\frac{\partial g_{s\bar{l}}}{\partial \bar{z}^h} = \frac{\partial g_{s\bar{k}}}{\partial \bar{z}^i}; \quad 1 \leqslant i, k, s \leqslant n,$$

故 (10.34) 成立, 即 $d\Phi = 0$.

(1) $\Longleftrightarrow$ (3). 由于 Φ 是一个实的闭 $(1,1)$ 形式, 故根据 Poincaré 定理, 存在一个定义于 p 的邻域的 1-形式 H, 使得 $\Phi = dH$, $H = H^{0,1} + H^{1,0}$ 是其 $(0,1)$ 形式和 $(1,0)$ 形式的分解. 由于 Φ 是实的, 故

$$H^{0,1} = \bar{H}^{1,0},$$

$$\begin{aligned}\Phi = dH &= (\partial + \bar{\partial})(H^{0,1} + H^{1,0}) \\ &= \partial H^{0,1} + \bar{\partial} H^{0,1} + \partial H^{1,0} + \bar{\partial} H^{0,1}.\end{aligned}$$

由于 Φ 是 $(1,1)$ 形式, 故 $\partial H^{1,0}=\bar{\partial}H^{0,1}=0$, 则根据 Dolbeault 引理, 存在一个 C^{∞} 函数 F 定义于 p 的某邻域, 使得 $H^{0,1}=\bar{\partial}F$, $H^{1,0}=\partial\overline{F}$, 则

$$\Phi=\overline{\partial}H^{1,0}+\partial H^{0,1}=\overline{\partial}\partial\overline{F}+\partial\overline{\partial}F=\partial\overline{\partial}(F-\overline{F})=\sqrt{-1}\partial\overline{\partial}\phi.$$

这里 $\phi=2\text{Im }F$ 是一个实的 C^{∞} 函数.

(3) $\Longrightarrow$ (1) 是平凡的.

(1) $\Longleftrightarrow$ (4). 通过一个常值的坐标线性变换, 不妨设 $z^i(p)=0;\ 1\leqslant i\leqslant n$, $g_{ij}(p)=\delta_{ij}$, $1\leqslant i,j\leqslant n$. 现定义一个新的全纯局部坐标 $(\tilde{z}_1,\cdots,\tilde{z}_n)$,

$$\tilde{z}_j=z_j+\frac{1}{2}\sum_{s,k=1}^{n}\frac{\partial g_{s\bar{j}}}{\partial z^k}(p)z^kz^s,$$

用 $\tilde{g}$ 表示在 $(\tilde{z}_1,\cdots,\tilde{z}_n)$ 下的度量矩阵. 令

$$\begin{aligned}b_{ij}=\frac{\partial\tilde{z}^j}{\partial z^i}&=\delta_{ji}+\frac{1}{2}\sum_{k,s=1}^{n}\frac{\partial g_{s\bar{j}}}{\partial z^k}(p)(\delta_{si}z^k+\delta_{ik}z^s)\\&=\delta_{ji}+\frac{1}{2}\left(\sum_k\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k}z^k+\sum_s\frac{\partial g_{s\bar{j}}}{\partial z^i}z^s\right)\\&=\delta_{ji}+\sum_k\frac{\partial g_{i\bar{j}}}{\partial z^k}(p)z^k,\end{aligned}\tag{10.35}$$

$B=(b_{ij})$ 是 $n\times n$ 矩阵, 则 $\tilde{g}=B^{-1}g\overline{B^{-1}}^t$. 由于 $B(p)=B^{-1}(p)=g(p)=I$, 故

$$\begin{aligned}d\tilde{g}(p)&=(dB^{-1})(p)+dg(p)+(d\overline{B^{-1}}^t)(p)\\&=-dB(p)+dg(p)-d\overline{B}^t(p)\\&=-\partial B(p)+\partial g(p)+\overline{\partial g}^t-\overline{\partial B}^t(p)\\&=0,\end{aligned}$$

最后一个等式是根据 (10.35), $\partial g(p)=\partial B(p)$.

另一方面, $\forall p\in M$, 存在局部全纯坐标 $\tilde{z}_1,\cdots,\tilde{z}_n$, 使得其对应的 Hermite 度量方阵满足 $dg(p)=0$, 则 $d\Phi(p)=\dfrac{\sqrt{-1}}{2}d\tilde{g}_{i\bar{j}}(p)d\tilde{z}^i\wedge d\bar{\tilde{z}}^j=0$. □

设 M 是一个 Hermite 流形, M 亦可看成 Riemann 流形, 称其为这个 Hermite 流形诱导的 Riemann 流形. Riemann 流形具有 Levi-Civita 联络 D^0. 一般的, Levi-Civita 联络和 Hermite 联络 D 并不一致. 设 $e=(e_1,\cdots,e_n)$ 是 $T^{1,0}(M)$ 的一个局部标架, $(\phi^1,\cdots,\phi^n)$ 是其对偶上标架. 即每个 $\phi^i;\ 1\leqslant i\leqslant n$ 是一个 $(1,0)$ 形式, 且 $\phi^i(e_j)=\delta_{ij};\ 1\leqslant i,j\leqslant n$. 则得到 Cartan 结构方程

$$\begin{cases}d\phi=\phi\wedge\omega+\tau,\\ \Omega=d\omega-\omega\wedge\omega,\end{cases}\tag{10.36}$$

这里 $\tau = (\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 是一个张量, 称 τ 为 Hermite 流形的**挠率形式**. 显然, τ 是一个 2-形式的张量. 通过一个标架变化 $\tilde{e}^t = Ae^t$, $\tilde{\phi} = \phi(A)^{-1}$, 相应的联络矩阵 $\tilde{\omega}$, 曲率矩阵 $\tilde{\Omega}$ 和挠率形式 $\tilde{\tau}$ 满足

$$\tilde{\omega} = A\omega A^{-1} + dAA^{-1}, \quad \tilde{\Omega} = A\Omega A^{-1}, \quad \tilde{\tau} = \tau A^{-1},$$

故 τ 的形式在标架变换下是不变的, 由于 e 是一全纯标架, 则 $d\phi$ 和 $\theta^t \wedge \phi$ 只包含 $(2,0)$ 形式, 故 τ 必然是由 $(2,0)$ 形式组成. $\tau = 0$ 等价于 M 是 Kähler 的, 设 $(z^1, \cdots, z^n)$ 是一个局部全纯坐标, $\left(\dfrac{\partial}{\partial z^1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial z^n}\right)^t$ 是一个标架, 其对偶上标架是 $(dz^1, \cdots, dz^n)$, 根据 (10.36) 的第一个方程

$$\tau_i = \omega_{ji} \wedge dz^j = (\partial g_{j\bar{l}} g^{\bar{l}i}) \wedge dz^j = \frac{\partial g_{j\bar{l}}}{\partial z^k} g^{\bar{l}i} dz^k \wedge dz^j.$$

$\tau_i = 0;\ 1 \leqslant i \leqslant n$ 等价于 $\dfrac{\partial g_{j\bar{l}}}{\partial z^k} = \dfrac{\partial g_{k\bar{i}}}{\partial z^j};\ 1 \leqslant i, k, l \leqslant n$, 证毕.

根据命题 10.7, 可知在 Kähler 流形的任意点上, Kähler 度量和 $\mathbf{C}^n$ 中的 Euclid 度量的局部差别是二阶无穷小, 故在适当的局部全纯坐标 $z^1, \cdots, z^n$ 下, $\forall p \in M$, $z^i(p) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$,

$$g(p) = I, \quad dg(p) = 0.$$

即 $\partial g(p) = \bar{\partial} g(p) = \bar{\partial} g^{-1}(p) = \partial g^{-1}(p) = 0$,

$$\Omega(p) = (\bar{\partial}\partial g)(0).$$

由命题 10.9 中的 (3), 存在实的 C^∞ 函数 ϕ 在 p 的局部邻域中, 使得

$$\Phi = i\partial\bar{\partial}\phi,$$

故

$$g_{l\bar{k}} = 2\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{z}^k \partial z^l}, \quad 1 \leqslant l, k \leqslant n.$$

因此

$$R_{\bar{i}j\bar{k}l} = 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial \bar{z}^i \partial z^j \partial \bar{z}^h \partial z^l}(0). \tag{10.37}$$

命题 10.10 当 M 是 Kähler 流形时, 有

$$R_{\bar{i}j\bar{k}l} = R_{\bar{k}j\bar{i}l} = R_{\bar{k}l\bar{i}j} = R_{\bar{i}lk\bar{j}},$$

$$\overline{R_{\bar{i}j\bar{k}l}} = R_{\bar{j}i\bar{l}k}.$$

命题 10.10 可根据 (10.37) 和张量等式不依赖于标架的选取得到, 因此其 Ricci 张量

$$R_{\bar{i}j} = R_{\bar{i}j\bar{k}l}g^{\bar{k}l} = R_{\bar{k}l\bar{i}j}g^{\bar{k}l} = \bar{\partial}_{\bar{i}}((\partial_j g_{l\bar{k}})g^{\bar{k}l}). \tag{10.38}$$

命题 10.11 $R_{\bar{i}j} = \partial_{\bar{i}}\partial_j \log\det g$.

证明: 设 $g = (g_{i\bar{j}})$, 用 $A_{i\bar{j}}$ 表示 $g_{i\bar{j}}$ 的余因子, 则 $\det g = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{i\bar{j}}A_{i\bar{j}}$.

$$\partial_j \log\det g = \det g_j^{-1}\partial_j g_{li}A_{li} = \partial_j g_{li}g^{il} = \Gamma^l_{lj}.$$

因此 $R_{ij} = R_{klij}g^{hl} = R^l_{lij} = \partial_l\Gamma^l_{lj}$.

(10.38) 仅在 Kähler 流形上成立, 在一般的 Hermite 流形上 Ricci 张量的定义为 $R_{\bar{i}j} = R_{\bar{k}l\bar{i}j}g^{\bar{k}l}$.

定义 10.12 $\forall\xi,\eta\in T_p^{1,0}(M)$.

全纯双截曲率为

$$R(\xi\wedge\eta) = -R_{\bar{i}j\bar{k}l}\bar{\xi^i}\xi^j\bar{\eta}^k\eta^l/\langle\xi,\xi\rangle_p\langle\eta,\eta\rangle_p, \tag{10.39}$$

这里 $\xi = \xi^i\dfrac{\partial}{\partial z^i}$, $\eta = \eta^i\dfrac{\partial}{\partial z^i}$ $R_{\bar{i}j\bar{k}l}$ 是在自然标架下的曲率张量 $\dfrac{\partial}{\partial z^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial z^n}$.

全纯截曲率是

$$R(\xi) = -R_{\bar{i}j\bar{k}l}(p)\bar{\xi^i}\xi^j\bar{\eta}^k\eta^l/\langle\xi,\xi\rangle_p^2. \tag{10.40}$$

Ricci 曲率是

$$Ric(\xi) = -R_{\bar{i}j}(p)\bar{\xi^i}\xi^j/\langle\xi,\xi\rangle_p. \tag{10.41}$$

在 $p\in M$ 处的**标量曲率为**

$$R = -R_{\bar{i}j}g^{\bar{i}j}. \tag{10.42}$$

$T^{1,0}(M)$ 是一个 Hermite 全纯切丛, 其几何性质与 Hermite 流形 M 本身密切相关.

设 (E,h) 是一个复流形 M 上的 Hermite 向量丛. 定义 E 的曲率形式如下: 假设 $u,v\in\Gamma(M,E)$, 定义 $(1,1)$ 形式

$$\Theta_{u\bar{v}} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{r}\Theta^\beta_\alpha h_{\beta\bar{\gamma}}u^\alpha\overline{v^\gamma},$$

这里 $u = \sum\limits_{\lambda=1}^{r}u^\alpha e_\lambda$, $v = \sum\limits_{\lambda=1}^{r}v^\lambda e_\lambda$, Θ^β_α 是 E 在标架 $(e_1,\cdots,e_r)$ 下的 Hermite 曲

率形式. 显然, $\Theta_{u\bar{v}}$ 不依赖于标架 e 的选取

$$\begin{aligned}\Theta h &= (\bar{\partial}\partial h \cdot h^{-1} + \partial h \cdot h^{-1}\bar{\partial} h \cdot h^{-1})h \\ &= \bar{\partial}\partial h + \partial h \cdot h^{-1}\bar{\partial} h,\end{aligned}$$

因此 $\Theta h + \overline{h\Theta}^t = 0$, 故 $\overline{\Theta_{u\bar{v}}} = -\Theta_{v\bar{u}}$. 对 $X, Y \in \Gamma(M, T^{1,0}(M))$,

$$R_{X\bar{Y}u\bar{v}} := \Theta_{u\bar{v}}(X, \bar{Y}).$$

则

$$\overline{R_{X\bar{Y}u\bar{v}}} = R_{Y\bar{X}v\bar{u}}.$$

□

当 $X \in T_p^{1,0}(M)$, $u \in E_p$, 且 $\langle X, X\rangle_p = 1 = \{u, u\}_p = 1$, 称 $R_{X\bar{X}u\bar{u}}$ 为 (E, h) 在 u 和 X 方向的曲率. (E, h) 称为**具有正曲率的**当且仅当 $R_{X\bar{X}u\bar{u}} > 0$, 对于 $\forall p \in M$, $u \in E_p$; 且 $u \neq 0$, $X \in T_p^{1,0}$ 且 $X \neq 0$.

下面在全纯向量丛中引入等价概念, 以后在第十二章中会用到.

定义 10.13 设 E 和 E' 是复流形 M 上的两个全纯向量丛, $m : E \longrightarrow E'$ 是一全纯映射, 满足

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{m} & E' \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi' \\ M & \xrightarrow{id} & M \end{array}$$

(1) 上图是一个交换图, 即 $m \mid E_x : E_x \longrightarrow E'_x$;

(2) $m \mid E_x : E_x \longrightarrow E'_x$ 是线性映射.

则称 m 是**全纯向量丛的丛映射**.

显然, 若 E, E' 和 E'' 都是 M 上的全纯向量丛, $m : E \longrightarrow E'$, $m_1 : E' \longrightarrow E''$ 分别是从 E 到 E', 从 E' 到 E'' 的全纯向量丛的丛映射, 则 $m_1 \circ m : E \longrightarrow E''$ 仍然是一个全纯向量丛的丛映射.

定义 10.14 设 E 和 E' 是复流形 M 上的两个全纯向量丛, $m : E \longrightarrow E'$, $m' : E' \longrightarrow E$ 是全纯向量丛的自同构, 若 $m' \circ m : E \longrightarrow E$ 和 $m \circ m' : E' \longrightarrow E'$ 分别是 E 和 E' 上的恒等映射, 则称 m (或 m') 是**全纯向量丛的自同构**.

定理 10.15 $m : E \longrightarrow E'$ 是一个全纯向量丛的自同构, 当且仅当存在 $q_\alpha : U_\alpha \longrightarrow GL(r, \mathbf{C})$, $\forall \alpha \in I$ 是全纯映射, 这里 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 E 和 E' 的公共平凡化邻域覆盖, 使得

$$\phi_{\alpha\beta} = q_\alpha \phi'_{\alpha\beta} q_\beta^{-1}. \tag{10.43}$$

$\{\phi_{\alpha\beta}\}$ 和 $\{\phi'_{\alpha\beta}\}$ 分别是 E 和 E' 的转换函数.

证明: 若 $m: E \longrightarrow E'$ 是一个全纯向量丛的自同构. $m: E_x \longrightarrow E'_x$ 是线性同构, $\forall x \in M$, 故 E 和 E' 的秩都等于 r. 不失一般性, 可取平凡邻域覆盖 $\{U_\alpha\}_{i\in I}$ 使得 $\bigcup\limits_{i\in I} U_\alpha = M$. 设 $e_1^\alpha, \cdots, e_r^\alpha$ 和 ${e'}_1^\alpha, \cdots, {e'}_r^\alpha$ 分别是 E 和 E' 在 U_α 上的典则局部标架, 则

$$m(e_i^\alpha) = \sum_{j=1}^r q_{ij}^{(\alpha)} {e'}_j^\alpha, \tag{10.44}$$

$m: E' \longrightarrow E$,

$$m'({e'}_j^\alpha) = \sum_j s_{jk}^{(\alpha)} e_k^\alpha.$$

根据向量丛的自同构, 有

$$q_{ij}^{(\alpha)} s_{jk}^{(\alpha)} = \delta_{ik}.$$

故矩阵 $q_\alpha = (q_{ij}^{(\alpha)})(s_\alpha = s_{ij}^{(\alpha)})$ 是非退化的, 且由于标架 $\{e_i^\alpha\}_{1\leqslant i\leqslant r}$ 和 $\{{e'}_i^\alpha\}_{1\leqslant i\leqslant r}$ 都是全纯的, 故 $q_\alpha: U_\alpha \longrightarrow GL(n, \mathbf{C})$ 是全纯的.

若 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, 则有

$$m\begin{pmatrix} e_1^\alpha \\ \vdots \\ e_r^\alpha \end{pmatrix} = q_\alpha \begin{pmatrix} {e'}_1^\alpha \\ \vdots \\ {e'}_r^\alpha \end{pmatrix} = q_\alpha \phi'_{\alpha\beta} \begin{pmatrix} e_1^{\beta'} \\ \vdots \\ e_r^{\beta'} \end{pmatrix}.$$

另一方面,

$$m\begin{pmatrix} e_1^\alpha \\ \vdots \\ e_r^\alpha \end{pmatrix} = m\left(\phi_{\alpha\beta}\begin{pmatrix} e_1^\beta \\ \vdots \\ e_r^\beta \end{pmatrix}\right) = \phi_{\alpha\beta} m \begin{pmatrix} e_1^\beta \\ \vdots \\ e_r^\beta \end{pmatrix} = \phi_{\alpha\beta} q_\beta \begin{pmatrix} {e'}_1^\beta \\ \vdots \\ {e'}_r^\beta \end{pmatrix}.$$

比较上面两个方程, 得到

$$\phi_{\alpha\beta} = q_\alpha \phi'_{\alpha\beta} q_\beta^{-1}.$$

反之, 若 E 和 E' 的秩都等于 r, 且 $q_\alpha: U_\alpha \longrightarrow GL(r, \mathbf{C})$ 全纯, $\forall \alpha \in I$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 E 和 E' 的一个开覆盖, 使得

$$\phi_{\alpha\beta} = q_\alpha \phi'_{\alpha\beta} q_\beta^{-1}.$$

则定义线性映射 $m: E \longrightarrow E'$ 为

$$m\begin{pmatrix} e_{\alpha,1} \\ \vdots \\ e_{\alpha,r} \end{pmatrix} = q_\alpha \begin{pmatrix} {e'}_{\alpha,1} \\ \vdots \\ {e'}_{\alpha,r} \end{pmatrix}.$$

显然 m 是全纯向量丛 E 到 E' 的丛映射. 等式 (10.43) 保证了 (10.44) 中的定义是合理的. 令

$$m'\begin{pmatrix} {e'}_{\alpha,1} \\ \vdots \\ {e'}_{\alpha,r} \end{pmatrix} = q_\alpha^{-1}\begin{pmatrix} e_{\alpha,1} \\ \vdots \\ e_{\alpha,r} \end{pmatrix},$$

则 m' 是一个全纯向量丛的丛映射, $m \circ m' = id_{E'}$, $m' \circ m = id_E$ 是显然的.

当 $r=1$, 设 L_1, L_2 是复流形 M 上的全纯线丛, $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 M 的开覆盖, 每一个 $U_\alpha; \alpha \in I$ 是 L_1 和 L_2 的公共的平凡化邻域. $\{\phi_{\alpha\beta}^{(1)}\}$ 和 $\{\phi_{\alpha\beta}^{(2)}\}$ 分别是其转换函数, 则 $\phi_{\alpha\beta}^{(i)} \in \Gamma(U_\alpha \cap U_\beta, \mathcal{O}^*); i = 1,2$.

在 $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ 上, 有 $\phi_{\alpha\beta}^{(i)}\ \phi_{\beta\gamma}^{(i)}\ \phi_{\gamma\alpha}^{(i)} = 1;\ i = 1,2$.

上述等式表明 $\phi^{(i)} = (\phi_{\alpha\beta}^{(i)}); i = 1,2$ 是 $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ 上的一个 1-闭链, 即 $\phi^{(i)} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*); i = 1,2$. 若 L_1 同构于 L_2, 根据定理, 存在全纯函数 $h_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}^*); \forall \alpha \in I$.

$$\phi_{\alpha\beta}^{(1)} = h_\alpha^{-1}\phi_{\alpha\beta}^{(2)}h_\beta; \quad 在\ U_\alpha \cap U_\beta\ 上.$$

即

$$\phi_{\alpha\beta}^{(1)}{\phi_{\alpha\beta}^{(2)}}^{-1} = h_\alpha^{-1}h_\beta; \quad 在\ U_\alpha \cap U_\beta\ 上.$$

等式表明 $h = (h_\alpha)_{\alpha \in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$, $\delta h = \phi^{(1)}{\phi^{(2)}}^{-1}$, 即 $\phi^{(1)} = (\phi_{\alpha\beta}^{(1)})$, $\phi^{(2)} = (\phi_{\alpha\beta}^{(2)})$ 可看成相对于覆盖 $\mathcal{U}$ 和系数 $\mathcal{O}^*$ 的 1-闭链, 则 $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ 属于 $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ 的同一等价类. 反之, $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ 中的每个元素是 M 上全纯线丛的等价类.

对每个复流形 M, 上同调群 $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ 是 $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ 的直接极限, 即

$$H^1(M, \mathcal{O}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*).$$

上述直接极限是对 M 的所有开覆盖取的, 故 $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ 中的每个元素一定在某个 $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}^*)$ 中具有一个表示元素. 因此 $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ 中的每个元素也都是 M 上全纯线丛的等价类.

第十一章 Hodge 定理

本章的主要内容是证明 Hodge 定理. 我们将在 E 值的微分形式上引入内积和 Sobolev 范数, 再用泛函的方法来进行证明. 在本章最后, 我们还给出了 Gärding 不等式、Sobolev 引理和 Rellich 定理的证明方法, 它们在证明 Hodge 定理的过程中起到了关键作用.

§11.1 Hodge 定理

设 M 是一个 n 维复流形, 其 Hermite 度量为 $ds^2 = g_{i\bar{j}}dz^i \otimes d\bar{z}^j$. 相应的 Kähler 形式 $\Phi = \frac{\sqrt{-1}}{2}g_{i\bar{j}}dz^i \otimes d\bar{z}^j$ 是一个实的 (1, 1) 形式, 它的体积形式为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\Phi^n &= \frac{1}{n!}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n g_{i_1,\bar{j}_1}\cdots g_{i_n,\bar{j}_n} dz^{i_1}\wedge d\bar{z}^{j_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_n}\wedge d\bar{z}^{j_n}\\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n g_{i_1,\bar{j}_1}\cdots g_{i_n,\bar{j}_n}\delta_{i_1,\cdots,i_n}\delta_{j_1,\cdots,j_n} dz^1\wedge d\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge dz^n\wedge d\bar{z}^n\\
&= \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n g_{1,\bar{j}_1}\cdots g_{n,\bar{j}_n}\delta_{j_1,\cdots,j_n} dz^1\wedge d\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge dz^n\wedge d\bar{z}^n\\
&= \left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \det g\, dz^1\wedge d\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge dz^n\wedge d\bar{z}^n\\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \det g\, dz^1\wedge\cdots\wedge dz^n\wedge d\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^n\\
&= \det g\, dx^1\wedge dy^1\wedge\cdots\wedge dx^n\wedge dy^n\\
&= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \det g\, dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n\wedge dy^1\wedge\cdots\wedge dy^{n-1}\wedge dy^n. \quad (11.1)
\end{aligned}$$

容易验证该体积形式 $\frac{1}{n!}\Phi^n$ 是标量, 即不依赖于局部全纯坐标的选取. 这里 $\delta_{i_1,\cdots,i_n}=\delta^{1,\cdots,n}_{i_1,\cdots,i_n}$ 是多广义 Kronecker 符号, 即

$$\delta^{l_1,\cdots,l_k}_{i_1,\cdots,i_k}=\begin{cases}1, & \text{当 } l_1,\cdots,l_k \text{ 是 } i_1,\cdots,i_k \text{ 的偶置换时},\\ -1, & \text{当 } l_1,\cdots,l_k \text{ 是 } i_1,\cdots,i_k \text{ 的奇置换时},\\ 0, & \text{其他情况}.\end{cases}$$

我们现在将内积延拓至 $\varepsilon^{p,q}(M)$. 设 $\xi,\eta\in\varepsilon^{p,q}(M)$,

$$\begin{aligned}\xi&=\frac{1}{p!q!}a_{i_1\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_p}\wedge d\bar{z}^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{j_q}\\&=\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_p\\ j_1<\cdots<j_q}}a_{i_1\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_p}\wedge d\bar{z}^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{j_q}\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\eta&=\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_p\\ j_1<\cdots<j_q}}b_{i_1\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_p}\wedge d\bar{z}^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{j_q}\\&=\frac{1}{p!q!}b_{i_1\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}dz^{i_1}\wedge\cdots\wedge dz^{i_p}\wedge d\bar{z}^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{j_q}\end{aligned}$$

是 ξ 和 η 在坐标 $z^1,\cdots,z^n$ 下的表示, 对 $\forall x\in M$, 我们定义在点 x 的 Hermite 内积为

$$\begin{aligned}\langle\xi,\eta\rangle_x=&\frac{1}{p!q!}a_{i_1\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}(x)g^{\bar{j}_1s_1}(x)\cdots g^{\bar{j}_qs_q}(x)g^{\bar{t}_1i_1}(x)\cdots g^{\bar{t}_pi_p}(x)\\&\cdot\overline{b_{t_1,\cdots,t_p,\bar{s}_1,\cdots,\bar{s}_q}(x)},\end{aligned}\tag{11.2}$$

这里 $g^{\bar{j}s}$ 是度量矩阵 g 的逆矩阵 g^{-1} 中的元素.

为简便起见, 我们用 $a_{I_p\bar{J}_q}$ 来表示 $a_{i_1\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}$, $g^{\bar{J}_qS_q}$ 来表示 $g^{\bar{j}_1s_1}\cdots g^{\bar{j}_qs_q}$, 故 (11.2) 可重新写成

$$\langle\xi,\eta\rangle_x=\frac{1}{p!q!}a_{I_p\bar{J}_q}(x)g^{\bar{J}_qS_q}(x)g^{\bar{T}_pI_p}(x)\overline{b_{T_p\bar{S}_q}(x)}.\tag{11.3}$$

有时, 又用 $\xi_{I_p\bar{J}_q}$ 和 $\xi^{\bar{I}_pJ_q}$ 来分别表示系数 $a_{I_p\bar{J}_q}$ 和 $g^{\bar{I}_pS_p}g^{\bar{T}_qJ_q}a_{S_p\bar{J}_q}$.

由 (11.2) 容易验证

$$\overline{\langle\omega,\eta\rangle}_x=\langle\eta,\omega\rangle_x.$$

且若 $\xi_1,\xi_2,\eta\in\varepsilon^{p,q}(M)$,

$$\langle\xi_1+\xi_2,\eta\rangle_x=\langle\xi_1,\eta\rangle_x+\langle\xi_2,\eta\rangle_x;$$

若 $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$\langle \lambda\xi, \eta\rangle_x = \lambda\langle \xi, \eta\rangle_x.$$

(11.2) 表明 $\langle \xi, \eta\rangle_x$ 是标量, 故其不依赖于局部全纯坐标的选取. 故可以选取一个全纯坐标使得 $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$, 则 $g^{\bar{j}i}(x) = \delta_{i\bar{j}}$, 故

$$\langle \xi, \eta\rangle_x = \frac{1}{p!q!} a_{I_p \bar{J}_q}(x)\overline{b_{I_p \bar{J}_q}(x)}.$$

特别的,

$$\langle \xi, \xi\rangle_x = \frac{1}{p!q!} \sum_{I_p, J_q} |a_{I_p \bar{J}_q}(x)|^2 \geqslant 0.$$

等式只在 $\xi(x) = 0$ 时成立, 故 (11.2) 确实是 $\varepsilon_x^{p,q}(M)$ 上的一个 Hermite 内积.

设 M 是 Hermite 流形, 度量 $ds^2 = g_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$. E 是关于 Hermite 度量 h 的秩为 r 的 Hermite 向量丛, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 E 的平凡邻域, 那么在 U_α 上存在 E 的全纯标架 $\{e_{\alpha,\lambda}\}_{1\leqslant\lambda\leqslant r}$, 使得对任意的 $\xi \in \Gamma(M, \varepsilon^{p,q}(E))$, 其在 U_α 上有局部表示

$$\xi = \sum_{\lambda=1}^{r} \xi^\lambda \otimes e_{\alpha,\lambda},$$

这里 $\xi^\lambda \in \Gamma(M, \varepsilon^{p,q}(M)), 1 \leqslant \lambda \leqslant r$; 设 $\xi, \eta \in \Gamma(M, \varepsilon^{p,q}(M))$, 对 $\forall x \in U_\alpha$, 其在 U_α 上的局部表示为 $\xi = \sum\limits_{\lambda=1}^{r} \xi^\lambda \otimes e_{\alpha,\lambda}$ 和 $\eta = \sum\limits_{\mu=1}^{r} \eta^\mu \otimes e_{\alpha,\mu}$. 故我们可引入内积

$$\langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_x := \sum_{\lambda,\mu=1}^{r} \langle \xi^\lambda, \eta^\mu\rangle_x \{e_{\alpha,\lambda}, e_{\alpha,\mu}\}_x = \sum_{\lambda,\mu=1}^{r} \langle \xi^\lambda, \eta^\mu\rangle_x h^{(\alpha)}_{\lambda\bar{\mu}}(x). \tag{11.4}$$

通过直接验证, 可知 $\langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle_x$ 是一个 Hermite 内积. 进一步, 可以定义整体的内积

$$(\xi, \eta) = \int_M \langle\langle \xi, \eta\rangle\rangle dv = \int_M \sum_{\lambda,\mu=1}^{n} \langle \xi^\lambda, \eta^\mu\rangle h^{(\alpha)}_{\lambda\bar{\mu}} dv, \tag{11.5}$$

这里 dv 是 Hermite 流形的体积形式. 为简便起见, 记

$$dv = \frac{2^n}{n!}\Phi^n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sqrt{-1}^n \det\ g\, dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^n.$$

当然 (11.5) 仅在 $|(\xi, \eta)| < +\infty$ 的情形下有意义, 比如 M 是紧的, 或 ξ 或 η 具有紧支集. 从今往后, 我们就只讨论 M 是紧复流形和 $p = 0$ 的情形. $\Gamma(M, \varepsilon^{0,q}(E))$ 被赋予了内积 (11.5) 后, 形成一个内积空间. 为应用 Hilbert 空间理论, 还需将 $\Gamma(M, \varepsilon^{0,q}(E))$ 完备化, 即考虑 M 上的 E 值 $L^2(0, q)$ 形式, 并用

$\Gamma(M,L_2^{(0,q)}(E))$ 表示所有 E 值 $L^2(0,q)$ 形式的全体. 对每个 $\eta\in\Gamma(M,L_2^{(0,q)}(E))$, η 在标架 $\{e_{\alpha,\lambda}\}_{1\leqslant\lambda\leqslant r}$ 具有局部表示

$$\eta=\sum_{\lambda=1}^{r}\eta^{\lambda}e_{\alpha\lambda},$$

这里 η^{λ} $(1\leqslant\lambda\leqslant r)$, 是 M 上的 $L^2(0,q)$ 形式, 即

$$\int_M\langle\eta^{\lambda},\eta^{\lambda}\rangle dv<+\infty,\quad 1\leqslant\lambda\leqslant r.$$

为简便起见, 用 $L_2^{(0,q)}(E)$ 表示 $\Gamma(M,L_2^{(0,q)}(E))$.

现在考虑

$$L_2^{(0,q-1)}(E)\xrightarrow{\bar\partial}L_2^{(0,q)}(E)\xrightarrow{\bar\partial}L_2^{(0,q+1)}(E),\tag{11.6}$$

上面的三个空间都是 Hilbert 空间, 且 $\Gamma(M,\varepsilon^{0,k}(E))$, $k=q-1,q,q+1$ 分别是 $L_2^{(0,k)}(E)$, $k=q-1,q,q+1$ 的稠密子空间. $\bar\partial:\Gamma(M,\varepsilon^{0,k}(E))\longrightarrow\Gamma(M,\varepsilon^{0,k+1}(E))$ 是有意义的. 考虑从 $L_2^{(0,k)}(E)$ 到 $L_2^{(0,k+1)}(E)$ 的 $\bar\partial$ 算子的闭延拓, 且仍用 $\bar\partial$ 表示延拓后的算子. 因此, $\bar\partial$ 是 (11.6) 中的一个 **稠定的闭算子**. $\bar\partial^*:L^{(0,k)}(E)\longrightarrow L^{(0,k-1)}(E)$ 是 $\bar\partial$ 的自共轭算子, 根据其定义, 若 $\eta\in L^{(0,k)}(E)$, $\xi\in L^{(0,k-1)}(E)$ 使得

$$(\bar\partial\psi,\eta)=(\psi,\xi),\quad 对\quad\forall\psi\in\Gamma(M,\varepsilon^{0,k-1}(E)),\tag{11.7}$$

则 $\eta\in\mathrm{Dom}\,\bar\partial^*$ 且 $\bar\partial^*\eta=\xi$. 事实上, (11.7) 仅须在 $\mathrm{Dom}\,\bar\partial$ 的一个稠密集上成立即可. 一个闭算子的自共轭算子也是一个闭算子, 故 $\bar\partial^*$ 是一个稠定的闭的线性算子.

定义 11.1 **调和算子**表示为

$$\Box=\bar\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\bar\partial,$$

$$\Box:L^{(0,q)}(E)\longrightarrow L^{(0,q)}(E).$$

显然

$$(\Box\eta,\eta)=(\bar\partial\bar\partial^*\eta+\bar\partial^*\bar\partial\eta,\eta)=(\bar\partial^*\eta,\bar\partial^*\eta)+(\bar\partial\eta,\bar\partial\eta).$$

定义 11.2 **调和形式** $\eta\in L^{(0,q)}(E)$, 当且仅当 $\Box\eta=0$.

由 $(\Box\eta,\eta)=(\bar\partial^*\eta,\bar\partial\eta)+(\bar\partial\eta,\bar\partial\eta)$, 知 $\Box\eta=0$ 等价于 $\bar\partial^*\eta=0=\bar\partial\eta$.

Hodge 定理的意思是任何调和形式都是光滑的, 即每个调和形式都属于 $\Gamma(M,\varepsilon^{0,\cdot}(E))$. 若用 $\mathcal{H}^{(0,q)}(M,E)$ 表示所有 E 值的调和 $(0,q)$ 形式全体所组成的空间, 则 $\mathcal{H}^{(0,q)}(M,E)\cong H^{(0,q)}(M,E)$.

由于 M 是紧的, 其每个开覆盖具有一个有限子覆盖, 故总是存在 M 上的有限开覆盖以及从属于该覆盖的单位分解, 并假定每个有限开覆盖中的开集包含于 E 的某个平凡化邻域中. 应用单位分解定理, 还可假定所有的形式、函数等都在相应的坐标邻域中具有紧支集, 所以不加说明的话, 我们将只在坐标邻域 G 中进行讨论, 这里 G 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 中的有界区域.

我们首先引入一些定义.

令 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{2n}),\alpha_i$ 是非负整数.

$$|\alpha|:=\sum_{i=1}^{2n}\alpha_i,$$

$$\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_{2n}^{\alpha_{2n}},\quad \partial_i=\frac{\partial}{\partial x^i},\quad 1\leqslant i\leqslant 2n,$$

$$W_s^{(0,q)}=\{\phi=\phi_{i_1\cdots i_q}d\bar{z}^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{i_q}\mid \phi_{i_1\cdots i_q}\text{ 在分布意义下具有直至 } s \text{ 阶导数}, s\geqslant 0\}.$$

$\forall\phi\in A^{(0,q)}$; $A^{(0,q)}$ 是所有 C^∞ 的在 G 中具有紧支集的 E 值 $(0,q)$ 形式全体所组成的空间.

$$\|\phi\|_s^2:=\sum_{|\alpha|\leqslant s}\|\partial^\alpha\phi\|_0^2, \tag{11.8}$$

这里 $\|\cdot\|_0$ 是通常 L^2 范数. 那么根据 **Sobolev 空间** 中的一些基本的定理, $W_s^{(0,q)}$ 是 $A^{(0,q)}$ 在 $\|\cdot\|_s$ 范数下的完备化. 在 (11.8) 中, $\partial^\alpha\phi$ 不是张量, 或者说 $\partial^\alpha\phi$ 的系数不是张量. 一般的,

$$D\phi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\phi}{\partial z^i}dz^i+\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}^i}d\bar{z}^i+X\cdot\phi,$$

这里 D 是 M 的 Hermite 联络, X 是一个乘法算子, 它包含与联络有关的量. 由于 ϕ 具有紧支集, 故 X 在 G 上有界, 则

$$\sum_{|\alpha|\leqslant s}|\partial^\alpha\phi|^2\leqslant C\sum_{k\leqslant s}\langle D^k\phi,D^k\phi\rangle\leqslant C'\sum_{|\alpha|\leqslant s}|\partial^\alpha\phi|^2,$$

这里 D^k 是 k 次协变导数. 因此 $\|\phi\|_s^2$ 等价于

$$\sum_{k\leqslant s}\int_G\langle D^k\phi,D^k\phi\rangle d\sigma, \tag{11.9}$$

这里 $d\sigma$ 是 M 限制在局部坐标邻域 G 上的体积形式, D^k 是关于局部坐标 $z^1\cdots z^n$ 的 k 次协变导数.

定义 11.3 $\forall\phi\in W_s^{(0,q)}$, **Dirichlet 范数**定义为

$$\mathcal{D}(\phi,\phi)=(\phi,\phi)+(\bar\partial\phi,\bar\partial\phi)+(\bar\partial^*\phi,\bar\partial^*\phi)=(\phi,(I+\Box)\phi). \tag{11.10}$$

命题 11.4 若 $\phi\in A^{(0,q)}$, 则

$$\mathcal{D}(\phi,\phi)\leqslant \text{const}\|\phi\|_1,\quad \forall\phi\in A^{(0,q)}. \tag{11.11}$$

由于 $W_1^{(0,q)}$ 是 $A^{(0,q)}$ 关于 $\|\cdot\|_1$ 范数的完备化, 故 (11.11) 对 $\forall\phi\in W_1^{(0,q)}$ 也成立. (11.11) 的证明将在后面给出.

为证明 Hodge 定理, 还需要如下三个引理.

(1) **Rellich 引理**

设 $s,t\in\mathbf{Z}$, $s>t$, 则内射 $i:W_s^{(0,q)}\longrightarrow W_t^{(0,q)}$ 是紧算子.

(2) **Soblev 引理**

对 $\forall\phi\in W_{s+t}^{(0,q)}$, 若 $t>\left[\dfrac{N}{2}\right]$, 则 ϕ 是 M 上的 s 阶可微函数, 这里 $N=\dim_R M$.

(3) **Gärding 不等式**

存在常数 c 使得

$$\|\phi\|_1^2\leqslant c\mathcal{D}(\phi,\phi),\quad \forall\phi\in A^{(0,q)}. \tag{11.12}$$

由 (11.11) 和 (11.12) 可知, $\|\cdot\|_1$ 和 Dirichlet 范数在 $A^{(0,q)}$ 上是等价的, 且 $W_1^{(0,q)}$ 是 $A^{(0,q)}$ 关于 $\|\cdot\|_1$ 范数的完备化, 故 $\|\cdot\|_1$ 和 Dirichlet 范数在 $W_1^{(0,q)}$ 上是等价的. 因此

$$\mathcal{D}(\phi,\psi)=(\phi,\psi)+(\partial\phi,\partial\psi)+(\bar\partial^*\phi,\bar\partial^*\psi)$$

可看成 $W_1^{(0,q)}$ 上的内积, 而 $W_1^{(0,q)}$ 关于这个内积仍是一个 Hilbert 空间.

根据前面的说明, 在每个局部坐标邻域上, Rellich 引理, Soblev 引理和 Gärding 不等式都成立, 故其在整个紧复流形上也成立.

引理 11.5 设 $\phi\in L^{(0,q)}(E)=W_0^{(0,q)}$, 则存在 $\psi\in W_1^{(0,q)}$ 使得

$$(\phi,\eta)=D(\psi,\eta),\quad \forall\eta\in A^{(0,q)}.$$

令 $\psi=T\phi$, 则

$$T:W_0^{(0,q)}\longrightarrow W_1^{(0,q)}$$

是有界自共轭算子.

证明: 考虑有界泛函

$$\lambda : \eta \longrightarrow (\phi, \eta), \quad \forall \eta \in A^{(0,q)}.$$

由于

$$|(\phi, \eta)| \leqslant \|\phi\|_0 \|\eta\|_0 \leqslant \|\phi\|_0 \mathcal{D}(\eta, \eta)^{\frac{1}{2}},$$

$W_1^{(0,q)}$ 是 $A^{(0,q)}$ 关于 $\|\cdot\|_1$ 范数的完备化, 根据 **Hahn-Banach 定理**, λ 可以延拓至 $W_1^{(0,q)}$, 且仍用 λ 表示延拓后的泛函. 在 $W_1^{(0,q)}$ 上作用 Dirichlet 内积, 根据 Reisz 表示定理, 存在唯一的 $\psi \in W_1^{(0,q)}$ 使得

$$\mathcal{D}(\psi, \eta) = (\phi, \eta), \quad \forall \eta \in A^{(0,q)}.$$

令 $\psi = T\phi$, 则

$$\mathcal{D}(T\phi, \eta) = ((I + \Box)T\phi, \eta) = (\phi, \eta), \quad \forall \eta \in A^{(0,q)}.$$

故

$$(I + \Box)T\phi = \phi, \quad \forall \phi \in W_0^{(0,q)},$$

即

$$T = (I + \Box)^{-1}.$$

现在证明 T 有界.

$$|\mathcal{D}(T\phi, \eta)| = |(\phi, \eta)| \leqslant \|\phi\|_0 \|\eta\|_0 \leqslant \|\phi\|_0 D(\eta, \eta)^{\frac{1}{2}}.$$

取 $\eta = T\phi$, 则

$$|\mathcal{D}(T\phi, T\phi)| \leqslant \|\phi\|_0 \mathcal{D}(T\phi, T\phi)^{\frac{1}{2}},$$

因此

$$|\mathcal{D}(T\phi, T\phi)|^{\frac{1}{2}} \leqslant \|\phi\|_0.$$

应用 Gärding 不等式, 得到 $\|T\phi\|_1 \leqslant c\|\phi\|_0$, 这里 c 是一个常数, 故 T 是一个有界算子, 验证 T 是自共轭算子.

观察如下序列

$$W_0^{(0,q)} \xrightarrow{T} W_1^{(0,q)} \xrightarrow{i} W_0^{(0,q)}. \tag{11.13}$$

在 (11.13) 中, 根据 Rellich 定理可证明恒等算子 i 是紧算子, T 是有界算子, 故 $i \circ T : W_0^{(0,q)} \longrightarrow W_0^{(0,q)}$ 仍是紧算子.

根据 Hilbert 空间中一般紧算子的谱分解理论, 算子 $i \circ T$ 在 Hilbert 空间中具有谱分解, 即

$$L^{(0,q)}(E) := W_0^{(0,q)} = \oplus A_\lambda, \tag{11.14}$$

这里 A_λ 是特征值为 λ 的特征子空间, 即

$$A_\lambda = \{\phi \in L^{(0,q)}(E) \mid (i \circ T)\phi = \lambda\phi\}. \tag{11.15}$$

显然的, $A_\lambda \subset W_0^{(0,q)}$.

由于 $(\Box\phi, \phi) \geqslant 0$, 故 $((I+\Box)\phi, \phi) \geqslant (\phi, \phi)$, 因此 $I+\Box$ 的谱大于或等于 1, $T = (I+\Box)^{-1}$, 故 T 的谱小于或等于 1, 即

$$\operatorname{Spec} T = \left\{ \frac{1}{\lambda} \middle| \lambda \in \operatorname{Spec}(I+\Box) \right\} \subset [0,1].$$

由于 $\phi \in A_\lambda$, 则 $T\phi = \lambda\phi$, $(I+\Box)T\phi = (I+\Box)\lambda\phi = \phi$, 故 $\phi = \lambda\phi + \lambda\Box\phi$; 即

$$\Box\phi = \frac{1-\lambda}{\lambda}\phi.$$

令 $\mu := \dfrac{1-\lambda}{\lambda}$, 则 $\lambda = \dfrac{1}{\mu+1}$,

$$B_\mu := \{\phi \mid \Box\phi = \mu\phi\}, \quad \mu \in [0, \infty).$$

根据 (11.14), 得

$$L^{(0,q)}(E) = \oplus B_\mu.$$

根据 Hilbert 空间中正规紧算子的谱分解定理, Spec T 在 [0,1] 上不存在聚点, 且对 $\forall\lambda \in \operatorname{Spec} T(\mu \subset \operatorname{Spec} \Box)$, $A_\lambda(B_\mu)$ 是有限维空间, 特别的,

$$\dim_C B_0 < +\infty.$$

$\Box$

我们现在将证明正则性定理, 即 B_0 中所有元素都是 C^∞ 的.

定义 11.6 设 $\phi, \psi \in L^{(0,q)}(E) = W_0^{(0,q)}$, 称 ϕ 是

$$\Box\phi = \psi$$

的弱解, 若对 $\forall\eta \in A^{(0,q)}$,

$$(\phi, \Box\eta) = (\psi, \eta). \tag{11.16}$$

命题 11.7 令 $\phi, \psi \in W_s^{(0,q)}$, $\Box\psi = \phi$ (弱解), 则 $\psi \in W_{s+2}^{(0,q)}$.

证明: 不妨假定 ϕ, ψ 在 $\mathbf{R}^{2n}$ 的坐标邻域 G 上具有紧支集, 则

$$\Box = (\bar\partial + \bar\partial^*)^2 = P^2,$$

$$Pu = Qu + Ru,$$

$$(Qu)_A=\sum_B\sum_k a^k_{AB}\frac{\partial u_B}{\partial x^k};\quad 1\leqslant A,B\leqslant\binom{n}{q},\quad 1\leqslant k\leqslant 2n,$$

$$(Ru)_A=\sum_B b_{AB}u_B,\quad a^k_{AB},b_{AB}\in C_0^\infty(G),$$

利用 Gärding 不等式及 $\|\cdot\|_0$ 与 $\|\cdot\|_1$ 的等价性, 得

$$\alpha\|Pu\|_0+\beta\|u\|_0\geqslant\|u\|_1,\quad \forall u\in A^{(0,q)}. \tag{11.17}$$

我们要证明: 若 $u,v\in W_s^{(0,q)}$, 使得 $Pu=v$ (弱解), 则 $u\in W_{s+1}^{(0,q)}$.

与之前在第三章中讨论 L^2 估计时一样, 这里将用到 Friedrich 的光滑化技巧. 令 $\chi(x)=\chi([x])$ 表示在 $\mathbf{R}^N$ 上的闭球 $\overline{B(0,1)}$ 中具有紧支集的 C^∞ 函数, 使得 $\int_{\mathbf{R}^n}\chi(x)dx=1$, 令

$$\chi_\epsilon(x)=\frac{1}{\epsilon^N}\chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

则其具有如下性质:

(1) $\forall u\in L^2$, $u_\epsilon:=\chi_\epsilon*u$ 是 C^∞ 的.

(2) $\forall u\in L^2$,

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(u_\epsilon)=\frac{\partial\chi_\epsilon}{\partial x^k}*u=\chi_\epsilon*\frac{\partial u}{\partial x^k}.$$

最后一个等式成立, 是因为 $\dfrac{\partial u}{\partial x^k}$ 在分布意义下存在.

(3) $\forall u\in L^2$. $\lim\limits_{\epsilon\longrightarrow 0}\|u-u_\epsilon\|=0$. 特别的, 若 $u\in W_s$, 则 $\lim\limits_{\epsilon\longrightarrow 0}\|u-u_\epsilon\|_s=0$.

下面, 我们将证明: 若 $u,v\in W_s^{(0,q)}(E)$ 且 $Pu=v$, 则 $u\in W_{s+1}^{(0,q)}(E)$. 事实上, 只需证明 $\|\chi_\epsilon*u\|_{s+1}=\|u_\epsilon\|_{s+1}$ 对任意足够小的 ϵ 是一致有界的. 由于 u_ϵ 是具有紧支集的 E 值光滑 $(0,q)$ 形式, 故 $u_\epsilon\in W_{s+1}^{(0,q)}$. 由于 Hilbert 空间中任意有界集必包含一个弱收敛子列, 故存在弱收敛于 $u'\in W_{s+1}^{(0,q)}$ 的子列 $\{u_{\epsilon_i}\}$. 另一方面, 当 $\epsilon_i\to 0$, $\|u_{\epsilon_i}-u\|_s\longrightarrow 0$, 因此 $u=u'\in W_{s+1}^{(0,q)}$,

$$\begin{aligned}\|u_\epsilon\|_{s+1}&=\|u_\epsilon\|_s+\|\partial^{s+1}u_\epsilon\|_0\leqslant\|u_\epsilon\|_s+\|\partial^s u_\epsilon\|_1\\&\leqslant\|u_\epsilon\|_s+c_1\|P\partial^s u_\epsilon\|_0+c_2\|\partial^s u_\epsilon\|_0\\&\leqslant c_1\|Q\partial^s u_\epsilon\|_0+c_3\|u_\epsilon\|_s,\end{aligned}\tag{11.18}$$

这里 c_1,c_2,c_3 是正的常数, 且 $\|u_\epsilon\|_s$ 有界, (11.18) 中第二个不等式可由 Gärding 不等式得到. 所以

$$\begin{aligned}\|Q\partial^s u_\epsilon\|_0&\leqslant c_4\|Qu_\epsilon\|_s+c_5\|u_\epsilon\|_s\\&\leqslant c_4\|Qu_\epsilon-(Qu)_\epsilon\|_s+c_4\|(Qu)_\epsilon\|_s+c_5\|u_\epsilon\|_s\end{aligned}$$

$$\leqslant c_4\|Qu_\epsilon-(Qu)_\epsilon\|_s+c_4\|(Pu)_\epsilon\|_s+c_6\|u_\epsilon\|_s$$

$$=c_4\|Qu_\epsilon-(Qu)_\epsilon\|_s+c_4\|v_\epsilon\|_s+c_6\|u_\epsilon\|_s,$$

这里 c_4,c_5,c_6 是正的常数, $\|v_\epsilon\|_s$, $\|u_\epsilon\|_s$ 是有界的, 故只需再验证对任意足够小的 ϵ, $\|Qu_\epsilon-(Qu)_\epsilon\|_s$ 是一致有界的.

$Qu_\epsilon-(Qu)_\epsilon$ 的第 A 个分量是

$$\sum_B\sum_k a^k_{AB}\partial_k(u_B)_\epsilon-\chi_\epsilon*\sum_B\sum_k a^k_{AB}\partial_k u_B$$

$$=\sum_B\sum_k(a^k_{AB}\partial_k(u_B)_\epsilon)-\chi_\epsilon*(a^k_{AB}\partial_k u_B)).$$

若固定 B,k, 且可以证明对任意小的 ϵ, 右边等式求和项中的每个元素的 L^2 范数都是一致有界的, 那么我们的证明就完成了. 而若要证明对任意小的 ϵ, $\|Qu_\epsilon-(Qu)_\epsilon\|_s$ 都是一致有界的, 只需验证对固定的 A,B,k 和任意小的 ϵ, $\|a^k_{AB}\partial_k(u_B)_\epsilon-\chi_\epsilon*(a^k_{AB}\partial_k u_B)\|_s$ 都是一致有界的即可. □

命题 11.8 令 $u\in W_s(G)$ 满足 $\mathrm{Supp}\,u\subset\subset G$ 且 $a\in C_0^\infty(G)$, 则

$$\left\|a\frac{\partial}{\partial x^i}u_\epsilon-\left(a\frac{\partial u}{\partial x^i}\right)_\epsilon\right\|_s\leqslant\mathrm{const}\,\|u\|_s.$$

证明: 为简便起见, 设 $G=\mathbf{R}^{2n}$, $u\in W_s(\mathbf{R}^{2n})$, $a\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$,

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x^i}u_\epsilon\right)(x)=a(x)\int_{\mathbf{R}^{2n}}\frac{\partial}{\partial x^i}u(x-\epsilon y)\chi(y)d\sigma_y,$$

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x^i}u\right)_\epsilon(x)=\int_{\mathbf{R}^{2n}}a(x-\epsilon y)\frac{\partial}{\partial x^i}u(x-\epsilon y)\chi(y)d\sigma_y,$$

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x^i}u_\epsilon\right)(x)-\left(a\frac{\partial}{\partial x^i}u\right)_\epsilon(x)=\int_{\mathbf{R}^{2n}}(a(x)-a(x-\epsilon y))\frac{\partial}{\partial x^i}u(x-\epsilon y)\chi(y)dy$$

$$=-\int_{\mathbf{R}^{2n}}(a(x)-a(x-\epsilon y))\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial y^i}u(x-\epsilon y)\chi(y)dy$$

$$=\int_{\mathbf{R}^{2n}}\frac{1}{\epsilon}\frac{\partial}{\partial y^i}(a(x)-a(x-\epsilon y))u(x-\epsilon y)\chi(y)dy$$

$$+\int_{\mathbf{R}^{2n}}\frac{1}{\epsilon}(a(x)-a(x-\epsilon y))u(x-\epsilon y)\frac{\partial}{\partial y^i}\chi(y)dy.$$

由于 $a\in C_0^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, 故存在正的 $\alpha>0$ 和足够小的 $\epsilon_0>0$, 使得 $|\mathrm{grad}\ a|<\alpha$. 且任意的正数 $\epsilon\leqslant\epsilon_0$, 都有 $|a(x)-a(x-\epsilon y)|<\alpha\epsilon|y|$, 这里 $|y|<1$. 另一方面,

$\left|\dfrac{\partial}{\partial y^i}a(x-\epsilon y)\right| \leqslant \epsilon\alpha$, 令 $\beta = \max\limits_{|y|\leqslant 1}\{|\chi(y)| \mid \mathrm{grad}\,\chi(y)\}$, 则

$$\left|a\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_c}(x) - \left(a\frac{\partial u}{\partial x^c}\right)_\epsilon(x)\right|^2 \leqslant \left(\int_{|y|\leqslant 1} 2\alpha\beta(u(x-\epsilon(y)))d\sigma_y\right)^2$$
$$\leqslant 4\alpha^2\beta^2\,\mathrm{Vol}(B(0,1))\int_{|y|\leqslant 1}|u(x-\epsilon y)|^2 d\sigma_y,$$

$$\left\|a\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x^i} - \left(a\frac{\partial u}{\partial x^i}\right)_\epsilon\right\|_0^2 \leqslant 4\alpha^2\beta^2\,\mathrm{Vol}(B(0,1))\int_{\mathbf{R}^n}\int_{|y|\leqslant 1}|u(x-\epsilon y)|^2 d\sigma_y d\sigma_x$$
$$\leqslant 4\alpha^2\beta^2\,\mathrm{Vol}\,(B(0,1))^2\|u\|_0^2,$$

这里 $\mathrm{Vol}(B(0,1))$ 是 $\mathbf{R}^{2n}$ 中球 $B(0,1)$ 的体积. 上面不等式表明若 $\epsilon < \epsilon_0$, 则 $\|u_\epsilon\|_1 < (2\alpha\beta\mathrm{Vol}\,B(0,1))\|u\|_0$. 故对任意 $\epsilon \leqslant \epsilon_0$, $\|u_\epsilon\|_1$ 是一致有界的.

由于 $u \in W_s(\mathbf{R}^{2n})$, 则当 $|k| \leqslant s$ 时, $\partial^k u \in W_0(\mathbf{R}^{2n})$. 由上面的论证,

$$\|(\partial^k u)_\epsilon\|_1 \leqslant \mathrm{const}\;\|\partial^k u\|_0$$

对任意小的 ϵ 都成立. 另一方面, $(\partial^k u)_\epsilon = \partial^k(u_\epsilon)$ 且

$$\|u_\epsilon\|_{s+1} = \sum_{|k|\leqslant s+1}\|\partial^k(u_\epsilon)\|_0 \leqslant \sum_{|k|\leqslant s}\|\partial^k(u_\epsilon)\|_1$$
$$\leqslant \mathrm{const}\sum_{|k|\leqslant s}\|\partial^k u\|_0 \leqslant \mathrm{const}\;\|u\|_s.$$

□

这样我们完成了命题 11.7 的证明. 注意命题中的常数不依赖于 ϵ.

定理 11.9 (正则性定理) 若 $\psi, \phi \in W_s^{(0,q)}(E)$, 且在弱收敛意义下 $\Box\psi = \phi$, 则 $\psi \in W_{s+2}^{(0,q)}(E)$.

证明: 由于 $\Box = P^2$, $P = \bar\partial + \bar\partial^*$, $\Box\psi = P^2\psi = \phi$. 仿照上面的证明, 由 $P\psi, \phi \in W_{s-1}(E)$, $P(P\psi) = \phi$ 可知 $P\psi \in W_s(E)$, 并且由 $P\psi, \phi \in W_s(E)$, $P(P\psi) = \phi$ 可知 $P\psi \in W_{s+1}(E)$, $P\psi = P\psi$, 故 $\psi \in W_{s+2}(E)$. □

推论 11.10 若在弱收敛意义下 $\Box\phi = \lambda\phi$, 则 $\phi \in C^\infty$.

证明: 设 $\phi \in W_0 = L^2$, 根据正则性定理 $\phi \in W_2$. 重复应用正则性定理, 得到 $\phi \in W_2$, $\phi \in W_4, \cdots, \phi \in W_{2k}, \cdots$, 故 $\phi \in \bigcap\limits_{m=0}^{+\infty} W_m$. 根据 Sobolev 引理, 当 $t > n$ 时, $W_{s+t} \subset C^s$; $\phi \in \bigcap\limits_{m=0}^{+\infty} W_m$, 故 ϕ 在 M 上是 C^∞ 的, 这里 n 是复流形的维数. □

命题 11.11　设 M 是紧复流形, E 是一个全纯向量丛, 则 $\dim \mathcal{H}^{(0,q)}(M,E) < +\infty$.

证明: 根据正则性定理, $\mathcal{H}^{(0,q)}(M,E) \subset \Gamma(M,\varepsilon^{0,q}(E))$, 假设命题 11.11 不成立, 则 $\mathcal{H}^{(0,q)}(M,E)$ 具有无穷标准基 $\{\omega_1,\cdots,\omega_n,\cdots\}$. $\|\omega_i\|_0^2=1$, $\|\omega_i-\omega_j\|_0^2=2$; $i\neq j$, 根据 Gärding 不等式

$$\|\omega_i\|_1^2 \leqslant c\,D(\omega_i,\omega_i)=c\|\omega_i\|_0^2=c,$$

故 $\{\omega_1,\cdots,\omega_n,\cdots\}$ 是 $W_1(M,E)$ 的有界集合, 再应用 Rellich 引理, $\{\omega_1,\cdots,\omega_n,\cdots\}$ 在 H_0 中具有一个弱收敛的子列. 这与 $\|\omega_i-\omega_j\|_0^2=2$ 相矛盾, 故 $\dim \mathcal{H}(M,E)<+\infty$. □

推论 11.12　$B_\mu=\{\phi\in\Gamma(M,\Lambda^{0,q}(E))\mid \square_E\phi=\mu\phi\}$, 则 $\dim\ B_u<+\infty$.

设 $\square: W_0(M,E)\longrightarrow W_0(M,E)$, $\mathrm{Ker}\,\square=\mathcal{H}^{(0,q)}(M,E)$, 用 $\mathcal{H}^\perp$ 表示 $(\mathrm{Ker}\,\square)^\perp \cap\Gamma(M,\varepsilon^{0,q}(E))$, 则我们断言 $\square:\mathcal{H}^\perp\longrightarrow\mathcal{H}^\perp$ 是双射, 为了验证这个结论我们需要如下命题:

命题 11.13　存在正常数 c_0 使得

$$\|\eta\|_1^2\leqslant c_0(\square\eta,\eta),\quad \forall\eta\in\mathcal{H}^\perp. \tag{11.19}$$

证明: 假设命题不成立, 那么存在序列 $\{\eta_k\}\subset\mathcal{H}^\perp$; $\|\eta_k\|_1=1$, 且当 $k\longrightarrow+\infty$ 时, $(\square\eta_k,\eta_k)\longrightarrow 0$. 由 $\|\eta_k\|_1=1$ 和 Rellich 引理, 存在子列 $\{\eta_{k_i}\}$ 收敛于 $\eta\in W_0$, 使得 $\lim\limits_{k_i\to\infty}\|\eta_{k_i}-\eta\|_0=0$. 另一方面, 当 $k\longrightarrow+\infty$ 时, $(\square\eta_{k_i},\eta_{k_i})\longrightarrow 0$, 即当 $k_i\to 0$ 时, $\|(\bar\partial+\bar\partial^*)\eta_{k_i}\|_0\longrightarrow 0$. 对 $\forall\phi\in\Gamma(M,\varepsilon^{0,q}(E))$,

$$|(\eta_0,(\bar\partial+\bar\partial^*)\phi)|=\lim_{k_i\to\infty}|(\eta_{k_i},(\bar\partial+\bar\partial^*)\phi)|=\lim_{k_i\to\infty}|((\bar\partial+\bar\partial^*)\eta_{k_i},\phi)|=0.$$

因此, 在弱收敛意义下 $(\bar\partial+\bar\partial^*)\eta=0$. 再根据正则性定理, $\square\eta=0$, 得 $\eta\in\mathcal{H}(M,\varepsilon^{0,q}(E))$, 故 $\eta\in\mathcal{H}\cap\mathcal{H}^\perp$, 即 $\eta=0$. 由 Gärding 不等式

$$\|(\bar\partial+\bar\partial^*)\eta_{k_i}\|_0^2\geqslant c_1\|\eta_{k_i}\|_1^2-c_2\|\eta_{k_i}\|_0^2. \tag{11.20}$$

又因为 $\|\eta_{k_i}\|_1=1$, $\|(\bar\partial+\bar\partial^*)\eta_{k_i}\|_0\to 0$ 且 $\|\eta_{k_i}\|_0\to\|\eta\|_0=0$, 故 (11.20) 不可能成立. 故命题必须对正的常数 c_0 才成立.

命题 11.13 表明 $\square:\mathcal{H}^\perp\longrightarrow\mathcal{H}^\perp$ 是单射. 现在在 $\mathcal{H}^\perp$ 上定义新的内积. 对 $\forall\eta_1,\eta_2\in\mathcal{H}^\perp$, 令

$$[\eta_1,\eta_2]=(\square\eta_1,\eta_2)=(\eta_1,\square\eta_2),$$

故 $[\eta,\eta]=\|(\bar\partial+\bar\partial^*)\eta\|_0$, $\eta\in\mathcal{H}^\perp$. 上面的命题表明

$$\|\eta\|_1^2\leqslant c_0[\eta,\eta]=c_0\|(\bar\partial+\bar\partial^*)\eta\|_0.$$

另一方面,

$$\|(\bar\partial+\bar\partial^*)\eta\|_0\leqslant \mathrm{const}\|\eta\|_1,\quad \forall\eta\in\Gamma(M,\varepsilon^{0,q}(E)).$$

因此, 若定义 $p(\eta)=[\eta,\eta]$, 则 $p(\eta)$ 和 $\|\eta\|_1$ 是 $\mathcal{H}^\perp$ 上的等价类.

现在 B 是 $\mathcal{H}^\perp$ 经过完备化之后得到的 Hilbert 空间.

对 $\forall\eta\in\mathcal{H}^\perp$, 定义泛函

$$\Phi_\eta:\mathcal{H}^\perp\longrightarrow\mathbf{C},\quad \eta\in\mathcal{H}^\perp,$$

$$\Phi_\eta(\phi)=(\phi,\eta),\quad \phi\in\mathcal{H}^\perp,$$

则

$$|\Phi_\eta(\phi)|=\|\phi\|_0\|\eta\|_0\leqslant\|\phi\|_1\|\eta\|_0\leqslant\sqrt{c_0}p(\phi)\|\eta\|_0.$$

故 Φ_η 是 $\mathcal{H}^\perp$ 上的关于模 p 的有界线性泛函. 由 Hahn-Banach 定理, Φ_η 可延拓为 Hilbert 空间 B 中的有界线性泛函, 再由 Riesz 表示定理, 存在 $u\in B$, 使得

$$\Phi_\eta(\phi)=[\phi,u],\quad \forall\phi\in B.$$

特别的,

$$\Phi_\eta(\phi)=[\phi,u],\quad \forall\phi\in\mathcal{H}^\perp,$$

即

$$(\Box\phi,u)=(\phi,\eta),\quad \phi\in\mathcal{H}^\perp. \tag{11.21}$$

当 $\phi\in\mathcal{H}$, (11.21) 自然成立, 故 $(\Box\phi,u)=(\phi,\eta)$ 在 $\Gamma(M,\varepsilon^{0,q}(E))$ 上成立. 并且等式对 $\forall\phi\in L^{(0,q)}(E)$ 也成立, 故在弱收敛意义下 $\Box u=\eta$. 由正则性定理, u 是 C^∞ 的, 故 $u\in\mathcal{H}^\perp$. 因此, 对 $\forall\eta\in\mathcal{H}^\perp$, 存在唯一的 $u\in\mathcal{H}$, 使得 $\Box u=\eta$. □

下面我们来定义线性算子 $G:\mathcal{H}^\perp\longrightarrow\mathcal{H}^\perp$ 使得 $G=(\Box|_{\mathcal{H}^\perp})^{-1}$. 再延拓 G 至 $\Gamma(M,\varepsilon^{0,q}(E))$, 令 $G|_{\mathcal{H}}=0$, 称 G 为 **Green 算子**.

命题 11.14 $G:\Gamma(M,\varepsilon^{0,q}(E))\longrightarrow\Gamma(M,\varepsilon^{0,q}(E))$ 是紧算子.

证明: 假设 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}\subset\Gamma(M,\varepsilon^{0,q}(E))$ 是一个序列, 使得 $\|\phi_n\|_0\leqslant1$, $\forall n\in\mathbf{Z}^+$. 我们要证明 $\{G\phi_n\}_{n\in\mathbf{Z}^+}$ 关于 $\|\cdot\|_0$ 范数包含一 Cauchy 列. 由 Rellich 定理, 只需证明对 $\forall n\in\mathbf{Z}^+$, $\|G\phi_n\|_1$; $n\in\mathbf{Z}^+$ 是一致有界的.

由于 $G|_{\mathcal{H}}\equiv0$, 故可假定 $\phi_n\in\mathcal{H}^\perp$,

$$\|G\phi_n\|_1^2\leqslant c_0p(Gf_n,Gf_n)=c_0(\Box Gf_n,Gf_n)\leqslant c_0\|\Box G\phi_n\|_0\|G\phi_n\|_0$$

$$= c_0\|\phi_n\|_0\|G\phi_n\|_0 \leqslant c_0\|G\phi_n\|_0 \leqslant c_0\|G\phi_n\|_1.$$

所以, $\|G\phi_n\|_1 \leqslant c_0$. □

命题 11.15 $G\bar\partial = \bar\partial G, \quad G\bar\partial^* = \bar\partial^* G.$

在给出证明之前, 我们先对这两个等式做些解释. 设 $\phi \in \Gamma(M, \varepsilon^{0,q}(E))$, 则 $\bar\partial\phi \in \Gamma(M, \varepsilon^{0,q+1}(E))$, $\bar\partial^*\phi \in \Gamma(M, \varepsilon^{0,q-1}(E))$. 而算子 $\Box$ 和 G 可作用在所有 $\Gamma(M, \varepsilon^{p,q}(E))$ 上, 故这两个等式的意义是清楚的.

证明: 由于对 $\forall\phi \in \mathcal{H}$, $G\bar\partial\phi = \bar\partial G\phi = \bar\partial^* G\phi = G\bar\partial^*\phi = 0$, 故只需验证等式对 $\forall\phi \in \mathcal{H}^\perp$ 成立. 不妨假定存在 $\psi \in \mathcal{H}^\perp$ 使得 $\Box\psi = \phi$, 则

$$G\bar\partial\phi = G\bar\partial\Box\psi = G\bar\partial\bar\partial^*\bar\partial\psi = G\Box\bar\partial\psi = \bar\partial\psi,$$

且

$$\bar\partial G\phi = \bar\partial G\Box\psi = \bar\partial\psi,$$

这里 $\bar\partial\psi \in \Gamma(M, \varepsilon^{0,q+1}(E))$. 容易验证 $\bar\partial\psi \in \mathcal{H}^\perp$ ($\Gamma(M, \varepsilon^{0,q+1}(E))$ 的子空间), 在 $\mathcal{H}^\perp$ 上, $\Box G = id$ 也成立. 故

$$G\bar\partial^*\phi = G\bar\partial^*\Box\psi = G\bar\partial^*\bar\partial\bar\partial^*\psi = G\Box\bar\partial^*\psi = \bar\partial^*\psi$$

且

$$\bar\partial^* G\phi = \bar\partial^* G\Box\psi = \bar\partial^*\psi,$$

这里 $\bar\partial^*\psi \in \mathcal{H}^\perp$, $\mathcal{H}$ 是 $\Gamma(M, \varepsilon^{0,q-1}\,(E))$ 中调和形式所组成的子空间. □

下面, 定义 $P : \Gamma(M, \varepsilon^{0,q}(E)) \longrightarrow \mathcal{H}$ 为投影算子, 对 $\forall\phi \in \Gamma(M, \varepsilon^{0,q}(E))$, $\phi - P\phi \in \mathcal{H}^\perp$, 则

$$\phi - P\phi = G\Box(\phi - P\phi) = G\Box\phi = \Box G\phi,$$

故

$$\phi = P\phi + \Box G\phi = P\phi + \bar\partial(\bar\partial^* G\phi) + \bar\partial^*(\bar\partial G\phi). \tag{11.22}$$

因此, 在 $\Gamma(M, \varepsilon^{0,q})$ 上存在关于算子的等式 $I = P + \Box G$. 该等式表明对 $\forall\phi \in \Gamma(M, \varepsilon^{0,q}(E))$, 可分解成三个部分: 第一个是它到 $\mathcal{H}$ 的投影, 第二个属于 $\mathrm{Im}\,\bar\partial$, 第三个属于 $\mathrm{Im}\,\bar\partial^*$. 容易验证 $\mathcal{H}$, $\mathrm{Im}\,\bar\partial$ 和 $\mathrm{Im}\,\bar\partial^*$ 是互相正交的, 即 $(\mathcal{H}, \mathrm{Im}\,\bar\partial) = (\mathcal{H}, \mathrm{Im}\,\bar\partial^*) = (\mathrm{Im}\,\bar\partial, \mathrm{Im}\,\bar\partial^*) = 0$, 故这个分解是唯一的, 所以

$$\Gamma(M, \varepsilon^{0,q}) = \mathcal{H} \oplus \mathrm{Im}\ \bar\partial \oplus \mathrm{Im}\ \bar\partial^*. \tag{11.23}$$

若 $\phi \in \Gamma(M, \varepsilon^{0,q})$ 且 $\bar\partial\phi = 0$, 则 (11.23) 的第三项消灭. 由于

$$\phi = \phi_1 + \bar\partial\phi_2 + \bar\partial^*\phi_3,$$

$\phi_1 \in \mathcal{H}$, 则

$$(\bar{\partial}^*\phi_3, \bar{\partial}^*\phi_3) = (\phi, \bar{\partial}^*\phi_3) = (\bar{\partial}\phi, \phi_3) = 0,$$

因此 $\bar{\partial}^*\phi_3 = 0$ 且 $\phi = \phi_1 + \bar{\partial}\phi_2$, $\phi_1 \in \mathcal{H}^{0,q}(M, E)$. 根据 Dolbeault 上同调定理

$$\mathcal{H}^{(0,q)}(M, E) \equiv H^{(0,q)}(M, E), \quad q = 0, 1, 2, 3, \cdots.$$

最后, 我们给出 Hodge 定理:

定理 11.16 设 M 是一个紧的复流形, E 是 M 上的全纯向量丛. $L^{(0,q)}(E)$, $\Gamma(M, \varepsilon^{0,q}(E))$ 分别是由 $L^2(0,q)$ 形式组成的 Hilbert 空间和由 C^∞ 的 E 值 $(0,q)$ 形式组成的内积空间. $\Box = \bar{\partial}^*\bar{\partial} + \bar{\partial}\bar{\partial}^* : L^{(0,q)}(E) \longrightarrow L^{(0,q)}(E)$, 则

(1) $\mathcal{H}^{(0,q)}(M, E) = \{\phi \in L^{(0,q)}(E) \mid \Box\phi = 0\}$ 是有限维子空间, 且 $\mathcal{H} \subset \Gamma(M, \varepsilon^{0,q}(E))$.

(2) $\Gamma(M, \varepsilon^{0,q}(E))$ 具有标准分解

$$\Gamma(M, \varepsilon^{0,q}(E)) = \mathcal{H} \oplus \operatorname{Im}\bar{\partial} \oplus \operatorname{Im}\bar{\partial}^*.$$

(3) $H^{(0,q)}(M, E) = \mathcal{H}^{(0,q)}(M, E), \quad q = 1, 2, 3, \cdots.$

注: 事实上, Hodge 定理不仅对 E 值的 $(0,q)$ 形式成立, 对 E 值的 (p,q) 形式同样成立 $(1 \leqslant p \leqslant n)$, 且 Hodge 定理对于 (p,q) 形式具有和 $(0,q)$ 形式相类似的结果.

§11.2 Rellich 定理, Gärding 不等式和 Sobolev 引理的证明

这一节主要是给出 Rellich 定理, Gärding 不等式和 Sobolev 引理的证明.

根据上面的讨论, 只需在有界区域 $G \subset \mathbf{R}^N$ 的情形下证明即可, 本节中定理的函数、形式等都在 G 中具有紧支集.

引理 11.17 $\forall u \in W_t(\Omega)$, $t \in \mathbf{Z}^+$, 存在常数 $A_t > 0$ 使得

$$\|u - u_\epsilon\|_{t-1} \leqslant \epsilon A_t \|u\|_t.$$

证明: 不妨假定 $u \in C_0^\infty(G)$,

$$g_y(x) := u(x+y) - u(x),$$

则

$$g_y(x) = \sum_{j=1}^N y_j \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_j}(x + ry)dr.$$

利用 Cauchy 不等式

$$|g_y(x)|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{N}|y_j|^2\sum_{j=1}^{N}\left|\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x_j}(x+ry)dr\right|^2 \leqslant |y|^2\sum_{j=1}^{N}\int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x+ry)\right|^2 dr,$$

则

$$\int_G |g_y(x)|^2 d\sigma_x \leqslant |y|^2\sum_{j=1}^{N}\int_G\int_0^1\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x+ry)\right|^2 dr \leqslant |y|^2\|u\|_1^2. \tag{11.24}$$

故

$$(u_\epsilon - u)(x) = \int_{|y|\leqslant 1}(u(x-\epsilon y)-u(x))\chi(y)dy = \int_{|y|\leqslant 1} g_{-\epsilon y}(x)\chi(y)dy,$$

且

$$\begin{aligned}|(u_\epsilon - u)(x)|^2 &\leqslant \left(\int_{|y|\leqslant 1}|g_{-\epsilon y}(x)|\chi(y)dy\right)^2\\ &\leqslant \int_{|y|\leqslant 1}|g_{-\epsilon y}(x)|^2dy\int_{|y|\leqslant 1}\chi(y)^2dy.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\int_G |(u_\epsilon - u)(x)|^2 d\sigma_x &\leqslant \int_G\left(\int_{|y|\leqslant 1}|g_{-\epsilon y}(x)|^2dy\int_{|y|\leqslant 1}\chi(y)^2dy\right)d\sigma_x\\ &\leqslant \int_{|y|\leqslant 1}|\epsilon y|^2dy\ \|u\|_1^2|\chi|^2\ \mathrm{Vol}(G)\mathrm{Vol}(B(0,1))\\ &= \epsilon^2\mathrm{Vol}(B(0,1))^2\mathrm{Vol}(G)|\chi|^2\|u\|_1^2,\end{aligned}$$

这里 $|\chi| = \max\limits_{x\in\mathbf{R}^N}\chi(x)$, $B(0,1)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中的单位球. 根据上面的不等式, 得

$$\|u_\epsilon - u\|_0 \leqslant C\epsilon\|u\|_1, \tag{11.25}$$

C 是一个不依赖于 u 的常数. 将 $D^\alpha u$ 代入到 (11.25) 中, $|\alpha| \leqslant t-1$, 则

$$\|u_\epsilon - u\|_{t-1} \leqslant B_t\epsilon\|u\|_t.$$

对 $\forall f \in W_t(G)$. 由于 $C_0^\infty(G)$ 关于 $\|\cdot\|_t$ 在 $W_t(G)$ 中是稠密的, 故可找到 $u\in C_0^\infty$, 使得 $\|f-u\|_t < \dfrac{\epsilon}{3}\|f\|_t$, 所以

$$\|f-f_\epsilon\|_{t-1} \leqslant \|f-u\|_{t-1} + \|u-u_\epsilon\|_{t-1} + \|u_\epsilon - f_\epsilon\|_{t-1}$$

$$\leqslant \frac{\epsilon}{3}\|f\|_t + \frac{\epsilon}{3}\|f\|_t + \|u-u_\epsilon\|_{t-1}$$
$$\leqslant \left(\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+B_t\epsilon\right)\|f\|_t$$
$$= \epsilon A_t\|f\|_t, \tag{11.26}$$

这里用到 $\|u_\epsilon - f_\epsilon\|_{t-1} \leqslant \|u-f\|_{t-1}$, 且 $A_t = \dfrac{2}{3}+B_t$. □

引理 11.18 设 G 是 $\mathbf{R}^N$ 中有界区域, $k \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, 定义线性算子 K : $W_0(G) \longrightarrow W_0(\mathbf{R}^N)$; $\forall f \in W_0(G), K(f) := f*k = \int_{\mathbf{R}^N} f(y)k(x-y)d\sigma_y$, 则 K 是一个紧算子.

证明: 对 $\forall f \in W(G)$, Supp $K(f)$ = Supp $f*k \subset G+$ Supp k, 这里 $G+$ Supp $k = \{a+b \mid \forall a \in G, \forall b \in \text{Supp } k\}$, 由于 G 是有界区域, k 具有紧支集, 故 Supp $K(f)$ 也在 $\mathbf{R}^N$ 中具有紧支集.

$$|(f*k)(x)| \leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^N}|f(y)|^2 d\sigma_y\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbf{R}^N}|k(x-y)|^2 d\sigma_y\right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_0 A, \tag{11.27}$$

这里 $A = \left(\int_{\mathbf{R}^N}|k(x-y)|^2 d\sigma_y\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$. 再考虑 $f \in W(\mathbf{R}^N)$ 为 f 的平凡延拓, 即 $f|_{\mathbf{R}^N\setminus G} \equiv 0$.

要证明 K 是紧算子, 只需验证对每个满足 $\|f_i\| \leqslant 1$ 的序列 $\{f_i\}_{i\in\mathbf{Z}^+} \subset W(G)$, $\{K(f_i)\}_{i\in\mathbf{Z}^+} \subset W(\mathbf{R}^N)$ 都是一致有界且等度连续的, 则根据 **Ascoli-Arzera 定理**, $\{K(f_i)\}_{i\in\mathbf{Z}^+}$ 具有一致收敛子列, 该子列在 $W(\mathbf{R}^N)$ 上关于 $\|\cdot\|$ 范数也是一致收敛的.

(11.27) 表明 $\{K(f_i)\}$ 是一致有界的且被 A 控制.

$$K(f_i)(x_1) - K(f_i)(x_2) = \int_{\mathbf{R}^N}(f_i(y)k(x_1-y) - f_i(y)k(x_2-y))d\sigma_y$$
$$= \int_{\mathbf{R}^N} f_i(y)(k(x_1-y)-k(x_2-y)).$$

由于 $k \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, 故 k 是一致连续的. 即对 $\forall\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x_1-x_2| < \delta$ 时, $|k(x_1)-k(x_2)| < \epsilon$. 因此,

$$|K(f_i)(x_1) - K(f_i)(x_2)| \leqslant \int_{\mathbf{R}^N}|f_i(y)|\,|k(x_1-y)-k(x_2-y)|d\sigma_y$$
$$\leqslant \epsilon\int_{\mathbf{R}^N}|f_i(y)|d\sigma_y = \epsilon\int_G |f_i(y)|d\sigma_y$$
$$\leqslant \epsilon\|f_i\|_0 \text{Vol}(G) = \epsilon\text{Vol}(G),$$

即 $K(f_i)$ 是等度连续的, 这就证明了 K 是紧算子.

Rellich 定理的证明. □

证明: 定义 $T_\varepsilon : W_t(\Omega) \longrightarrow C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$; $T_\epsilon(u) = u_\epsilon = \int_{\mathbf{R}^N} u(y)\chi_\epsilon(x-y)d\sigma_y$, 则 T_ϵ 在 $\|\cdot\|_t$ 范数下是紧算子. 设 $\{u_i\}_{i\in\mathbf{Z}^+}$ 是 $W_t(G)$ 中的序列且满足 $\|u_i\|_t \leqslant 1$; $i\in\mathbf{Z}^+$, 则对 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$, 且 $|\alpha|\leqslant t$,$\|\partial^\alpha u_i\|_0 \leqslant 1$; $i\in\mathbf{Z}^+$, $(\partial^\alpha u_i)_\epsilon = \partial^\alpha(u_i)_\epsilon$ 具有在 $\|\cdot\|_0$ 范数意义下的收敛子列. 故经过有限次选取, 可取 $\{u_i\}_{i\in\mathbf{Z}^+}$ 的子列 $\{u_{i_k}\}$, 使得对于每个 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_N)$, $|\alpha|\leqslant t$, $\partial^\alpha(u_{i_k})_\epsilon$ 在 $\|\cdot\|_0$ 范数意义下都是收敛的子列, 即 $(u_{i_k})_\epsilon$ 在 $\|\cdot\|_t$ 范数意义下是收敛的.

根据命题 11.13

$$\|u-u_\epsilon\|_{t-1} \leqslant \epsilon A_t \|u\|_t, \tag{11.28}$$

这里 $u-u_\epsilon=(id-T_\epsilon)_u$, $id-T_\epsilon : W_t(G) \longrightarrow W_{t-1}(G)$, 且当 $\epsilon\to 0$ 时 $\|id-T_\epsilon\|\leqslant \epsilon A_t$. 故当 $\epsilon\to 0$ 时 $\|id-T_\epsilon\|\to 0$, 即在算子范数意义下 $T_\epsilon\to id$. 这里 T_ϵ 是从 $W_t(G)$ 到 $W_{t-1}(G)$ 的紧算子, 其亦可以看成是 $W_t(G)$ 到 $W_t(G)$ 本身的紧算子, 因为 $id: W_t(G)\longrightarrow W_{t-1}(G)$ 是范数为 1 的有界算子, 故 $id\circ T_\epsilon$ 是从 $W_t(G)\longrightarrow W_{t-1}(G)$ 的紧算子. 由于当 $\epsilon\to 0$ 时 $T_\epsilon\to id$, 且 $id: W_t(G)\longrightarrow W_{t-1}(G)$ 也是紧算子. 根据紧算子的复合还是紧算子这一性质, 得 $id: W_t(G)\longrightarrow W_s(G)$, $t>s$ 是紧算子. □

引理 11.19 (Sobolev 不等式) 设 G 是 $\mathbf{R}^N$ 中的有界区域, K 是 G 中的紧集, 则对 $\forall f\in C^s(G)$, $s>\dfrac{N}{2}$,

$$\max_{x\in K}|f(x)| \leqslant C\|f\|_s,$$

这里 C 是不依赖于 f 的正的常数.

证明: 由于 K 是 G 中的紧集, 故 $d=\operatorname{dist}(K,\partial G)>0$, 选取 $R<\dfrac{d}{2}$. 对 $\forall x\in K$ 和 $a=(a^1,\cdots,a^N)\in s^{N-1}(1)$, 这里 $s^{N-1}(1)$ 是 $\mathbf{R}^N$ 中的单位球面, $s:[0,R)\longrightarrow[0,1]$ 是光滑函数, 使得 $s|_{[0,\frac{1}{3}R]}=1$ 且 $\operatorname{Supp} s\subset\left[0,\dfrac{2}{3}R\right]$, 则

$$\begin{aligned}
f(x) &= -\int_0^R \frac{d(s(t)f(x+ta))}{dt}dt \\
&= \int_0^R t\frac{d^2(s(t)f(x+ta))}{dt^2}dt \\
&= \cdots = (-1)^s\int_0^R t^{s-1}\frac{d^s(s(t)f(x+ta))}{dt^s}dt
\end{aligned}$$

$$= (-1)^s \int_0^R t^{s-N} \frac{d^s(s(t)f(x+ta))}{dt^s} t^{N-1} dt,$$

故

$$|f(x)| \leqslant \int_0^R t^{s-N} \left| \frac{d^s(s(t)+f(x+ta))}{dt^s} \right| t^{N-1} dt. \qquad (11.29).$$

因此

$$\int_{s^{N-1}(1)} |f(x)| d\sigma \leqslant \int_{B(0,R)} t^{s-N} \frac{d^s(s(t)+f(x+ta))}{dt^s} dv,$$

这里 $d\sigma$ 是 $s^{N-1}(1)$ 的体积元, dv 是 $\mathbf{R}^N$ 的体积元. 对上面不等式的右边利用 Cauchy 不等式, 得到

$$\mathrm{Vol}(s^{N-1}(1))|f(x)| \leqslant \left(\int_{B(0,R)} t^{2(s-N)} dv \right)^{1/2}$$

$$\cdot \left(\int_{B(0,R)} \left| \frac{d^s(s(t)f(x+ta))}{dt^s} \right|^2 dv \right)^{1/2}$$

当 $s > \left[\frac{N}{2}\right]$ 时, $2(s-N) > 2\left(\frac{N}{2} - N\right) = -N$, 故积分的第一项有限, 即

$$\int_{B(0,R)} t^{2(s-N)} dv = C_0 < +\infty.$$

另一方面,

$$\frac{d^s(s(t)f(x+ta))}{dt^s} = \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \frac{d^k s(t)}{dt^k} \frac{d^{s-k} f(x+ta)}{dt^{s-k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \frac{d^k s(t)}{dt^k} \sum_{i_1+\cdots+i_n=s-k} \frac{\partial^{s-k} f(x+ta)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} a_1^{i_1} \cdots a_n^{i_n}.$$

令 $M = \max\limits_{\substack{0 \leqslant k \leqslant s \\ 0 \leqslant t \leqslant R}} \left| \frac{d^k s}{dt^k} \right|$, 则

$$\left| \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \frac{d^k s(t)}{dt^k} \frac{d^{s-k} f(x+ta)}{dt^{s-k}} \right| \leqslant M \sum_{k=0}^{s} \binom{s}{k} \sum_{i_1+\cdots+i_n=s-k} \left| \frac{\partial^{s-k} f(x+ta)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} \right|$$

$$\leqslant 2^s M \sum_{k=0}^{s} \sum_{i_1+\cdots+i_n=s-k} \left| \frac{\partial^{s-k} f(x+ta)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_n^{i_n}} \right|$$

$$\leqslant 2^s M \sum_{|\alpha|=0}^{s} |\partial^\alpha f(x+ta)|.$$

因此,

$$\int_{B(0,R)}\left|\frac{d^s(s(t)f(x+ta))}{dt^s}\right|^2 dv \leqslant 2^sMC_1\int_{B(0,R)}\sum_{|\alpha|=0}^{s}|\partial^\alpha f(x+ta)|^2\,dv$$

$$\leqslant 2^sMC_1\int_G\sum_{|\alpha|=0}^{s}|\partial^\alpha f(x+ta)|^2dv\leqslant 2^sMC_1\|f\|_s.$$

这表明

$$\max_{x\in K}|f(x)|\leqslant\frac{2^sMC_1C_0}{\mathrm{Vol}(s^{N-1}(1))}\|f\|_s.$$

□

Sobolev 引理的证明.

证明: 设 $u\in H_{s+t}(G)$, $s>\dfrac{N}{2}$, 要证明 $u\in C^t(G)$, 选取序列 $u_n\in C_0^\infty(G)$, 使得当 $n\to+\infty$ 时, $\|u_n-u\|_{s+t}\to 0$. 对每个 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),|\alpha|\leqslant t$ 和紧集 $K\subset G$, 由 Sobolev 不等式,

$$\max_K|D^\alpha u_n-D^\alpha u_m|\leqslant C\|D^\alpha u_n-D^\alpha u_m\|_s\leqslant C\|u_n-u_m\|_{s+t}.$$

当 $n,m\to+\infty$ 时, $\|u_n-u_m\|_{s+t}\to 0$, 且对所有 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $|\alpha|\leqslant t$, 在每个紧集 K 上, $D^\alpha u_n$ 都是一致收敛的. 由于此性质对 K 的任意紧集均成立, 故存在 $\tilde u\in C^\infty(G)$, 使得 u_n 和 $\partial^\alpha u_n$ 对所有 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $|\alpha|\leqslant t$ 都分别一致收敛于 $\tilde u$ 和 $\partial^\alpha\tilde u$.

另一方面, 当 $n\to+\infty$ 时, $\|u_n-u\|_{s+t}\to 0$, 则

$$\|u-\tilde u\|_t\leqslant\|u_n-u\|_t+\|u_n-\tilde u\|_t\leqslant\|u_n-u\|_{s+t}+\|u_n-\tilde u\|_t.$$

上面不等式右边的两项当 $n\to+\infty$ 时都收敛于零, 故 $\|u-\tilde u\|_t=0$. 这表明 $u=\tilde u$ 几乎处处成立, 即除了一个零测集外有 $u\in C^t(\Omega)$. □

Gärding 不等式的证明.

证明: 下面将证明存在常数 C, 使得对 $\forall\phi\in\Gamma(M,\varepsilon^{0,q}(E))$,

$$C\mathcal{D}(\phi,\phi)=C((I+\Box)\phi,\phi)\geqslant\|\phi\|_1.$$

ϕ 可以局部表示为

$$\phi=\frac{1}{q!}\sum_{\lambda=1}^{r}\phi^\lambda_{\bar i_1\cdots\bar i_q}d\bar z^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z^{i_q}e_\lambda,$$

这里 e_λ; $\lambda=1,\cdots,r$ 是 E 的平凡化邻域上的全纯标架, 则对 $\forall\psi\in\Gamma(M,\varepsilon^{0,q+1}(E))$,

$$\bar\partial\phi=\frac{1}{(q+1)!}(\bar\partial\phi)^\lambda_{i_1\cdots i_{q+1}}d\bar z^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\bar z^{i_{q+1}},$$

$$(\bar{\partial}\phi)^{\lambda}_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_{q+1}} = \sum_{v=1}^{q+1}(-1)^{v-1}\bar{\partial}_{i_v}\phi^{\lambda}_{\bar{i}_1\cdots\hat{\bar{i}}_v\cdots\bar{i}_{q+1}},$$

$$(\bar{\partial}^*\psi)^{\lambda}_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_q} = -\sum_{k,j} g^{\bar{k}j}\partial_j\psi^{\lambda}_{\bar{k}\bar{i}_1\cdots\bar{i}_q} + \text{不含 } \phi \text{ 的系数的导数项}.$$

上述等式中的 $\hat{\bar{i}}_v$ 表示去掉这个指标.

这里不用写出 $\bar{\partial}\phi$, $\bar{\partial}^*\phi$, $\bar{\partial}\bar{\partial}^*\phi$ 和 $\bar{\partial}^*\bar{\partial}\phi$ 的完全表达式, 只需写出主要部分即可, 它在证明 Gärding 不等式的过程中起了主要作用. 而 $\bar{\partial}\phi$, $\bar{\partial}^*\phi$, $\bar{\partial}\bar{\partial}^*\phi$ 和 $\bar{\partial}^*\bar{\partial}\phi$ 的具体表达式将在下一章证明消灭定理时给出. 现在有

$$(\bar{\partial}\bar{\partial}^*\phi)^{\lambda}_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_q} = -g^{\bar{k}j}\partial_j\partial_{\bar{k}}\phi_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_q} + \sum_{l=1}^{q}(-1)^{l-1}g^{\bar{k}j}\bar{\partial}_{i_l}\partial_j\phi^{\lambda}_{\bar{k}\bar{i}_1\cdots\hat{\bar{i}}_l\cdots\bar{i}_q}$$

$$+\phi \text{ 系数的偏导数的阶小于 2 的项},$$

$$(\Box\phi)^{\lambda}_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_q} = -g^{\bar{k}j}\partial_j\partial_{\bar{k}}\phi_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_q} + \phi \text{ 系数的偏导数的阶小于 2 的项},$$

$$\begin{aligned}(\Box\phi,\phi) &= -\frac{1}{q!}\int g^{\bar{k}j}\partial_j\bar{\partial}_k\phi^{\lambda}_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_q}h_{\lambda\bar{\mu}}\overline{\phi^{\mu\bar{i}_1\cdots\bar{i}_q}}\det g\,dx + O(\|\phi\|\cdot\|\phi\|_1)\\ &= \frac{1}{q!}\int g^{\bar{k}j}\bar{\partial}_k\phi^{\lambda}_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_q}h_{\lambda\bar{\mu}}\overline{\bar{\partial}_j\phi^{\mu\bar{i}_1\cdots\bar{i}_q}}\det g\,dx + O(\|\phi\|\cdot\|\phi\|_1),\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}\partial_k(\phi^{\mu i_1\cdots i_q}) &= \partial_k(\phi^{\mu}_{\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}g^{\bar{j}_1 i_1}\cdots g^{\bar{j}_q i_q})\\ &= \partial_k\phi^{\mu}_{\bar{j}_1\cdots\bar{j}_\beta}g^{\bar{j}_1 i_1}\cdots g^{\bar{j}_q i_q} + \phi^{\mu}_{\bar{j}_1\cdots\bar{j}_\beta}g^{\bar{j}_1 i_1}\cdots\partial_k g^{\bar{j}_s i_s}\cdots g^{\bar{j}_q i_q}.\end{aligned}$$

因此

$$(\Box\phi,\phi) = \frac{1}{q!}\int g^{\bar{k}j}\partial_j\phi^{\lambda}_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_q}h_{\lambda\bar{\mu}}\overline{\bar{\partial}_j\phi^{\mu\bar{i}_1\cdots\bar{i}_q}}g^{\bar{i}_1 j_1}\cdots g^{\bar{i}_q j_q}\det g\,dx + O(\|\phi\|\cdot\|\phi\|_1),$$

其中 $(g^{\bar{r}s})$ 是 Hermite 度量矩阵 $(g_{r\bar{s}})$ 的逆矩阵, 故 $(g^{\bar{r}s})$ 也是正定的 Hermite 矩阵. 所以存在 $\delta > 0$ 使得在每个局部坐标邻域上

$$(g^{\bar{r}s}) \geqslant \delta I_n$$

都成立, 因此上式在整个 M 上成立.

同样道理, E 的 Hermite 度量矩阵 $(h_{\lambda\bar{\mu}})$ 也是正定的, 且存在正数 δ_1 使得在每个平凡化邻域上有

$$(h_{\lambda\bar{\mu}}) \geqslant \delta_1 I_r,$$

则

$$(\Box\phi,\phi)=\frac{1}{q!}\int g^{\bar{k}j}\partial_j\phi^{\lambda}_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_q}h_{\lambda\bar{\mu}}\overline{\bar{\partial}_j\phi^{\mu_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_q}}}g^{\bar{i}_1j_1}\cdots g^{\bar{i}_qj_q}\det g\,dx+O(\|\phi\|\cdot\|\phi\|_1)$$

$$\geqslant\frac{1}{q!}\delta_1\delta^n\int\sum_{j,i_1,\cdots,i_q=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{r}|\partial_j\phi^{\lambda}_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_q}|^2\ \det gdx+O(\|\phi\|\cdot\|\phi_1\|)$$

$$\geqslant\delta_1\delta^n\|\phi\|_1^2-\delta_1\delta^n\|\phi\|_0^2-\frac{C_0}{2\varepsilon}\|\phi\|_0^2-\frac{\epsilon C_0}{2}\|\phi\|_1^2$$

$$=\left(\delta_1\delta_0^n-\frac{\epsilon C_0}{2}\right)\|\phi\|_1^2-\left(\delta_1\delta^n+\frac{C_0}{2\epsilon}\right)\|\phi\|_0^2.$$

选取适当的 ϵ 使得 $\delta_1\delta^n-\dfrac{\epsilon C_0}{2}>0$, 那么

$$C=\frac{\delta_1\delta^n+\dfrac{C_0}{2\epsilon}}{\delta_1\delta^n-\dfrac{\epsilon C_0}{2}},$$

因此, $C\mathcal{D}(\phi,\phi)\geqslant\|\phi\|_1$. □

第十二章　消灭定理与嵌入定理

设 M 为一个 n 维复流形, E 是秩为 r 的全纯向量丛. 当 $r=1$ 时, 一般用 L 表示复流形 M 上的线丛. 对任意给定的复流形 M, 存在一类重要的线丛 K_m, 称为 M 的**典则线丛**. 它的定义如下:

设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 为 M 的全纯坐标覆盖, $(z^1_{(\alpha)},\cdots,z^n_{(\alpha)})$ 是 U_α 的局部坐标. 由于 $U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$, 可定义 $\phi_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow \mathbf{C}^*=\mathbf{C}\backslash\{0\}$, $\phi_{\alpha\beta}=\det\dfrac{\partial(z^1_{(\beta)},\cdots,z^n_{(\beta)})}{\partial(z^1_{(\alpha)},\cdots,z^n_{(\alpha)})}$. 显然, $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ 满足转换函数的条件, 那么典则线丛就定义为具有上述转换函数 $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ 的线丛.

定义 12.1　设 U 是 M 的任意开集, $\Gamma(U,\varepsilon^{n,0})$ 是开集 U 上的所有 $C^\infty(n,0)$ 形式全体组成的集合. 对 $\forall\omega\in\Gamma(U,\varepsilon^{n,0})$, 若 $U\cap U_\alpha\neq\varnothing$, 那么存在 U_α 上的局部表示

$$\omega=a^\alpha dz^1_{(\alpha)}\wedge\cdots\wedge z^n_{(\alpha)}.$$

若 $U\cap U_\alpha\cap U_\beta\neq\varnothing$,

$$\omega=a^\beta dz^1_{(\beta)}\wedge\cdots\wedge dz^n_{(\beta)},$$

则

$$a^\alpha=\det\frac{\partial(z^1_{(\beta)},\cdots,z^n_{(\beta)})}{\partial(z^1_{(\alpha)},\cdots,z^n_{(\alpha)})}a^\beta.$$

因此, K_M 可看成 M 上 $C^\infty(n,0)$ 形式全体组成的线丛.

线丛的概念紧密联系着**除子**, 除子的概念来源于 Riemann 曲面. 在Riemann 曲面上, 每个亚纯函数都有一些极点和零点, 它们都是孤立的. 用 $p_1,\cdots,p_n$ 表示

这些孤立点的集合, 那么 $\sum n(p_i)p_i$ 就称为除子, 这里 $n(p_i) \in \mathbf{Z}$. 当 $n(p_i) \in \mathbf{Z}^+$ 时其表示零点 p_i 的重数, 当 $n(p_i) \in \mathbf{Z}^-$ 时其表示极点 p_i 的重数. 所以, 除子 $\sum\limits_i n(p_i)p_i$ 实际上反映了具有给定重数极点和零点的亚纯函数的集合.

对于复流形 M 来说, 除子是余维数为 1 的复子流形, 即局部地可定义成全纯函数的零点集合. 设 D 是复流形 M 上的除子, $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 M 的开覆盖, 使得在 U_i 上; $i \in I$, $D \cap U_i = \{Z \in U_i \mid f_i = 0\}$, 这里 f_i 是 U_i 上的全纯函数.

当 $U_i \cap U_j \neq \varnothing$ 时, 定义

$$\phi_{ij} := \frac{f_i}{f_j}, \tag{12.1}$$

则在 $U_i \cap U_j$ 上 $\phi_{ij} \neq 0$ 且 $\phi_{ij} \cdot \phi_{ji} = 1$, 在 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 上 $\phi_{ij} \cdot \phi_{jk} \cdot \phi_{ki} = 1$. 所以, $\{\phi_{ij}\}_{i\in I}$ 是一个转换函数, 定义了线丛 L, 称 L 为除子 D 所诱导的线丛, 记为 $L = [D]$.

若除子 D 是由 $D \cap U_i = \{f_i = 0\}$ 所定义; $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 M 的开覆盖且 f_i 是全纯函数, 则 $\{f_i\}_{i\in I}$ 是 M 上关于线丛 $[D]$ 的全纯截形, 即 $f \in \Gamma(M, [D])$,

$$f\,|_{U_i} = f_i.$$

显然 f 的所有零点组成的集合也构成除子 D.

注意到 $[D]$ 在**同构意义下**是唯一的线丛. 即若存在除子 D 的另一个全纯函数局部表示 $\{f_i'\}_{i\in I}$, 则在 U_i 上 $\dfrac{f_i}{f_i'} \neq 0; \forall i \in I$, 那么

$$u_i = \frac{f_i}{f_i'} : u_i \longrightarrow \mathbf{C}^* = \mathbf{C}\backslash\{0\}.$$

所以,

$$\phi_{ij} = \frac{f_i}{f_j} = \frac{u_i}{u_j} \cdot \frac{f_i'}{f_j'} = \frac{u_i}{u_j}\phi_{ij}'. \tag{12.2}$$

根据定理 10.15, 由 $\{\phi_{ij}\}$ 和 $\{\phi_{ij}'\}$ 所定义的线丛是等价的.

设 L 是 M 上的全纯线丛, 且 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 L 的局部平凡化邻域. e_α 为局部全纯标架, 那么其上的 Hermite 度量就是一个正函数 $h_\alpha = \{e_\alpha, e_\alpha\}$. 相应的 Hermite 联络为 (1, 0) 形式 $\theta_\alpha = \partial h_\alpha h_\alpha^{-1} = \partial \log h_\alpha$, 其曲率 (1, 1) 形式为 $\Omega_\alpha = \bar\partial\partial \log h_\alpha$.

设 M 是一个复流形, E 是秩为 r 的全纯向量丛, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 E 的平凡化邻域.

$$\phi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbf{C}); \quad U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$$

是 E 的转换函数, 则

$$\phi_{\alpha\beta}\cdot\phi_{\beta\gamma}=\phi_{\alpha\gamma};\quad U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma\neq\varnothing.$$

由这个等式, 我们知道

$$\det\,\phi_{\alpha\beta}\cdot\det\,\phi_{\beta\gamma}=\det\,\phi_{\alpha\gamma},\tag{12.3}$$

$$\det\,\phi_{\alpha\beta}:U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow\mathbf{C}^*\tag{12.4}$$

都是全纯的, 由 (12.3) 和 (12.4) $\{\det\,\phi_{\alpha\beta}\}$ 可以看成某线丛的转换函数, 该线丛称为 E 的**行列式线丛**, 用 $\det\,E$ 记之.

$T^{1,0}(M)$ 为复流形 M 的全纯切丛, 若 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是局部坐标覆盖 $z^1_{(\alpha)},\cdots,z^n_{(\alpha)}$, 则 $T^{1,0}(M)$ 的转换函数是

$$\frac{\partial(z^1_{(\alpha)},\cdots,z^n_{(\alpha)})}{\partial(z^1_{(\beta)},\cdots,z^n_{(\beta)})}:U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow\mathrm{GL}(n,\mathbf{C}).$$

那么 $\det(T^{1,0}(M))$ 的转换函数 $\phi_{\alpha\beta}$ 为 $\det\,\dfrac{\partial(z^1_{(\alpha)},\cdots,z^n_{(\alpha)})}{\partial(z^1_{(\beta)},\cdots,z^n_{(\beta)})}$, 故 K_M 是 $\det(T^{1,0}(M))$ 的共轭线丛, 即 $K_M=\det(T^{1,0}(M))^*$.

当 M 为 Hermite 流形时, 其 Hermite 度量在局部坐标邻域 U_α 下可表示为 $ds^2=g^{(\alpha)}_{ij}dz^i_{(\alpha)}\otimes dz^j_{(\alpha)}$. 那么 $\det\,g_\alpha=\det\,(g^{(\alpha)}_{ij})$ 是 $\det(T^{1,0}(M))$ 在 U_α 上的 Hermite 度量的局部表示, 并且 $\det\,g_\alpha^{-1}$ 是 K_M 在 U_α 上的 Hermite 度量的局部表示. 所以, K_M 的联络形式和曲率形式的局部表示分别是 $\theta_\alpha=\partial\det\,g_\alpha^{-1}\,\det\,g_\alpha=-\partial\log\,\det\,g_\alpha$ 和 $\Omega_\alpha=-\bar\partial\partial\log\,\det\,g_\alpha=\partial\bar\partial\log\,\det\,g_\alpha$.

定义 12.2　*若对任意 $x\in M$ 和非零向量 $V\in T^{1,0}_x(M)$, 有*

$$(-\sqrt{-1})\omega(V,\bar V)>0,$$

n 维复流形上的实 (1, 1) 形式 ω 称为是正定的, 记为 $\omega>0$.

若对任意 $x\in M$ 和 $V\in T^{1,0}_x(M)$, 有

$$(-\sqrt{-1})\omega(V,\bar V)\geqslant 0,$$

称 ω 为半正定的, 记 $\omega\geqslant 0$.

设 L 为线丛, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 L 的平凡化邻域, L 的 Hermite 度量 h 是一个正函数族 $\{h_\alpha\}$. (1, 1) 形式 $\Theta_\alpha=\bar\partial\partial\log h_\alpha$ 是 Hermite 线丛 L 的曲率, 使得在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上, $h_\beta=|\phi_{\alpha\beta}|^2h_\alpha$; 这里 $\phi_{\alpha\beta}$ 是 L 的转换函数. 由于 $\phi_{\alpha\beta}$ 是全纯的, 故 $\Theta_\alpha=\bar\partial\partial\log h_\alpha=\bar\partial\partial\log h_\beta=\Theta_\beta$. 所以, $\Theta\,|_{U_\alpha}=\Theta_\alpha$ 是 M 的一个整体的 (1, 1) 形式.

定义 12.3 设 L 是线丛, 若 L 可被赋予 Hermite 度量 h, 使得

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log h > 0,$$

那么称 L 是**正线丛**.

根据定义 12.2, 实 (1, 1) 形式 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta > 0$, 即

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log h = -\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{\partial^2 \log h}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta > 0,$$

这等价于 Hermite 矩阵 $\left(\frac{-\partial^2 \log\ h}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta}\right)$ 是正定的.

设 $\sigma \in \Gamma(M, \mathcal{O}(L))$, 那么 L 的曲率形式具有另一个表示 $\Theta = \bar{\partial}\partial \log \|\sigma\|^2$. 由于 $\|\sigma\|^2 = h_\alpha \mid \sigma_\alpha \mid^2$, 这里 h_α 和 σ_α 分别是 Hermite 度量 h 和截形 σ 的局部表示, 故 $\log \|\sigma\|^2 = \log h_\alpha + \log \sigma_\alpha + \log \bar{\sigma}_\alpha$, 且 $\bar{\partial}\partial \log \|\sigma\|^2 = \bar{\partial}\partial \log h_\alpha = \bar{\partial}\partial \log h$, 那么 $\Theta = \bar{\partial}\partial \log \|\sigma\|^2$.

对于复流形上任意给定的全纯线丛 L , 我们亦可在 L 上赋予很多不同的 Hermite 度量. 设 $h = (h_\alpha)$ 与 $\tilde{h} = (\tilde{h}_\alpha)$ 是 L 上两个不同的 Hermite 度量, 则在 U_α 上 $h_\alpha = a_\alpha \tilde{h}_\alpha$, 这里 a_α 是 C^∞ 正函数.

同样的, 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上我们有

$$a_\alpha = \frac{h_\alpha}{\tilde{h}_\alpha} = \frac{|g_{\beta\alpha}|^2 h_\beta}{|g_{\beta\alpha}|^2 \tilde{h}_\beta} = a_\beta.$$

故 $a\mid_{U_\alpha} = a_\alpha$ 可看成是整个 M 上的 C^∞ 正函数, 而且

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta\mid_{U_\alpha} &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log h_\alpha = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log \tilde{h}_\alpha + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log a_\alpha,\\
\bar{\partial}\partial \log h_\alpha &= \bar{\partial}(\partial \log \tilde{h}_\alpha + \bar{\partial} \log a_\alpha) = \bar{\partial}\partial \log \tilde{h}_\alpha + \frac{1}{2}d(\partial \log a_\alpha + \bar{\partial} \log a_\alpha)\\
&= \bar{\partial}\partial \log \tilde{h}_\alpha + \frac{1}{2}\, d(\partial \log a - \bar{\partial} \log a),
\end{aligned}$$

所以,

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log h_\alpha - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log \tilde{h}_\alpha = d\left(\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(\partial \log a - \bar{\partial} \log a)\right).$$

令 $\eta := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}(\partial \log a - \bar{\partial} \log a)$, 则 η 是 M 上一个实的 1-形式, 满足

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\tilde{\Theta} := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log \tilde{h} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\bar{\partial}\partial \log h - d\eta = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta - d\eta.$$

根据 de Rham 定理, $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta$ 和 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\tilde{\Theta}$ 属于同一个同调群 $H^2(M,\mathbf{R})$ 的等价类. 即 $\left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta\right]=\left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\tilde{\Theta}\right]$, 这里 $\left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta\right]$ 是 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta$ 在 $H^2(M,\mathbf{R})$ 中的等价类. 用 $C(L)$ 来表示 $\left[\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta\right]$, 且称 $C(L)$ 为线丛 L 的 Chern 类.

现在我们将说明 CP^n 中超平面线丛是一个正线丛.

令 CP_n 是 n 维复射影空间, 且 $(z^0,z^1,\cdots,z^n)$ 是它的齐次坐标, $H=\left\{(z^0,\cdots,z^n)\in CP_n\middle|\sum_{\alpha=0}^n a_\alpha z^\alpha=0\right\}$ 是超平面. 那么, H 必为 CP_n 的除子. 设 $U_\alpha=\{z\in CP_n\mid z^\alpha\neq 0\}$ 是 CP_n 的一个开坐标邻域, $S_\alpha=a_1\frac{z^1}{z^\alpha}+\cdots+a_{\alpha-1}\frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha}+a_\alpha+a_{\alpha+1}\frac{z^{\alpha+1}}{z^\alpha}+\cdots+a_n\frac{z^n}{z^\alpha}$ 是 H 在 U_α 上的定义方程, 这里 $\frac{z^1}{z^\alpha},\cdots,\frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha},\frac{z^{\alpha+1}}{z^\alpha},\cdots,\frac{z^n}{z^\alpha}$ 是 CP_n 在 U_α 上的局部坐标. 那么 $\phi_{\alpha\beta}=\frac{s_\alpha}{s_\beta}=\frac{z^\beta}{z^\alpha}:U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow\mathbf{C}^*$ 是 $[H]$ 的转换函数, 由此转换函数决定的线丛称为 CP_n 的**超平面线丛**.

现在我们给线丛 $[H]$ 赋予 Hermite 度量 $h=(h_\alpha)_{0\leqslant\alpha\leqslant n}$, 这里 h_α 是 h 在 U_α 上的局部表示, 令

$$h_\alpha=\frac{|z^\alpha|^2}{|z|^2}=\frac{1}{\sum_{\alpha\neq\beta}^n\left|\frac{z^\beta}{z^\alpha}\right|^2+1}.$$

若用 $w^1=\frac{z^0}{z^\alpha},\cdots,w^\alpha=\frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha},w^{\alpha+1}=\frac{z^{\alpha+1}}{z^\alpha},\cdots,w^n=\frac{z^n}{z^\alpha}$ 来表示 U_α 上的局部坐标, 则

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta&=-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar\partial\log h_\alpha=-\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{\partial^2\log h_\alpha}{\partial w^\gamma\bar{w}^\delta}dw^\gamma\wedge\overline{dw^\delta}\\&=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{\partial^2\log\left(1+\sum_{\beta=1}^n|w^\beta|^2\right)}{\partial w^\gamma\partial\bar{w}^\delta}dw^\gamma\wedge\overline{dw^\delta}\\&=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\frac{1}{1+\left(\sum_{\beta=1}^n|w^\beta|^2\right)^2}\left(\left(1+\sum_{\beta=1}^n|w^\beta|^2\right)\delta_{\gamma\delta}-\bar{w}^\gamma w^\delta\right)dw^\gamma\wedge\overline{dw^\delta}.\end{aligned}$$

根据定义 12.2, $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta>0$, 可知 $[H]$ 是一个正线丛.

为简便起见, 常用 $L>0$ 来表明 L 是正线丛. 有时也用 $\Theta_L>0$ 来表明 L 是正线丛, 实际上是说 $\Theta:=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Theta_L$ 是正定的实 (1, 1) 形式. 类似的, $C(L)>0$ 具有同样的含义.

对于线丛而言, 两个线丛的张量积仍然是一个线丛, 而且与次序无关. 线丛和它自共轭线丛的张量积是一个平凡线丛, 为拓扑积 $M\times\mathbf{C}$, 故复流形上的所有全纯线丛关于张量积形成一个交换群. 通常我们分别用 $L+L_1$, $-L$ 和 mL; $m\in\mathbf{Z}$ 来表示 L 与 L_1 的张量积, L 的逆和 L 自身的 m 次张量积.

著名的 Bochner-Kodaira 恒等式的证明主要是依赖于对 $\Box\omega$ 的计算, 这里 ω 是一个 E 值微分形式, $\Box$ 是复的 Laplace 算子.

设 M 是 n 维 Kähler 流形, E 是秩为 r 的 Hermite 向量丛, $h=(h_{\lambda\mu})_{1\leqslant\lambda\mu\leqslant r}$ 和 $g=(g_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 分别是 E 和 M 的 Hermite 度量的度量矩阵的局部表示.

$$\Box=\bar\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\bar\partial:\Gamma(M,\varepsilon^{p,q}(E))\longrightarrow\Gamma(M,\varepsilon^{p,q}(E)).$$

设 $\omega\in\Gamma(M,\varepsilon^{p,q}(E))$, 它的局部表示是

$$\omega_\alpha:=\omega\,|_{U_\alpha}\equiv\frac{1}{p!q!}\sum_{\lambda=1}^{r}a^{\lambda}_{I_p\bar J_q}e_{\alpha,\lambda}dz^{I_p}\wedge dz^{\bar J_p},$$

这里 $\{e_{\alpha,\lambda}\}_{1\leqslant\lambda\leqslant r}$ 是 E 在 U_α 上的局部标架, U_α 是 E 的一个平凡化邻域.

现在我们就来计算 $\bar\partial\omega$, $\bar\partial^*\omega$ 与 $\Box\omega$.

设 $\omega\in\Gamma(M,\varepsilon^{p,q}(E))$, 故存在 ω 的局部表示

$$\begin{aligned}
&\bar\partial\omega\,|_{U_\alpha}\\
=&\frac{1}{p!q!}\sum_{\lambda=1}^{r}\bar\partial_j a^{\lambda}_{I_p\bar J_q}e_{\alpha,\lambda}d\overline{z^j}\wedge dz^{I_p}\wedge d\overline{z^{J_q}}\\
=&\frac{(-1)^p}{p!q!(q+1)!}\sum_{\lambda=1}^{r}\bar\partial_j a^{\lambda}_{I_p\bar J_q}e_{\alpha,\lambda}\delta^{s_1\cdots s_{q+1}}_{j_1\cdots j_q}dz^{I_p}\wedge d\overline{z^{s_1}}\wedge\cdots\wedge d\overline{z^{s_{q+1}}}\\
=&\frac{(-1)^p}{p!q!(q+1)!}\sum_{\lambda=1}^{r}\sum_{t=1}^{q+1}(-1)^{t-1}\overline{\partial}_{s_t}a^{\lambda}_{I_p\bar J_p}e_{\alpha,\lambda}\delta^{s_1\cdots\hat s_j\cdots s_{q+1}}_{j_1\cdots j_q}dz^{I_p}\wedge d\overline{z^{s_1}}\wedge\cdots\wedge d\overline{z^{s_{q+1}}}\\
=&\frac{(-1)^p}{p!(q+1)!}\sum_{\lambda=1}^{r}\sum_{t=1}^{q+1}(-1)^{t-1}\overline{\partial}_{s_t}a^{\lambda}_{I_p s_1\cdots\hat s_t\cdots s_{q+1}}e_{\alpha,\lambda}dz^{I_p}\wedge d\overline{z^{s_1}}\wedge\cdots\wedge d\overline{z^{s_{q+1}}},
\end{aligned}$$

它满足

$$(\bar\partial\omega)^{\lambda}_{I_p j_1\cdots j_{q+1}}=(-1)^p\sum_{\lambda=1}^{r}\sum_{t=1}^{q+1}(-1)^{t-1}\overline{\partial}_{j_t}a^{\lambda}_{I_p\bar j_1\cdots\hat{\bar j}_t\cdots\bar j_{q+1}}e_{\alpha,\lambda}. \tag{12.5}$$

这里 $\delta^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k}$ 是多重 Kronecker 指标,

$$\delta^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k}=\begin{cases}1, & \text{当 } i_1\cdots i_k \text{ 是 } j_1\cdots j_k \text{ 的偶置换时},\\ -1, & \text{当 } i_1\cdots i_k \text{ 是 } j_1\cdots j_k \text{ 的奇置换时},\\ 0, & \text{其他情况},\end{cases}$$

$\hat{\bar{j}}$ 表示在其中去掉 $\bar{j}$ 这个指标.

在计算 $\bar{\partial}^*\omega$ 之前, 我们还要引入 Hodge 算子

$$*:\Gamma(M,\varepsilon^{p,q})\longrightarrow\Gamma(M,\varepsilon^{n-q,n-p}).$$

Hodge 算子 $*$ 是一个线性算子, 它满足 $\langle\omega,\eta\rangle dv=\omega\wedge\overline{*\eta};\forall x\in M$, 这里 dv 是 Hermite 流形 M 的体积元.

假定

$$\omega=\frac{1}{p!q!}a_{I_p\bar{J}_q}dz^{I_p}\wedge\overline{dz^{J_q}},$$

$$\eta=\frac{1}{p!q!}b_{I_p\bar{J}_q}dz^{I_p}\wedge\overline{dz^{J_q}},$$

那么,

$$*\eta=\frac{i^n(-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)+np}}{p!q!(n-p)!(n-q)!}g_{A_qA_{n-q}\bar{B}_p\bar{B}_{n-p}}b^{\bar{B}_pA_q}dz^{A_{n-q}}\wedge\overline{dz^{B_{n-p}}}\tag{12.6}$$

就是 Hodge 算子 $*$ 的局部表示. 这里 A_{n-q} 与 B_{n-p} 分别是 A_q 与 B_p 在集 $\{1,\cdots,n\}$ 中之补集.

进一步,

$$\begin{aligned}\overline{*\eta}&=\frac{i^n(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)+np+n}}{p!q!(n-p)!(n-q)!}\overline{b^{\bar{B}_pA_q}}g_{B_pB_{n-p}\bar{A}_q\bar{A}_{n-q}}\overline{dz^{A_{n-q}}}\wedge dz^{B_{n-p}},\\ \omega\wedge\overline{*\eta}&=\frac{i^n(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)+np+n}}{(p!)^2(q!)^2(n-p)!(n-q)!}a_{I_p\bar{J}_q}\overline{b^{\bar{B}_pA_q}}g_{B_pB_{n-p}\bar{A}_q\bar{A}_{n-q}}\\ &\quad\cdot dz^{I_p}\wedge\overline{dz^{J_q}}\wedge\overline{dz^{A_{n-q}}}\wedge dz^{B_{n-p}}\\ &=\frac{i^n(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(p!)^2(q!)^2(n-p)!(n-q)!}a_{I_p\bar{J}_q}\overline{b^{\bar{B}_pA_q}}g_{B_pB_{n-p}\bar{A}_q\bar{A}_{n-q}}\\ &\quad\cdot dz^{I_p}\wedge dz^{B_{n-p}}\wedge\overline{dz^{J_q}}\wedge\overline{dz^{A_{n-q}}}\\ &=\frac{i^n(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(p!)^2(q!)^2(n-p)!(n-q)!}a_{I_p\bar{J}_q}\overline{b^{\bar{B}_pA_q}}g_{B_pB_{n-p}\bar{A}_q\bar{A}_{n-q}}\\ &\quad\cdot\delta_{I_pB_{n-p}}\delta_{J_qA_{n-q}}dz\wedge d\bar{z}.\end{aligned}$$

这里 $dz = dz^1\wedge\cdots\wedge dz^n$, $d\bar{z} = d\bar{z}^1\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^n$, 且 $\delta_{I_pB_{n-p}}$ 与 $\delta_{J_qA_{n-q}}$ 都是多重 Kronecker 符号. 由于

$$g_{B_pB_{n-p}\bar{A}_q\bar{A}_{n-q}}\delta_{I_pB_{n-p}}\delta_{J_qA_{n-q}} = \delta_{B_pB_{n-p}}\det g\delta_{I_qB_{n-p}}\delta^{A_qA_{n-q}}_{J_pA_{n-q}}$$
$$= \det g(n-p)!\,\delta^{B_p}_{I_p}(n-q)!\,\delta^{A_q}_{J_p},$$

故

$$\begin{aligned}\omega\wedge\overline{*\eta} &= \frac{i^n(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{(p!)^2(q!)^2}a_{I_p\bar{J}_q}\overline{b^{\bar{B}_pA_q}}\delta^{B_p}_{I_p}\delta^{A_q}_{J_q}dz\wedge d\bar{z}\\ &= \frac{i^n(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{p!q!}a_{I_p\bar{J}_q}\overline{b^{\bar{B}_pA_q}}\det g\; dz\wedge d\bar{z}\\ &= \langle\omega,\eta\rangle dv,\end{aligned}$$

这里 $i^n(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\det g\; dz\wedge d\bar{z} = dv$. 显然根据 (12.6), 我们有 $*1 = dv$.

命题 12.4 Hodge 算子满足如下性质:

(1) $*$ 是实算子, 即对任意的实形式 ω, $*\omega$ 仍是一个实形式.

(2) 若 $\omega\in\varepsilon^{p,q}(M)$, 则 $**\omega = (-1)^{p+q}\omega$.

证明: 为证明 (1), 只需证对 $\forall\omega\in\varepsilon^{p,q}(M)$ 和任意 $0\leqslant p,q\leqslant n$, 都有 $\overline{*\omega} = *\bar{\omega}$, 这可以由 Hodge 算子的局部表示 (12.6) 直接验证.

现在我们证明 (2), 设 $\omega\in\varepsilon^{p,q}(M)$,

$$\omega = \frac{1}{p!q!}a_{I_p\bar{J}_p}dz^{I_p}\wedge dz^{\overline{J_p}}.$$

则

$$*\omega = \frac{i^n(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)+np}}{(p!)^2(q!)^2(n-p)!(n-q)!}g_{A_qA_{n-q}\bar{B}_p\bar{B}_{n-p}}a^{\bar{B}_pA_q}dz^{A_{n-q}}\wedge d\overline{B_{n-p}},$$

$$\begin{aligned}**\omega &= \frac{(-1)^n(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)+np+\dfrac{1}{2}n(n-1)+(n-q)n}}{(p!)^2(q!)^2(n-p)!(n-q)!}g_{S_{n-p}S_p,\bar{R}_{n-q}\bar{R}_q}g^{\bar{R}_{n-q}A_{n-q}}\\ &\quad\cdot g^{\bar{B}_{n-p}S_{n-p}}g_{A_qA_{n-q}\bar{B}_p\bar{B}_{n-p}}a^{\bar{B}_pA_q}dz^{S_p}\wedge d\overline{z^{R_q}}\\ &= \frac{(-1)^{n(p+q)}}{(p!)^2(q!)^2(n-p)!(n-q)!}g_{S_{n-p}S_p,\bar{R}_{n-q}\bar{R}_q}g^{\bar{R}_{n-q}A_{n-q}}\\ &\quad\cdot g^{\bar{B}_{n-p}S_{n-p}}g_{A_qA_{n-q}\bar{B}_p\bar{B}_{n-p}}g^{\bar{B}_pL_p}g^{\bar{M}_qA_q}A_{L_p\bar{M}_q}dz^{S_p}\wedge d\overline{z^{R_q}}\\ &= \frac{(-1)^{n(p+q)}}{(p!)^2(q!)^2(n-p)!(n-q)!}g^{\bar{R}_{n-q}\bar{M}_qA_{n-q}A_q}g^{\bar{B}_{n-p}\bar{B}_pS_{n-p}L_p}\\ &\quad\cdot g_{S_{n-p}S_p,\bar{R}_{n-q}\bar{R}_q}g_{A_qA_{n-q}\bar{B}_p\bar{B}_{n-p}}dz^{S_p}\wedge d\overline{z^{R_q}}.\end{aligned}$$

由于

$$g^{\bar{R}_{n-q}\bar{M}_qA_{n-q}A_q}g_{A_qA_{n-q}\bar{B}_p\bar{B}_{n-p}}=\delta^{R_{n-q}M_q}_{B_pB_{n-p}}(-1)^{q(n-q)},$$

$$\delta^{R_{n-q}M_q}_{B_pB_{n-p}}g^{\bar{B}_{n-p}\bar{B}_pS_{n-p}L_p}=\delta^{S_{n-p}L_p}_{R_{n-q}M_q}\det g^{-1}(-1)^{p(n-p)},$$

$$\begin{aligned}\delta^{S_{n-p}L_p}_{R_{n-q}M_q}g_{S_{n-p}S_p\bar{R}_{n-q}\bar{R}_q}&=\det g\,\delta^{S_{n-p}L_p}_{S_{n-p}S_p}\delta^{R_{n-q}M_q}_{R_{n-q}R_q}\\&=(n-p)!(n-q)!\delta^{M_q}_{R_q}\delta^{L_p}_{S_p}\det g,\end{aligned}$$

利用上面的三个等式, 可得

$$\begin{aligned}**\omega&=\frac{(-1)^{n(p+q)+q(n-q)+p(n-p)}}{(p!)^2(q!)^2}\delta^{M_q}_{R_q}\delta^{L_p}_{S_p}dz^{S_p}\wedge\overline{dz^{R_q}}\\&=\frac{(-1)^{p+q}}{(p!)^2(q!)^2}a_{L_p\bar{M}_q}\delta^{M_q}_{R_q}\delta^{L_p}_{S_p}dz^{S_p}\wedge\overline{dz^{R_q}}\\&=\frac{(-1)^{p+q}}{p!q!}a_{S_p\bar{R}_q}dz^{S_p}\wedge\overline{dz^{R_q}}=(-1)^{p+q}\omega.\end{aligned}$$

□

下面的讨论是在 M 是紧复流形的情形下进行的.

根据定义, $\bar{\partial}^*$ 是 $\bar{\partial}$ 关于内积的自共轭算子. 故若 $\omega\in\varepsilon^{p,q}(M)$ 且 $\eta\in\varepsilon^{p,q+1}(M)$, 则

$$(\bar{\partial}\omega,\eta)=(\omega,\bar{\partial}^*\eta).$$

利用 Hodge 算子,

$$\begin{aligned}(\bar{\partial}\omega,\eta)&=\int_M\bar{\partial}\omega\wedge\overline{*\eta}=\int_M\bar{\partial}(\omega\wedge\overline{*\eta})-(-1)^{p+q}(\omega\wedge\overline{\partial*\eta})\\&=\int_M d(\omega\wedge\overline{*\eta})+(-1)^{p+q+1}(\omega\wedge\overline{\partial*\eta})\\&=\int_M-(\omega\wedge**\overline{\partial*\eta})=\int_M\omega\wedge*\overline{-*\partial*\eta},\end{aligned}$$

因此,

$$\bar{\partial}^*=-*\partial*:\varepsilon^{p,q+1}(M)\longrightarrow\varepsilon^{p,q}(M).\tag{12.7}$$

当 M 为 Kähler 流形时, 如下命题成立.

命题 12.5　对 $\omega\in\varepsilon^{p,q}(M)$,

$$\partial\omega=D'\omega,$$

这里 $\partial=\sum_{i=1}^n dz^i\frac{\partial}{\partial z^i}$, 且 $D'=dz^i\nabla_i$, ∇_i 是协变导数.

证明: 假设 ω 的表示是

$$\omega = \frac{1}{p!q!} a_{i_1\cdots i_p \bar{J}_q} dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p} \wedge dz^{\bar{J}_q},$$

则

$$D'\omega = \frac{1}{p!q!} \left(\frac{a_{i_1\cdots i_p \bar{J}_q}}{\partial z^i} - \sum_{s=1}^{p} \Gamma^t_{i_s i} a_{i_1\cdots i_{s-1} t i_{s+1} \cdots i_p \bar{J}_q} \right) dz^i \wedge dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p} \wedge dz^{\bar{J}_q}$$

$$= \frac{1}{p!q!} \frac{\partial a_{i_1\cdots i_p \bar{J}_q}}{\partial z^i} dz^i \wedge dz^{i_1} \wedge \cdots \wedge dz^{i_p} \wedge dz^{\bar{J}_q}.$$

最后一个等式成立是因为在 Kähler 流形上有 $\Gamma^t_{i_s i} = \Gamma^t_{i i_s}$. □

类似的, 我们还有如下命题:

命题 12.6 设 $\omega = \frac{1}{p!q!} a_{I_p \bar{j}_1 \cdots \bar{j}_q} dz^{I_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_p}$, 则

$$(\bar{\partial}\omega)_{I_p \bar{s}_0 \cdots \bar{s}_q} = (-1)^p \sum_{t=0}^{q} (-1)^t \bar{\nabla}_{s_t} a_{I_p \bar{s}_0 \cdots \hat{\bar{s}}_t \cdots \bar{s}_q}.$$

证明:
$$\bar{\partial}\omega = \frac{1}{p!q!} \sum_{j=1}^{n} \partial_{\bar{j}} a_{I_p \bar{j}_1 \cdots \bar{j}_q} d\bar{z}^j \wedge dz^{I_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_q}$$
$$= \frac{(-1)^p}{p!q!} \sum_{j=1}^{n} \bar{\partial}_j a_{I_p \bar{j}_1 \cdots \bar{j}_q} dz^{I_p} \wedge d\bar{z}^j \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{j_q}$$
$$- \frac{(-1)^p}{p!q!} \sum_{j=1}^{n} a_{I_p \bar{j}_1 \cdots \bar{j}_s \bar{t} \bar{j}_{s+1} \bar{j}_q} \overline{\Gamma^t_{j j_s}} dz^{I_p} \wedge \overline{dz^j} \wedge \overline{dz^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{dz^{j_q}}$$
$$= \frac{(-1)^p}{(q+1)!p!q!} \sum_{j=1}^{n} \bar{\nabla}_j a_{I_p \bar{j}_1 \cdots \bar{j}_q} \delta^{j_1 \cdots j_q}_{s_0 \cdots s_q} dz^{I_p} \wedge d\bar{z}^{s_0} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{s_q}$$
$$= \frac{(-1)^p}{p!(q+1)!} \sum_{t=0}^{q} (-1)^t \bar{\nabla}_{s_t} a_{I_p \bar{s}_0 \cdots \hat{\bar{s}}_t \cdots s_q} dz^{I_p} \wedge d\bar{z}^{s_0} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^{s_q},$$

这里 $\bar{\nabla}_j$ 是 ∇_j 的共轭. □

命题 12.7 对 $\eta \in \varepsilon^{p,q+1}(M)$,

$$(\bar{\partial}^*\eta)^{\bar{I}_p j_1 \cdots j_q} = (-1)^{p+1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial z^j} + \frac{\partial \log(\det g)}{\partial z^j} \right) \eta^{\bar{I}_p j j_1 \cdots j_q}.$$

证明: 根据定义,

$$(\bar{\partial}\omega, \eta) = (\omega, \bar{\partial}^*\eta); \quad \forall \omega \in \varepsilon^{p,q}(M),$$

$$
\begin{aligned}
(\bar\partial\omega,\eta) &= \frac{1}{p!(q+1)!}\int_M (\bar\partial\omega)_{I_p\bar j_0\cdots\bar j_q}\overline{\eta^{\bar I_p j_0\cdots j_q}}\det g\, i^n(-1)^{\frac12 n(n-1)}dz\wedge\overline{dz}\\
&= \frac{(-1)^p}{p!(q+1)!}\int_M \sum_{s=0}^{q}(-1)^s\frac{\bar\partial a_{I_p\bar j_0\cdots\hat{\bar j}_s\cdots\bar j_q}}{\partial\bar z^{j_s}}\overline{\eta^{\bar I_p j_0\cdots j_q}}\det g\\
&\qquad\cdot i^n(-1)^{\frac12 n(n-1)}dz\wedge\overline{dz}\\
&= \frac{(-1)^p}{p!(q+1)!}\int_M \sum_{s=0}^{q}(-1)^s\frac{\bar\partial}{\partial\bar z^{j_s}}(a_{I_p\bar j_0\cdots\hat{\bar j}_s\cdots\bar j_q}\overline{\eta^{\bar I_p j_0\cdots j_q}\det g})\\
&\qquad\cdot i^n(-1)^{\frac12 n(n-1)}dz\wedge\overline{dz}\\
&\quad+\frac{(-1)^p}{p!(q+1)!}\int_M \sum_{s=0}^{q}(-1)^{s+1}a_{I_p\bar j_0\cdots\hat{\bar j}_s\cdots\bar j_q}\overline{\frac{\partial}{\partial z^{j_s}}\eta^{\bar I_p j_0\cdots j_q}\det g}\\
&\qquad\cdot i^n(-1)^{\frac12 n(n-1)}dz\wedge\overline{dz}\\
&\quad+\frac{(-1)^p}{p!(q+1)!}\int_M \sum_{s=0}^{q}(-1)^{s+1}a_{I_p\bar j_0\cdots\hat{\bar j}_s\cdots\bar j_q}\overline{\eta^{\bar I_p j_0\cdots j_q}\frac{\partial\det g}{\partial z_{j_s}}}\\
&\qquad\cdot i^n(-1)^{\frac12 n(n-1)}dz\wedge\overline{dz}\\
&= \frac{(-1)^{p+1}}{p!q!}\int_M a_{I_p\bar j_1\cdots\bar j_q}\sum_{j=1}^{n}\overline{\frac{\partial}{\partial z^j}\eta^{\bar I_p j j_1\cdots j_q}\det g}\\
&\qquad\cdot i^n(-1)^{\frac12 n(n-1)}dz\wedge\overline{dz}\\
&\quad+\frac{(-1)^{p+1}}{p!q!}\int_M a_{I_p\bar j_1\cdots\bar j_q}\sum_{j=1}^{n}\overline{\frac{\partial\log(\det g)}{\partial z^j}\eta^{\bar I_p j j_1\cdots j_q}\det g}\\
&\qquad\cdot i^n(-1)^{\frac12 n(n-1)}dz\wedge\overline{dz}.
\end{aligned}
$$

故

$$
(\bar\partial^*\eta)^{\bar I_p j_1\cdots j_q} = (-1)^{p+1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z^j}+\frac{\partial\log(\det g)}{\partial z^j}\right)\eta^{\bar I_p j j_1\cdots j_q},
$$

这里 $a_{I_p\bar J_p}=(\omega)_{I_p\bar J_p}$, 上面第三个等式成立是利用了分部积分. □

命题 12.8　在 Kähler 流形的情形下, 对 $\omega\in\varepsilon^{p,q+1}(M)$ 还有

$$
(\bar\partial^*\omega)_{I_p\bar j_1\cdots\bar j_q} = (-1)^{p+1}g^{\bar j i}\nabla_i\omega_{I_p\bar j\bar j_1\cdots\bar j_q}.
$$

证明: 根据命题 12.7,

$$(\bar{\partial}^*\omega)^{\bar{I}_p j_1\cdots j_q} = (-1)^{p+1}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z^j} + \frac{\partial \log(\det g)}{\partial z^j}\right)\omega^{\bar{I}_p j j_1\cdots j_q}.$$

根据定义,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\nabla_j\omega^{\bar{I}_p j j_1\cdots j_q} &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z^j}\omega^{\bar{I}_p j j_1\cdots j_q} + \sum_{j=1}^{n}\Gamma_{kj}^{j}\omega^{\bar{I}_p k j_1\cdots j_q}\\ &\quad + \sum_{j=1}^{n}\Gamma_{kj}^{j_1}\omega^{\bar{I}_p j k j_1\cdots j_q} + \cdots + \sum_{j=1}^{n}\Gamma_{kj}^{j_q}\omega^{\bar{I}_p j j_1\cdots j_{q-1}k}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z^j}\omega^{\bar{I}_p j j_1\cdots j_p} + \sum_{j=1}^{n}\omega^{\bar{I}_p k j_1\cdots j_q}\Gamma_{kj}^{j}.\end{aligned}$$

最后一个等式成立是因为 $\Gamma_{kj}^{i} = \Gamma_{jk}^{i}$ 且 $\omega^{\bar{I}_p j j_i\cdots j_{i-1}kj_{i+1}\cdots j_q}$ 是关于指标 j 与 k 反对称的.

另一方面,

$$\sum_{j=1}^{n}\Gamma_{kj}^{j} = \sum_{j=1}^{n}\Gamma_{jk}^{j} = \sum_{s,j=1}^{n}\frac{\partial g_{j\bar{s}}}{\partial z^k}g^{\bar{s}j} = \frac{\partial}{\partial z^k}\log(\det g),$$

所以,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\nabla_j\omega^{\bar{I}_p j j_1\cdots j_q} &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial z^j} + \frac{\partial \log(\det g)}{\partial z^j}\right)\omega^{\bar{I}_p j j_1\cdots j_q} = (-1)^{p+1}(\partial^*\omega)^{\bar{I}_p j_1\cdots j_q},\\ (\bar{\partial}^*\omega)_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q} &= (\bar{\partial}^*\omega)^{\bar{S}_p t_1\cdots t_q}g_{I_p\bar{S}_p}g_{t_1\bar{j}_i}\cdots g_{t_q\bar{j}_q}\\ &= (-1)^{p+1}\sum_{j=1}^{n}\nabla_j\omega^{\bar{S}_p j t_1\cdots t_q}g_{I_p\bar{S}_p}\cdots g_{t_1\bar{j}_1}\cdots g_{t_q\bar{j}_q}\\ &= (-1)^{p+1}\sum_{j=1}^{n}\nabla_j(\omega^{\bar{S}_p j t_1\cdots t_q}g_{I_p\bar{S}_p}g_{t_1\bar{j}_1}\cdots g_{t_q\bar{j}_q})\\ &= (-1)^{p+1}\sum_{j=1}^{n}\nabla_j(\omega_{I_p\bar{t}\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}g^{\bar{t}j})\\ &= (-1)^{p+1}\sum_{j=1}^{n}g^{\bar{t}j}\nabla_j\omega_{I_p\bar{t}\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q},\end{aligned}$$

这里我们用到了 $\nabla_i g_{j\bar{k}} = 0 = \nabla_i g^{\bar{k}j}$; 对任意 $1 \leqslant i,j,k \leqslant n$. □

定理 12.9 设 M 是紧 Kähler 流形, 对 $\forall\omega = \dfrac{1}{p!q!}a_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}dz^{I_p}\wedge d\bar{z}^{j_1}\wedge\cdots\wedge d\bar{z}^{j_q}\in\varepsilon^{p,q}(M)$, 有

$$\begin{aligned}(\Box\phi)_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q} = &-\sum g^{\bar{j}i}\nabla_i\bar{\nabla}_j a_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}\\ &+\sum_{t=1}^{p}\sum_{s=1}^{q}R^{k\ \ \bar{l}}_{i_t\bar{j}_s}a_{i_1\cdots i_{s-1}ki_{s+1}\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{t-1}\bar{l}\bar{j}_{t+1}\cdots\bar{j}_q}\\ &-\sum_{s=1}^{q}R^{\bar{l}}_{\bar{j}}a_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{s_1}\bar{l}\bar{j}_{s+1}\cdots\bar{j}_q},\end{aligned}$$

这里 $R^{\bar{l}}_{\bar{j}} = R_{\bar{j}k}g^{\bar{l}k}$, $R^{k\ \bar{l}}_{i\bar{j}} = g^{\bar{t}k}g^{\bar{l}s}R_{\bar{t}i\bar{j}s}$.

证明: 根据命题 12.6,

$$(\bar{\partial}\omega)_{I_p\bar{j}_0\cdots\bar{j}_q} = (-1)^p\sum_{t=0}^{q}(-1)^t\bar{\nabla}_{j_t}a_{I_p\bar{j}_0\cdots\hat{\bar{j}}_t\cdots\bar{j}_q}.$$

再根据命题 12.8,

$$\begin{aligned}(\bar{\partial}^*\bar{\partial}\omega)_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q} &= (-1)^{p+1}g^{\bar{j}i}\nabla_i(\bar{\partial}\omega)_{I_p\bar{j}\bar{j}_1\cdots\bar{j}_t\cdots\bar{j}_q}\\ &= -g^{\bar{j}i}\nabla_i\bar{\nabla}_j a_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}\\ &\quad -\sum_{t=1}^{q}(-1)^s g^{\bar{j}i}\nabla_i\bar{\nabla}_{j_s}a_{I_p\bar{j}\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{s-1}\hat{\bar{j}}_s\bar{j}_{s+1}\cdots\bar{j}_q}.\end{aligned}$$

类似的,

$$(\bar{\partial}^*\omega)_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{q-1}} = (-1)^{p+1}g^{\bar{j}i}\nabla_i a_{I_p\bar{j}\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q},$$

$$\begin{aligned}(\bar{\partial}\bar{\partial}^*\omega)_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q} &= (-1)^p\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s+1}\bar{\nabla}_{j_t}(\bar{\partial}^*\omega)_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{s-1}\hat{\bar{j}}_s\bar{j}_{s+1}\cdots\bar{j}_q}\\ &= -\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s+1}\bar{\nabla}_{j_s}(g^{\bar{j}i}\nabla_i a_{I_p\bar{j}\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{s-1}\hat{\bar{j}}_s\bar{j}_{s+1}\cdots\bar{j}_q})\\ &= -\sum_{s=1}^{q}g^{\bar{j}i}(-1)^{s+1}\bar{\nabla}_{j_s}\nabla_i a_{I_p\bar{j}\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{s-1}\hat{\bar{j}}_s\bar{j}_{s+1}\cdots\bar{j}_q}.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}(\Box\omega)_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q} &= (\bar{\partial}\bar{\partial}^*\omega)_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q} + (\bar{\partial}^*\bar{\partial}\omega)_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}\\ &= -g^{\bar{j}i}\nabla_i\bar{\nabla}_j a_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}\\ &\quad -\sum_{s=1}^{q}g^{\bar{j}i}(-1)^s(\nabla_i\bar{\nabla}_{js}-\bar{\nabla}_{js}\nabla_i)a_{I_p\bar{j}\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{s-1}\hat{\bar{j}}_s\bar{j}_{s+1}\cdots\bar{j}_q}.\end{aligned}\tag{12.8}$$

因此, 余下我们要计算的就是 $[\nabla_i,\bar\nabla_{js}]\ a_{I_p\bar j\bar j_1\cdots\bar j_{s-1}\hat{\bar j}_s\bar j_{s+1}\cdots\bar j_q}$ 了.

为简便起见, 我们只需对 (1, 0) 形式 a_kdz^k 与 (0, 1) 形式 $b_{\bar k}d\overline{z^k}$ 来进行计算. 而对每个指标 $i_1\cdots i_p$ 与 $\bar j\bar j_1\cdots\bar j_{s-1}\bar j_{s+1}\cdots\bar j_q$, $[\nabla_i,\bar\nabla_j]$ 作用在

$$a_{i_1\cdots i_p\bar j\bar j_1\cdots\bar j_{s-1}\hat{\bar j}_s\bar j_{s+1}\cdots\bar j_q}$$

上的结果都分别类似于其作用在 (1, 0) 形式与 (0, 1) 形式上. 所以,

$$\begin{aligned}[\nabla_i,\bar\nabla_j]a_k&=\nabla_i\bar\nabla_ja_k-\bar\nabla_j\nabla_ia_k=\nabla_i\bar\partial_ja_k-\bar\nabla_j(\partial_ia_k-\Gamma^t_{ki}a_t)\\&=\partial_i\bar\partial_ja_k-\bar\partial_ja_t\Gamma^t_{ki}-\bar\partial_j\partial_ia_k+\bar\partial_j(\Gamma^t_{ki}a_t)\\&=-\bar\partial_ja_t\Gamma^t_{ki}+\bar\partial_ja_t\Gamma^t_{ki}+\bar\partial_j\Gamma^t_{ki}a_t\\&=\bar\partial_j\Gamma^t_{ki}a_t=R^t_{k\bar ji}a_t.\end{aligned}\tag{12.9}$$

类似的, 有

$$\begin{aligned}[\nabla_i,\bar\nabla_j]b_{\bar k}&=\nabla_i\bar\nabla_jb_{\bar k}-\bar\nabla_j\nabla_ib_{\bar k}=\nabla_i(\bar\partial_jb_{\bar k}-\overline{\Gamma^t_{kj}}b_{\bar t})-\bar\nabla_j(\partial_ib_{\bar k})\\&=\partial_i\bar\partial_jb_{\bar k}-\partial_i\overline{\Gamma^t_{kj}}b_{\bar t}-\overline{\Gamma^t_{ij}}\partial_ib_{\bar t}-\bar\partial_j\partial_ib_{\bar k}+\partial_ib_{\bar t}\overline{\Gamma^t_{kj}}\\&=-\partial_i\overline{\Gamma^t_{kj}}b_{\bar t}=-\overline{\bar\partial_i\Gamma^t_{kj}}b_{\bar t}=-\overline{R^t_{k\bar ji}}b_{\bar t}=-R_{\bar k}{}^{\bar t}{}_{\bar ji}b_{\bar t}.\end{aligned}\tag{12.10}$$

将 (12.9) 与 (12.10) 应用在 $[\nabla_i,\bar\nabla_{js}]a_{i_1\cdots i_p\bar j\bar j_1\cdots\bar j_{s-1}\bar j_{s+1}\cdots\bar j_q}$ 上, 我们得到

$$\begin{aligned}&[\nabla_i,\bar\nabla_{js}]a_{i_1\cdots i_p\bar j\bar j_1\cdots\bar j_{s-1}\bar j_{s+1}\cdots\bar j_q}\\=&\sum_{k=1}^pR^l_{i_k\bar j_si}a_{i_1\cdots l(i_k)\cdots i_p\bar j\bar j_1\cdots\bar j_{s-1}\bar j_{s+1}\cdots\bar i_q}-R_{\bar j}{}^{\bar l}{}_{\bar j_si}a_{I_p\bar l\bar j_1\cdots\bar j_{s-1}\bar j_{s+1}\cdots\bar i_q}\\&-\sum_{k<s}R_{\bar j_k}{}^{\bar l}{}_{\bar j_si}a_{I_p\bar j\bar j_1\cdots\bar l(\bar j_k)\cdots\hat{\bar j}_s\cdots\bar i_q}-\sum_{k>s}R_{\bar j_k}{}^{\bar l}{}_{\bar j_si}a_{I_p\bar j\bar j_1\cdots\hat{\bar j}_s\cdots l(\bar j_k)\cdots\bar i_q}.\end{aligned}$$

由于 $g^{\bar ji}R_{\bar j}{}^{\bar l}{}_{\bar j_si}=R_{\bar j_s}{}^{\bar l}$ 且 $g^{\bar ji}R_{\bar j_k}{}^{\bar l}{}_{\bar j_si}=R_{\bar j_k}{}^{\bar l}{}_{\bar j_s}{}^{\bar j}$, 故

$$\begin{aligned}&g^{\bar ji}\sum_{s=1}^q(-1)^s[\nabla_i,\bar\nabla_s]a_{I_p\bar j\bar j_1\cdots\bar j_{s-1}\bar j_{s+1}\bar j_q}\\=&\sum_{s=1}^q(-1)^s\sum_{t=1}^pR^l{}_{i_t\bar j_s}{}^{\bar j}a_{i_1\cdots i_{t-1}li_{t+1}i_p\bar j\bar j_1\cdots\bar j_{s-1}\bar j_{s+1}\cdots\bar j_q}\\&-\sum_{s=1}^q(-1)^sR_{\bar j_s}{}^{\bar l}a_{I_p\bar l\bar j_1\cdots\bar j_{s-1}\bar j_{s+1}\bar j_q}\\&-\sum_{s=1}^q(-1)^s\sum_{k<s}R_{\bar j_k}{}^{\bar l}{}_{\bar j_s}{}^{\bar j}a_{I_p\bar j\bar j_1\cdots\bar j_{k-1}\bar l(\bar j_k)\bar j_{k+1}\cdots\hat{\bar j}_s\cdots\bar j_q}\\&-\sum_{s=1}^q(-1)^s\sum_{k>s}R_{\bar j_k}{}^{\bar l}{}_{\bar j_s}{}^{\bar j}a_{I_p\bar j\bar j_1\cdots\hat{\bar j}_s\cdots\bar j_{k-1}\bar l(\bar j_k)\bar j_{k+1}\cdots\bar j_q},\end{aligned}\tag{12.11}$$

这里符号 $\bar{l}(\bar{j}_k)$ 与 $l(j_k)$ 分别表示用 $\bar{l}$ 来替代 $\bar{j}_k$, 和用 l 来替代 j_k. 由于 $R_{\bar{j}_k}{}^{\bar{l}}{}_{\bar{j}_s}{}^{\bar{j}} = R_{\bar{j}_k}{}^{\bar{j}}{}_{\bar{j}_s}{}^{\bar{l}}$, 故 (12.11) 中的最后两项消灭. 所以, 我们得到了复 Laplace 的局部表示. □

设 L 为紧 Kähler 流形上的 Hermite 线丛, h 是它的 Hermite 度量. 对于作用在 $\Gamma(M,\varepsilon^{p,q}(L))$ 上的 $\square_L$, 我们也希望得到类似的公式. 而一个形式 $\omega \in \Gamma(M,\varepsilon^{p,q}(L))$ 对应于一组 (p,q) 形式 ω_α, 这里 $\{U_\alpha\}$ 是一个包含于 L 的平凡化邻域的局部坐标开覆盖, 而 ω_α 定义在 U_α 上.

设 $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ 是 L 的转换函数, 则在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上,

$$\omega_\alpha = \phi_{\alpha\beta}\omega_\beta.$$

$$\begin{aligned}(\square\omega)_{I_p\bar{J}_q} = & -g^{\bar{j}i}\nabla_i\bar{\nabla}_{j}a_{I_p\bar{J}_q} \\ & -\sum_{s=1}^{q}(-1)^s\sum_{t=1}^{p}R^l{}_{i_t\bar{j}_s}{}^{\bar{l}}a_{i_1\cdots i_{t-1}li_{t+1}\cdots i_p\bar{j}\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{s-1}\bar{j}_{s+1}\cdots\bar{j}_q} \\ & +\sum_{s=1}^{q}R_{\bar{j}_s}{}^{\bar{l}}a_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{s-1}\bar{j}_{s+1}\cdots\bar{j}_q}.\end{aligned} \tag{12.12}$$

设 $\omega,\eta \in \Gamma(M,\varepsilon^{p,q}(L))$, 则

$$(\omega,\eta) = \int_M h_\alpha\omega_\alpha\wedge\overline{*\eta_\alpha}. \tag{12.13}$$

由于 $h_\beta = |\phi_{\alpha\beta}|^2 h_\alpha$, 故在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上 $h_\alpha\omega_\alpha\wedge\overline{*\eta_\alpha} = h_\beta\omega_\beta\wedge\overline{*\eta_\beta}$, 因此 (12.13) 在 M 上是合理的.

我们知道, 若 $\omega \in \Gamma(M,\varepsilon^{p,q}(L))$, 则 $\bar{\partial}\omega \in \Gamma(M,\varepsilon^{p,q+1}(L))$. 而 $\omega \in \Gamma(M,\varepsilon^{p,q}(L))$ 又表明对每个 $\alpha \in I$, 都有 $\omega_\alpha \in \Gamma(U_\alpha,\varepsilon^{p,q}(L))$, 这里 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 M 的一个包含于 L 的平凡化邻域的局部开覆盖. 那么, 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上 $\omega_\alpha = \phi_{\alpha\beta}\omega_\beta$.

但是对于算子 ∂ 来说, $\partial\omega$ 不再是 L 值的微分形式. 这是因为在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上, $\partial\omega_\alpha = \partial\phi_{\alpha\beta}\omega_\beta + \phi_{\alpha\beta}\partial\omega_\beta$. 一般的, $\partial\phi_{\alpha\beta} \neq 0$, 故 $\partial\omega$ 不再是 L 值的微分形式了.

设 $h = (h_\alpha)$ 是 L 的 Hermite 度量, 我们定义映射 $D_L : \Gamma(M,\varepsilon^{p,q}(L)) \longrightarrow \Gamma(M,\varepsilon^{p,q+1}(L))$ 如下:

$$D_L\omega_\alpha = \partial\omega_\alpha + \partial\log h_\alpha\omega_\alpha.$$

则

$$\begin{aligned}D_L\omega_\alpha &= \partial\omega_\alpha + \partial\log h_\alpha\omega_\alpha \\ &= \partial(\phi_{\alpha\beta}\omega_\beta) + \partial\log\,(h_\beta|\phi_{\beta\alpha}|^2)\phi_{\alpha\beta}\omega_\beta \\ &= \partial\phi_{\alpha\beta}\omega_\beta + \phi_{\alpha\beta}\partial\omega_\beta + (\partial\log h_\beta + (\partial\log\phi_{\beta\alpha}))\phi_{\alpha\beta}\omega_\beta \\ &= \partial\phi_{\alpha\beta}\phi_{\beta\alpha}\phi_{\alpha\beta}\omega_\beta + \phi_{\alpha\beta}\partial\omega_\beta + (\partial\log h_\beta\omega_\beta)\phi_{\alpha\beta} + \partial\log\phi_{\beta\alpha}\phi_{\alpha\beta}\omega_\beta\end{aligned}$$

$$= \partial \log \phi_{\alpha\beta}\phi_{\alpha\beta}\omega_\beta + \phi_{\alpha\beta}\partial\omega_\beta + (\partial \log h_\beta \omega_\beta)\phi_{\alpha\beta} + \partial \log \phi_{\beta\alpha}\phi_{\alpha\beta}\omega_\beta$$
$$= \phi_{\alpha\beta}(\partial\omega_\beta + \partial \log h_\beta\omega_\beta) = \phi_{\alpha\beta}D_L\omega_\beta.$$

记 $D_L = dz^i\nabla_i^L$, 则 $\nabla_i^L\omega$ 仍是一个 L 值的 (p,q) 微分形式, 我们称 $\nabla_i^L; 1 \leqslant i \leqslant n$ 为关于 Hermite 线丛 L 的协变导数.

设 $\omega \in \Gamma(M, \varepsilon^{p,q-1}(L))$ 且 $\eta \in \Gamma(M, \varepsilon^{p,q}(L))$, 则

$$\begin{aligned}
(\bar\partial\omega, \eta) &= \int_M h_\alpha \bar\partial\omega_\alpha \wedge \overline{*\eta_\alpha} \\
&= \int_M \bar\partial(h_\alpha\omega_\alpha\wedge\overline{*\eta_\alpha}) + \int_M (-1)^{p+q}\omega_\alpha\bar\partial h_\alpha\wedge\overline{*\eta_\alpha} + \int_M (-1)^{p+q}\omega_\alpha h_\alpha\wedge\bar\partial\overline{*\eta_\alpha}) \\
&= (-1)^{p+q}\int_M \omega_\alpha h_\alpha \overline{\partial \log h_\alpha \wedge * \eta_\alpha} - \int_M \omega_\alpha h_\alpha ** \overline{\partial * \eta_\alpha} \\
&= -\int_M \omega_\alpha h_\alpha ** \overline{\bar\partial \log h_\alpha \wedge * \eta_\alpha} - \int_M \omega_\alpha h_\alpha ** \overline{\partial * \eta_\alpha}.
\end{aligned}$$

故 $\bar\partial$ 的自共轭算子具有局部表示

$$\begin{aligned}
\bar\partial_L^*\eta_\alpha &= -*\partial*\eta_\alpha - (*\partial \log h_\alpha \wedge *\eta_\alpha) \\
&= -*\partial * \eta_\alpha + (-1)^{p+q+1}*(*\eta_\alpha\wedge\partial \log h_\alpha).
\end{aligned} \tag{12.14}$$

实际上, (12.14) 只是当 E 是一个秩为 r 的 Hermite 全纯向量丛时 $\bar\partial_E^*$ 的表达式的一个特殊情形.

设 $\omega \in \Gamma(M, \varepsilon^{p,q-1}(E))$ 且 $\eta \in \Gamma(M, \varepsilon^{p,q}(E))$, 则对任意平凡化邻域 U_α, 都有 $\omega\ |_{U_\alpha} = \sum_{\lambda=1}^{r}\omega_\alpha^\lambda e_{\alpha\lambda}$ 且 $\eta\ |_{U_\alpha} = \sum_{\mu=1}^{r}\eta_\alpha^\mu e_{\alpha\mu}$. 设 $h_{(\alpha)}$ 为 E 的 Hermite 度量 h 的局部表示, 记 $\omega_\alpha = (\omega_\alpha^1, \cdots, \omega_\alpha^r)$, $\eta_\alpha = (\eta_\alpha^1, \cdots, \eta_\alpha^r)$. 由于在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上 $\bar\partial\omega_\alpha h_{(\alpha)}\wedge*\overline{\eta_\alpha^t} = \bar\partial\omega_\beta h_{(\beta)}\wedge*\overline{\eta_\beta^t}$, 故可得

$$\begin{aligned}
(\bar\partial\omega, \eta) &= \int_M \bar\partial\omega h\wedge*\overline{\eta^t} \\
&= \int_M \bar\partial(\omega h\wedge*\overline{\eta^t}) + (-1)^{p+q}\int_M \omega_\alpha\bar\partial h\wedge*\overline{\eta^t} + (-1)^{p+q}\int_M \omega h\wedge\bar\partial * \bar\eta^t \\
&= (-1)^{p+q}\int_M \omega h h^{-1}\bar\partial h\wedge\overline{*\eta^t} - \int_M \omega h**\overline{\partial*\eta^t}.
\end{aligned}$$

又因为 $\bar h^{-1}\partial\bar h = (h^t)^{-1}\partial h^t = (\partial h\cdot h^{-1})^t = \theta_E^t$ 且 $\theta_E^t\wedge*\eta^t = (-1)^{p+q}(*\eta\wedge\theta_E)^t$, 那么 $(\bar\partial\omega, \eta) = \int_M \omega h\wedge**\overline{(*\eta\wedge\theta_E)^t} + (-1)^{p+q+1}\int_M \omega h * *\overline{(*\eta\wedge\theta_E)^t}$. 因此,

$$\bar\partial_E^*\eta = - * \partial * \eta + (-1)^{p+q+1}*(*\eta\wedge\theta_E).$$

命题 12.10　对于 $\forall\eta\in\Gamma(M,\varepsilon^{p,q+1}(L))$,

$$(\bar{\partial}_L^*\eta_\alpha)_{i_1\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}=(-1)^{p+1}g^{\bar{j}i}(\nabla_i+\partial_i\log h_\alpha)\eta_{\alpha i_1\cdots i_p\bar{j}\bar{j}_1\cdots\bar{j}_q}.$$

证明: 我们只需验证如下等式

$$-*(\partial_i\log h_\alpha\wedge*\eta_\alpha)_{I_p\bar{J}_q}=(-1)^{p+1}g^{\bar{j}i}\partial_i\log h_\alpha\eta_{\alpha I_p\bar{j}\bar{J}_q}. \tag{12.15}$$

由于关于微分形式的等式不依赖于局部坐标的选取, 故不失一般性, 对 $\forall x\in M$, 我们可选取适当的局部坐标使得 Kähler 度量矩阵 $g(x)=I$, 即 $g_{i\bar{j}}(x)=\delta_{ij}$; $1\leqslant i,j\leqslant n$.

假设 $\eta_\alpha=\dfrac{1}{p!(q+1)!}b_{I_p\bar{J}_{q+1}}dz^{I_p}\wedge d\bar{z}^{\bar{J}_{q+1}}$, J_{n-q-1} 与 I_{n-p} 分别是 J_{q+1} 与 I_p 在集 $\{1,\cdots,n\}$ 中的补集时, 根据 Hodge 算子的定义

$$\begin{aligned}
*\eta_\alpha&=\frac{i^n(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)+pn}}{p!(q+1)!(n-p)!(n-q-1)!}b_{I_p\bar{J}_{q+1}}\\
&\quad\cdot\delta^{I_pI_{n-p}}_{J_{q+1}J_{n-q-1}}dz^{J_{n-q-1}}\wedge\overline{dz^{I_{n-p}}},\\
\partial\log h_\alpha\wedge*\eta_\alpha&=\frac{i^n(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)+pn}}{p!(q+1)!(n-p)!(n-q-1)!}b_{I_p\bar{J}_{q+1}}\frac{\partial\log h_\alpha}{\partial z_j}\\
&\quad\cdot\delta^{I_pI_{n-p}}_{J_{q+1}J_{n-q-1}}dz^i\wedge dz^{J_{n-q-1}}\wedge\overline{dz^{I_{n-p}}},
\end{aligned}\tag{12.16}$$

$$\begin{aligned}
(\partial\log h_\alpha\wedge\eta_\alpha)&=\frac{(-1)^n(-1)^{pn+(n-q)n}}{p!(q+1)!(n-p)!(n-q-1)!p!q!}b_{I_p\bar{J}_{q+1}}\frac{\partial\log h_\alpha}{\partial z_j}\\
&\quad\cdot\delta^{I_pI_{n-p}}_{J_{q+1}J_{n-q-1}}\delta^{I_{n-p}S_p}_{jJ_{n-q-1}T_q}dz^{S_p}\wedge\overline{dz^{T_q}}.
\end{aligned}\tag{12.17}$$

又因为

$$\begin{aligned}
&\delta^{I_pI_{n-p}}_{J_{q+1}J_{n-q-1}}\delta^{I_{n-p}S_p}_{jJ_{n-q-1}T_q}\\
&=(-1)^{p(n-p)+q(n-q)}\delta^{I_pI_{n-p}}_{J_{q+1}J_{n-q+1}}\delta^{S_pI_{n-p}}_{T_qjJ_{n-q-1}}\\
&=(-1)^{p^2+np+q^2+nq}(n-p)!\,\delta^{I_p}_{S_p}\delta^{J_{q+1}}_{T_qj}(n-q-1)!,
\end{aligned}\tag{12.18}$$

将 (12.18) 代入 (12.17) 中, 我们得到

$$\begin{aligned}
\partial\log h_\alpha\wedge\eta_\alpha&\equiv\frac{(-1)^{p^2+q^2}}{(p!)^2q!(q+1)!}b_{I_p\overline{J_{q+1}}}\frac{\partial\log h_\alpha}{\partial z_j}\delta^{I_p}_{S_p}\delta^{J_{q+1}}_{T_qj}dz^{S_p}\wedge\overline{dz^{T_q}}\\
&=\frac{(-1)^{p^2}}{p!q!}b_{S_p\bar{j}\bar{T}_q}\frac{\partial\log h_\alpha}{\partial z_j}dz^{S_p}\wedge\overline{dz^{T_q}}\\
&=\frac{(-1)^p}{p!q!}b_{S_p\bar{j}\bar{T}_q}\frac{\partial\log h_\alpha}{\partial z_j}dz^{S_p}\wedge\overline{dz^{T_q}},
\end{aligned}$$

这样, 我们就证明了命题 12.10. □

定理 12.11 设 $\omega \in \Gamma(M, \varepsilon^{p,q}(L))$, 则

$$
\begin{aligned}
(\Box_L \omega_\alpha)_{I_p \bar{J}_q} = & -g^{\bar{j}i} \nabla_i^{(L)} \bar{\nabla}_j (\omega_\alpha)_{I_p \bar{J}_q} \\
& + \sum_{k=1}^{q} \sum_{\tau} (X^{\bar{t}}{}_{\bar{j}_k} - R_{\bar{j}_k}{}^{\bar{t}}) (\omega_\alpha)_{I_p \bar{j}_1 \cdots (\bar{t})_k \cdots \bar{j}_q} \\
& + \sum_{s=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} R^t{}_{i_s \bar{j}_k}{}^{\bar{l}} (\omega_\alpha)_{i_1 \cdots (t)_s \cdots i_p \bar{j}_1 \cdots (\bar{l})_k \cdots \bar{j}_q},
\end{aligned} \tag{12.19}
$$

这里 $(\bar{t})_k$ 表示第 k 个指标被 $\bar{t}$ 代替, $\nabla_i^{(L)} = \partial_i + \partial_i \log\ h_\alpha$ 且

$$
X^{\bar{i}}{}_{\bar{j}} = -\nabla_{\bar{j}} g^{\bar{i}k} \partial_k \log h_\alpha = g^{\bar{i}k} \bar{\nabla}_j \partial_k \log h_\alpha.
$$

证明: 根据命题 12.10, 有

$$
(\partial_L^* \omega_\alpha)_{I_p \bar{J}_{q-1}} = (\bar{\partial}^* \omega_\alpha)_{I_p J_{q-1}} + (-1)^{p+1} g^{\bar{j}i} (\partial_i \log h_\alpha)(\omega_\alpha)_{I_p \bar{j} \bar{J}_{q-1}}.
$$

用 $\xi\omega$ 来表示 M 上的 $(p, q-1)$ 形式, 则

$$
\xi\omega = \frac{1}{p!(q-1)!} g^{\bar{j}i} (\partial_i \log h_\alpha)(\omega_\alpha)_{I_p j \bar{J}_{q-1}} dz^{I_p} \wedge \overline{dz^{J_{q+1}}}.
$$

故 $\bar{\partial}_L^* \omega = \bar{\partial}^* (-1)^{p+1} \xi\omega$,

$$
\begin{aligned}
\Box_L \omega &= (\bar{\partial}_L^* \bar{\partial} + \bar{\partial} \bar{\partial}_L^*) \omega = \bar{\partial}_L^* (\bar{\partial}\omega) + \bar{\partial}(\bar{\partial}^* \omega + (-1)^{p+s} \xi\omega) \\
&= \bar{\partial}_L^* \bar{\partial}\omega + (\xi \bar{\partial}\omega) + \bar{\partial}\bar{\partial}^* \omega + (-1)^{p+1} \bar{\partial}\xi\omega \\
&= \Box\omega + (-1)^{p+1} ((\xi\bar{\partial}\omega) + (\bar{\partial}(\xi\omega))).
\end{aligned} \tag{12.20}
$$

$$
\begin{aligned}
[\bar{\partial}(\xi\omega)]_{I_p J_q} &= (-1)^p \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s-1} \bar{\partial}_{j_s} (\xi\omega)_{I_p \bar{j} \cdots \hat{\bar{j}}_s \cdots \bar{j}_q} \\
&= (-1)^p \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s-1} \bar{\nabla}_{j_s} (g^{\bar{j}i} \partial_i \log h_\alpha (\omega_\alpha)_{I_p \bar{j} \bar{j}_1 \cdots \hat{\bar{j}}_s \cdots \bar{j}_q}) \\
&= (-1)^p \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s-1} g^{\bar{j}i} \bar{\nabla}_{j_s} \partial_i \log h_\alpha (\omega_\alpha)_{I_p \bar{j} \bar{j}_1 \cdots \hat{\bar{j}}_s \cdots \bar{j}_q} \\
&\quad + (-1)^p \sum_{s=1}^{q} (-1)^{s-1} g^{\bar{j}i} \partial_i \log h_\alpha \bar{\nabla}_{j_s} (\omega_\alpha)_{I_p \bar{j} \bar{j}_1 \cdots \hat{\bar{j}}_s \cdots \bar{j}_q},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\xi \bar{\partial}\omega]_{I_p \bar{J}_q} &= g^{\bar{j}i} (\partial_i \log h_\alpha)(\bar{\partial}\omega_\alpha)_{I_p \bar{j} \bar{J}_q} \\
&= g^{\bar{j}i} \partial_i \log h_\alpha (-1)^p \sum_{s=1}^{q} (-1)^s \bar{\nabla}_{js} (\omega_\alpha)_{I_p \bar{j} \bar{j}_1 \cdots \hat{\bar{j}}_s \cdots \bar{j}_q} \\
&\quad + (-1)^p g^{\bar{j}i} \partial_i \log h_\alpha \bar{\nabla}_j \omega_{I_p \bar{J}_q}.
\end{aligned}
$$

因此,

$$(-1)^{p+1}[\xi\bar{\partial}\omega+\bar{\partial}\xi\omega]_{I_p\bar{J}_q}=\sum_{s=1}^{q}(-1)^s g^{\bar{j}i}\bar{\nabla}_{j_s}\partial_i\log h_\alpha(\omega_\alpha)_{I_p\bar{j}\bar{j}_1\cdots\hat{\bar{j}}_s\cdots\bar{j}_q}\quad(12.21)$$
$$-g^{\bar{j}i}\partial_i\log h_\alpha\bar{\nabla}_j(\omega_\alpha)_{I_p\bar{J}_q}.$$

再将 (12.12), (12.21) 代入到 (12.20) 中, 可得

$$\begin{aligned}(\square_L\omega)_{I_p\bar{J}_q}&=(\square\omega)_{I_p\bar{J}_q}-\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s-1}g^{\bar{j}i}\bar{\nabla}_{js}\nabla_i\log h_\alpha(\omega_\alpha)_{I_p\bar{j}\bar{j}_1\cdots\hat{\bar{j}}_s\cdots\bar{j}_q}\\&\quad-g^{\bar{j}i}\partial_i\log h_\alpha\bar{\nabla}_j(\omega_\alpha)_{I_p\bar{J}_q}\\&=-g^{\bar{j}i}\nabla_i\bar{\nabla}_j(\omega_\alpha)_{I_p\bar{J}_q}-g^{\bar{j}i}\partial_i\log h_\alpha\bar{\nabla}_j(\omega_\alpha)_{I_p\bar{J}_q}\\&\quad+\sum_{t=1}^{q}\sum_{s=1}^{q}R^k{}_{i_t\bar{j}s}{}^{\bar{l}}(\omega_\alpha)_{i_1\bar{i}_{s-1}ki_{s+1}\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{t-1}\bar{l}\bar{j}_{t+1}\cdots\bar{j}_q}\\&\quad-\sum_{s=1}^{q}R_{\bar{j}_s}{}^{\bar{l}}(\omega_\alpha)_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{s-1}\bar{l}\bar{j}_{s+1}\cdots\bar{j}_q}\\&\quad-\sum_{s=1}^{q}(-1)^{s-1}g^{\bar{j}i}\bar{\nabla}_{j_s}\nabla_i\log h_\alpha(\omega_\alpha)_{I_p\bar{j}\bar{j}_1\cdots\hat{\bar{j}}_s\cdots\bar{j}_q}\\&=-g^{\bar{j}i}\nabla_i^L\bar{\nabla}_j(\omega_\alpha)_{I_p\bar{J}_q}+\sum_{t=1}^{q}\sum_{s=1}^{q}R^k{}_{i_t\bar{j}_s}{}^{\bar{l}}(\omega_\alpha)_{i_1\bar{i}_{s-1}ki_{s+1}\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{t-1}\bar{l}\bar{j}_{t+1}\cdots\bar{j}_q}\\&\quad-\sum_{s=1}^{q}g^{\bar{j}i}\bar{\nabla}_{j_s}\nabla_i\log h_\alpha(\omega_\alpha)_{I_p\bar{j}\bar{j}_1\cdots\hat{\bar{j}}_s\cdots\bar{j}_q}.\end{aligned}$$

令 $-g^{\bar{j}i}\bar{\nabla}_{js}\nabla_i\log h_\alpha=X^{\bar{j}}{}_{\bar{j}s}$, 则

$$(\square_L\omega)_{I_p\bar{J}_q}=-g^{\bar{j}i}\nabla_i^L\bar{\nabla}_j(\omega_\alpha)_{I_p\bar{J}_q}+\sum_{s=1}^{q}(X^{\bar{j}}{}_{\bar{j}_s}-R_{j_s}{}^{\bar{j}})(\omega_\alpha)_{I_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{s-1}\bar{j}\bar{j}_{s+1}\cdots\bar{j}_q}$$
$$+\sum_{t=1}^{p}\sum_{s=1}^{q}R^k{}_{i_t\bar{j}_s}{}^{\bar{l}}(\omega_\alpha)_{i_1\cdots i_{t-1}ki_{t+1}\cdots i_p\bar{j}_1\cdots\bar{j}_{t-1}\bar{l}\bar{j}_{t+1}\cdots\bar{j}_q}.$$

当 $p=0$, 即 $\omega\in\Gamma(M,\varepsilon^{0,q}(L))$, 那么 (12.19) 的最后一项会消灭. □

现在我们利用上面的计算结果来证明上同调群 $H^q(M,\mathcal{O}(L))$ 在某些特定的情形下必消灭.

定理 12.12　设 M 是一个 n 维紧 Kähler 流形, L 是具有 Hermite 度量 h 的线丛. 若 $X_{i\bar{j}}-R_{\bar{j}i}$ 在 Kähler 流形 M 上每点都是正定的, 则当 $q\geqslant 1$ 时,

$$H^q(M,\mathcal{O}(L))=0,$$

这里 $X_{i\bar{j}}=-\partial_i\partial_{\bar{j}}\log h_\alpha$ 是 Hermite 度量 h 的曲率.

证明: 由于 $H^q(M,\mathcal{O}(L)) \cong \mathcal{H}^{0,q}(M)$, 故我们只需证明任何 L 值的 $(0,q)$ 调和形式必为零.

设 Ψ 是一个 M 上的 1-形式, 则

$$\int_M \delta\Psi dv = 0,$$

这里 $\delta = d^* = (\partial+\bar\partial)^* = \partial^*+\bar\partial^*$. 这时结论是平凡的, 因为 $\int_M \delta\psi dv = \int_M \delta\psi * 1 = (\delta\Psi, 1) = (\Psi, d(1)) = 0$. 对 $\forall\omega \in \Gamma(M,\varepsilon^{0,q}(L))$, 我们构造 (0,1) 形式 $\Psi\,|_{U_\alpha} = h_\alpha\bar\nabla_j\omega_{\alpha\bar J_q}\omega_\alpha^{\bar J_q}d\bar{z^j}$, 这里 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 L 的平凡化邻域. 所以在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上,

$$\begin{aligned}\Psi\,|_{U_\alpha} &= h_\alpha(\bar\nabla_j\omega_{\alpha\bar J_q})\overline{\omega_\alpha^{J_q}}\,\overline{dz^j}\\ &= |\phi_{\beta\alpha}|^2 h_\beta\bar\nabla_j(\omega_{\beta\bar J_q})|\phi_{\alpha\beta}|^2\overline{\omega_\beta^{J_q}}\,\overline{dz^j}\\ &= \Psi\,|_{U_\beta},\end{aligned}$$

故 $\Psi\in\varepsilon^{0,1}(M)$, $\delta\Psi = (\partial^*+\bar\partial^*)\Psi = \bar\partial^*\Psi$,

$$\begin{aligned}\bar\partial^*\Psi\,|_{U_\alpha} &= -g^{\bar j i}\nabla_i(h_\alpha\bar\nabla_j\omega_{\alpha\bar J_q}\overline{\omega_\alpha^{J_q}})\\ &= -g^{\bar j i}\nabla_i(h_\alpha h_\alpha^{-1})h_\alpha\bar\nabla_j\omega_{\alpha\bar J_q}\overline{\omega_\alpha^{J_q}} - g^{\bar j i}h_\alpha\nabla_i\bar\nabla_j\omega_{\alpha\bar J_q}\overline{\omega_\alpha^{J_q}}\\ &\quad -g^{\bar j i}h_\alpha\bar\nabla_j\omega_{\alpha\bar J_q}\nabla_i\overline{\omega_\alpha^{J_q}}\\ &= -g^{\bar j i}h_\alpha\nabla_i^L\bar\nabla_j\omega_{\alpha\bar J_q}\overline{\omega_\alpha^{J_q}} - g^{\bar j i}h_\alpha\overline{\nabla}_j\omega_{\alpha\bar J_q}\nabla_i\overline{\omega_\alpha^{J_q}}.\end{aligned}$$

由于 $\int_M -g^{\bar j i}h_\alpha\bar\nabla_j\omega_{\alpha\bar J_q}\nabla_i\overline{\omega_\alpha^{J_q}}dv \leqslant 0$, 且 $\int_M \bar\partial^*\Psi = 0$, 故当 $\omega\in\mathcal{H}^{0,q}(M,L)$ 时, 有 $\int_M -g^{\bar j i}h_\alpha\nabla_i^L\bar\nabla_j\omega_{\alpha\bar J_q}\overline{\omega_\alpha^{J_q}}dv \geqslant 0$, 进而 $(\Box_L\omega,\omega) = 0$.

另一方面,

$$\begin{aligned}0 = (\Box_L\omega,\omega) = &\int_M -g^{\bar j i}h_\alpha\nabla_i^L\bar\nabla_j\omega_{\alpha\bar J_q}\overline{\omega_\alpha^{J_q}}dv\\ &+\int_M h_\alpha\sum_{k=1}^q({X^{\bar t}}_{\bar j_k} - {R_{\bar j_k}}^{\bar t})\omega_{\alpha\bar j_1\cdots(t)_k\cdots\bar k_q}\overline{\omega_\alpha^{j_1\cdots j_k}}dv,\end{aligned}$$

故

$$\int_M h_\alpha\sum_{k=1}^q({X^{\bar t}}_{\bar j_k} - {R_{\bar j_k}}^{\bar t})\omega_{\alpha\bar j_1\cdots(t)_k\cdots\bar k_q}\overline{\omega_\alpha^{j_1\cdots j_k}}dv \leqslant 0. \qquad (12.22)$$

由于 $\omega_\alpha^{j_1\cdots j_k}=\omega_{\alpha\bar{l}_1\cdots\bar{l}_k}g^{\bar{l}_1j_1}\cdots g^{\bar{l}_kj_k}$, $X^{\bar{t}}{}_{\bar{j}_k}=g^{\bar{t}s}X_{s\bar{j}_k}$, $R_{\bar{j}_k}{}^{\bar{t}}=g^{\bar{t}s}R_{\bar{j}_ks}$, 故 (12.22) 等价于

$$\int_M h_\alpha\sum_{k=1}^q g^{\bar{t}s}(X_{s\bar{j}_k}-R_{\bar{j}_ks})\omega_{\alpha\bar{j}_1\cdots(t)_k\cdots\bar{k}_q}\overline{\omega_{\alpha\bar{l}_1\cdots\bar{l}_q}}\,g^{\bar{j}_1l_1}\cdots g^{\bar{j}_hl_h}\leqslant 0.$$

这样, 当 $X^{\bar{j}}{}_i-R^j{}_{\bar{i}}>0$, 即 $X_{j\bar{i}}-R_{\bar{i}j}>0$ 时, 对 $1\leqslant l_1,\cdots,l_q\leqslant n$ 都有 $\omega_{\alpha\bar{l}_1\cdots\bar{l}_k}=0$. 因此, $\mathcal{H}^{0,q}(M,L)=0$, 即 $H^q(M,\mathcal{O}(L))=0$. □

注意到 $X_{i\bar{j}}=-\partial_i\bar{\partial}_j\log h_\alpha$ 是 Hermite 线丛的曲率, 而 $R_{\bar{j}i}$ 是 Ricci 曲率张量且等价于典则线丛 K_M 的曲率张量, 故 $X_{i\bar{j}}-R_{\bar{j}i}$ 等价于线丛 $L-K_M$ 的曲率张量, 这样上述消灭定理亦可写成如下的形式:

命题 12.13　设 M 是 Kähler 流形, L 是 Hermite 线丛, 若 $L\otimes K_M^*$ 即 $(L-K)$ 是正的, 则

$$H^{0,q}(M,\mathcal{O}(L))=0,\quad \forall q\in\mathbf{Z}^+.$$

定理 12.14 (Serre 对偶定理)　设 E 是秩为 r 的紧复流形上的全纯向量丛, 则

$$H^q(M,\Omega^p(E))\cong H^{n-q}(M,\Omega^{n-p}(E^*)),\quad \forall p,q\geqslant 0,$$

这里 $\Omega^p(E)$ 是所有 E 值全纯 $(p,0)$ 形式芽层.

证明: 首先, $\Omega^p(E)$ 的松弛解一定是存在的,

$$0\longrightarrow\Omega^p(E)\xrightarrow{i}\varepsilon^{p,0}(E)\xrightarrow{\bar{\partial}}\varepsilon^{p,1}(E)\xrightarrow{\bar{\partial}}\varepsilon^{p,2}(E)\xrightarrow{\bar{\partial}}\cdots\xrightarrow{\bar{\partial}}\varepsilon^{p,n}(E)\longrightarrow 0.$$

根据 Dolbeault 定理,

$$H^q(M,\Omega^p(E))=\frac{\{\bar{\partial}\omega=0\mid\omega\in\Gamma(M,\varepsilon^{p,q}(E))\}}{\{\bar{\partial}\Gamma(M,\varepsilon^{p,q-p}(E))\}}.$$

再由 Hodge 定理,

$$H^q(M,\Omega^p(E))=\mathcal{H}^{p,q}(M,E),$$

故若可证明 $\mathcal{H}^{p,q}(M,E)\equiv\mathcal{H}^{n-p,n-q}(E^*)$, 那么定理的证明就完成了.

定义线性映射

$$\tilde{*}:\Gamma(M,\varepsilon^{p,q}(E))\longrightarrow\Gamma(M,\varepsilon^{n-p,n-q}(E^*));$$

对 $\forall\omega\in\Gamma(M,\varepsilon^{p,q}(L))$, $\omega\mid_{U_\alpha}=\omega_\alpha e_\alpha^t$, 这里 U_α 是 E 的平凡化邻域, 且 e_α 是 L 的典则截形标架, 而 $\omega_\alpha=(\omega_\alpha^1,\cdots,\omega_\alpha^r)$, 其中 e_α^t 是列向量. 故

$$\tilde{*}(\omega)\mid_{U_\alpha}=*\overline{\omega_\alpha}\bar{h}_\alpha\tilde{e}_\alpha^t,\tag{12.23}$$

这里 h_α 是 E 的 Hermite 度量 h 的局部表示, 且 $\tilde{e}_\alpha$ 为 L^* 的典则截形标架, 即 e_α 的对偶. 这个定义是合理的, 因为当 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ 时,

$$*\bar{\omega}_\alpha \bar{h}_\alpha \tilde{e}_\alpha^t = *\bar{\omega}_\beta \bar{\phi}_{\alpha\beta} \bar{\phi}_{\beta\alpha} \bar{h}_\beta \phi_{\beta\alpha} \phi_{\alpha\beta} \tilde{e}_\beta^t = *\bar{\omega}_\beta \bar{h}_\beta \tilde{e}_\beta.$$

为完成 Serre 对偶定理的证明, 我们还需下面的引理.

引理 12.15 对 $\forall \omega \in \Gamma(M, \varepsilon^{p,q}(E))$,

$$\tilde{*}\, \bar{\partial}_E^*\, \omega = (-1)^{p+q} \bar{\partial}\, \tilde{*}\, \omega. \tag{12.24}$$

证明: 设 $\omega\ |_{U_\alpha} = \sum \omega_\alpha^\lambda e_{\alpha\lambda}$, $\omega_\alpha = (\omega_\alpha^1, \cdots, \omega_\alpha^r)$, $e_\alpha = (e_{\alpha,1}, \cdots, e_{\alpha,\lambda})$, 则 $\omega = \omega_\alpha e_\alpha^t$. 显然的, $\omega_\alpha e_\alpha^t = \omega_\beta e_\beta^t$, 故可记为 $\omega = \omega e^t$. 那么,

$$(-1)^{p+q} \bar{\partial}\, \tilde{*}\, \omega = (-1)^{p+q} \bar{\partial}(*\bar{\omega}\bar{h}\tilde{e}^t) = (-1)^{p+q} (\overline{\partial * \omega} \bar{h} \tilde{e}^t) + *\bar{\omega}\bar{\partial}\bar{h}\tilde{e}^t.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_E^* \omega &= \bar{\partial}_E^*(\omega e_\alpha^t) = - * \partial * \omega e^t + (-1)^{p+q+1} *(\overline{*\omega} \wedge \overline{\theta_E}) e^t, \\
\tilde{*}\bar{\partial}_E^* \omega &= -\overline{**\partial * \omega}\bar{h}\tilde{e}^t + (-1)^{p+q+1} **(\overline{*\omega} \wedge \overline{\theta_E})\ \bar{h}\tilde{e}^t \\
&= (-1)^{p+q} \overline{\partial * \omega} \bar{h}\tilde{e}^t + \overline{*\omega} \wedge\ \overline{\partial h}\ \overline{h^{-1}\ h}\tilde{e}^t.
\end{aligned}$$

因此,

$$\tilde{*}\bar{\partial}_E^* \omega = (-1)^{p+q} \bar{\partial}\, \tilde{*}\, \omega.$$

□

引理 12.16 对 $\forall \omega \in \Gamma(M, \varepsilon^{p,q}(E))$,

$$\tilde{*}\bar{\partial}\omega = (-1)^{p+q+1} \bar{\partial}_{E^*}^* \tilde{*} \omega.$$

证明: 易知

$$\tilde{*}\bar{\partial}\omega = \tilde{*}\bar{\partial}(\omega e^t) = \tilde{*}(\bar{\partial}\omega e^t) = *\partial\bar{\omega}\bar{h}\tilde{e}^t,$$

故

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_E^* \tilde{*} \omega &= \bar{\partial}_E^*(*\bar{\omega}\bar{h}\tilde{e}^t) = - * \partial * (*\bar{\omega}\bar{h})\tilde{e}^t + (-1)^{p+q+1} *(**\bar{\omega}\bar{h} \wedge \theta_{E^*})\tilde{e}^t \\
&= (-1)^{p+q+1} *(\partial\bar{\omega}\bar{h} + (-1)^{p+q} \bar{\omega}\bar{h} \wedge \theta_{E^*} + (-1)^{p+q} \bar{\omega}\partial\bar{h}\tilde{e}^t \\
&= (-1)^{p+q+1} *(\partial\bar{\omega}\bar{h} + (-1)^{p+q} \bar{\omega}(\partial\bar{h} + \bar{h}(\partial {h^t}^{-1}) h^t))\tilde{e}^t \\
&= (-1)^{p+q+1} *(\partial\bar{\omega}^t \bar{h})\tilde{e}^t,
\end{aligned}$$

这里 $\theta_{E^*} = \partial(h^t)^{-1} h^t$. □

Serre 对偶定理的证明.

证明: 考虑如下图标

$$\begin{array}{ccc}\Gamma(M,\varepsilon^{p,q}(E)) & \xrightarrow{\Box_E} & \Gamma(M,\varepsilon^{p,q}(E)) \\ \tilde{*}\downarrow & & \downarrow\tilde{*} \\ \Gamma(M,\varepsilon^{n-p,n-q}(E^*)) & \xrightarrow{\Box_{E^*}} & \Gamma(M,\varepsilon^{n-p,n-q}(E))\end{array}$$

根据引理 12.15 和引理 12.16 可知, 对 $\forall\omega\in\Gamma(M,\varepsilon^{p,q}(E))$, 上面的图标是交换的.

$$\begin{aligned}\tilde{*}\Box_E\omega &= \tilde{*}(\bar\partial\bar\partial_E^*+\bar\partial_E^*\bar\partial)\omega = \tilde{*}\bar\partial(\bar\partial_E^*\omega)+\tilde{*}\bar\partial_E^*(\bar\partial\omega)\\ &= (-1)^{p+q}\bar\partial_{E^*}^*\tilde{*}\bar\partial_E^*\omega+(-1)^{p+q+1}\bar\partial\tilde{*}\bar\partial\omega\\ &= \bar\partial_{E^*}^*\bar\partial\tilde{*}\omega+\bar\partial\bar\partial_{E^*}^*\tilde{*}\omega=\Box_{E^*}\tilde{*}\omega.\end{aligned}$$

由 (12.23) 得到 $\tilde{*}\tilde{*}\omega\ |_{U_\alpha}=\tilde{*}\tilde{*}\omega_\alpha h_\alpha h_\alpha^{-1}e_\alpha^t=(-1)^{p+q}w_\alpha\ |_{U_\alpha}$, 因此 $\tilde{*}$ 既是单射又是满射. 而 $\tilde{*}\Box_E=\Box_{E^*}\tilde{*}$ 表明 $\omega\in\mathcal{H}^{p,q}(M,E)$ 当且仅当 $\tilde{*}\omega\in\mathcal{H}^{n-p,n-q}(M,E^*)$. 所以 $\tilde{*}$ 是一个从 $\mathcal{H}^{p,q}(M,E)$ 到 $\mathcal{H}^{n-p,n-q}(M,E^*)$ 的同构映射, 即 $\mathcal{H}^{p,q}(M,E)\cong\mathcal{H}^{n-p,n-q}(M,E^*)$, 这就证明了 Serre 对偶定理. □

定理 12.17 *若线丛 $-L$ 是正的, 则当 $q\leqslant n-1$ 时, $H^q(M,\mathcal{O}(L))=0$.*

证明: Serre 对偶定理表明

$$H^q(M,\Omega^p(L))=H^{n-q}(M,\Omega^{n-p}(-L)).$$

当 $p=0$ 时 $\Omega^n=\mathcal{O}(K)$, 则

$$H^q(M,\mathcal{O}(L))=H^{n-q}(M,\Omega^n(-L))=H^{n-q}(M,\mathcal{O}(K-L)).$$

由于 $-L$ 是正的, 故 $K-L-K$ 是正的, 因此当 $q\leqslant n-1$ 时,

$$H^q(M,\mathcal{O}(L))=H^{n-q}(M,\mathcal{O}(K-L))=0.$$

□

定理 12.18 *若 L 为充分正, 则对 $q\geqslant1$, $H^q(M,\Omega^p(L))=0$.*

证明: 定理的证明类似于 $p=0$ 的情形. 由于

$$\mathcal{H}^{p,q}(M,L)\cong H^q(M,\Omega^p(F)),$$

故只需验证对 $\forall\omega\in\mathcal{H}^{p,q}(M,L)$, 运用定理 12.11 中 $\Box_L\omega$ 的表达式与 $(\Box_L\omega,\omega)=0$ 就得到

$$\begin{aligned}0\geqslant\int_M&(q(X^{\bar t}{}_{\bar s}-R^{\bar t}_{\bar s})\omega_{I_p\bar t\bar j_2\cdots\bar j_q}\omega^{\overline{\bar I_p sj_2\cdots j_q}}\\ &+pR^t{}_{i\bar j}{}^{\bar s}\omega_{ti_2\cdots i_p\bar s\bar\beta_2\cdots\bar\beta_q}\omega^{\overline{\bar i\bar i_2\cdots\bar i_q jj_2\cdots j_q}})^*1_M.\end{aligned}$$

而 $X^{\bar{t}}{}_{\bar{s}}$ 是充分正的, 故右边的项是正的. □

现在我们将讨论 Kodaira 嵌入定理.

设 M 是维数为 n 的复紧 Kähler 流形, L 是 M 上的全纯线丛. 根据 Dolbeault 定理, $H^0(M,\mathcal{O}(L))=\Gamma(M,\mathcal{O}(L))$ 是所有 M 上的全纯截形组成的集合. 再由 Hodge 定理,

$$\dim_C \Gamma(M,\mathcal{O}(L))=\dim_C H^0(M,\mathcal{O}(L))=N+1<+\infty.$$

设 $s_0,\cdots,s_N$ 是 $\tilde{\Gamma}(M,\mathcal{O}(L))$ 的一组基. 对 $p\in M$, 定义映射

$$\tau: M\longrightarrow CP^N,$$

$$p\longrightarrow [s_0(p),\cdots,s_N(p)],$$

则 τ 是一个全纯映射. 若 $\forall p\in M$ 都不是 $s_0,\cdots,s_N$ 的公共零点, 那么 τ 是有意义的, 且 τ 的定义不依赖于 $s_0(p),\cdots,s_N(p)$.

设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 L 的平凡化邻域, $\{\phi_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta\in I}$ 是相应的转换函数, 则在 $U_\alpha\cap U_\beta$ 上,

$$s_i^{(\alpha)}=\phi_{\alpha\beta}s_i^{(\beta)};\quad 0\leqslant i\leqslant N,$$

这里 $s_i^{(\alpha)}$ 是 s_i 在 U_α 上的局部表示. 所以, 若 $p\in U_\alpha\cap U_\beta$, 则

$$(s_0^{(\alpha)}(p):\cdots:s_N^{(\alpha)}(p))=(s_0^{(\beta)}(p):\cdots:s_N^{(\beta)}(p)),$$

进而问题转化为全纯映射 τ 是否是一个嵌入映射.

在讨论嵌入定理之前, 我们将引入**吹大**技巧, 它是研究代数几何的一个重要的方法.

设 B_n 是 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球, 即 $B_n=\{z\in\mathbf{C}^n\big||z|<1\}$. 设 $l=[l_1,\cdots,l_n]\in CP^{n-1}$ 是它的齐次坐标, 令

$$\tilde{B}_n=\{(z,l)\in B_n\times CP^{n-1}\mid z_il_j=l_iz_j;\quad 1\leqslant i,j\leqslant n\}.$$

若将 $l\in CP^{n-1}$ 看成是 $\mathbf{C}^n$ 中过原点的一条复直线 l, 那么 $z_il_j=l_iz_j; 1\leqslant i,j\leqslant n$ 就等价于 $z\wedge l=0$, 即 $z\in l$. 映射 $\pi:\tilde{B}_n\longrightarrow B_n$, $\pi(z,l)=z$, $E=\pi^{-1}(0)=0\times CP^{n-1}$. $\pi^{-1}(0)$ 的几何意义是过 B_n 中原点的所有复直线的并.

设 M 是一个 n 维复流形. 固定点 $p\in M, U\in\mathcal{U}_p$ 是一个局部坐标邻域, $(z^1,\cdots,z^n)$ 是局部坐标, 该局部坐标 U 同胚于 $\mathbf{C}^n$ 中的单位球 B_n, 且 $z^1(p)=\cdots=z^n(p)=0$. 那么,

$$\pi:\tilde{B}_n\backslash E\longrightarrow U\backslash\{p\}\subset M$$

是一个同胚. 这样, 我们定义在复流形 M 上 p 点的**吹大** $\tilde{M}_p$ 为

$$\tilde{M}_p = M\backslash\{p\} \cup_\pi \tilde{B}_n,$$

这里 $\cup_\pi$ 的意思是每个点 $\tilde{y} \in \tilde{B}_n\backslash E$ 都等同于 $\pi(\tilde{y})$. 事实上, 用 $\tilde{B}_n$ 来替换 B_n 就可得到 $\tilde{M}_p$. 从映射 $\pi : \tilde{M}_p \longrightarrow M$ 中得知, $\pi : \tilde{M}\backslash\pi^{-1}(p) \longrightarrow M\backslash\{p\}$ 是一个同构, 其在 $\tilde{M}_p$ 中的逆像 $\pi^{-1}(p)$ 就称为在 p 点的**吹大的例外除子**, 通常由 E_p 表示.

注意 $\tilde{M}_p$ 仍是一个 n 维复流形, 为此只需证明 $\tilde{M}_p$ 是一个在 E_p 点附近的复流形. 设 U 是 M 的一个局部坐标邻域, $p \in U$, $(z^1, \cdots, z^n)$ 是 U 上的坐标且使得 $z^1(p) = \cdots = z^n(p) = 0$, 那么

$$\tilde{U} = \pi^{-1}(U) = \{(z, l) \in U \times CP^{n-1} \mid z_i l_j = z_j l_i,\ \ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}.$$

令

$$\tilde{V}_i = \{l_i = 0 \mid (z, l) \in \tilde{U}\},$$

故 $\{\tilde{V}_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ 是 $\tilde{U}$ 的一个开覆盖, 在 $\tilde{V}_i$ 上我们定义局部坐标 $z^k_{(i)} = \dfrac{l_k}{l_i} = \dfrac{z_k}{z_i}$; $k \neq i$. $z^i_{(i)} = z^i$, 则 $(z^1_{(i)}, \cdots, z^n_{(i)})$ 是 $\tilde{V}_i$ 上的局部坐标, 且若 $\tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j \neq \varnothing$,

$$\begin{cases} z^k_{(i)} = {z^i_{(j)}}^{-1} z^k_{(j)}, \quad k \neq i, j, \\ z^j_{(i)} = {z^i_{(j)}}^{-1}, \\ z^{(i)}_{(i)} = z^j_{(j)} z^i_{(j)} \end{cases} \tag{12.25}$$

是一个全纯变换, 而且通过计算得到

$$\det \frac{\partial(z^1_{(i)}, \cdots, z^{n-1}_{(i)})}{\partial(z^1_{(j)}, \cdots, z^{n-1}_{(j)})} = (z^i_{(j)})^{-(n-1)} \neq 0,$$

故 $\tilde{M}_p$ 仍是一个 n 维复流形.

$$\tilde{V}_i \cap E_p = \{z \in \tilde{V}_i \mid z^i_{(i)} = z^i = 0\},$$

$[E_p]$ 是除子 E_p 对应的线丛, 其转换函数为

$$\phi_{ij} = \frac{z_i}{z_j} = \frac{l_i}{l_j}, \quad 在\ \tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j\ 上,$$

故 $[E_p]\,|_{\tilde{U}}$ 等同于纤维

$$[E_p]_{(z,l)} = \{\lambda(l_1 \cdots l_n) \mid \lambda \in \mathbf{C}\}.$$

所以, $[E_p]|_{E_p}$ 仅仅是 $E_p = CP^{n-1}$ 上的**万有丛** $J = -[H]$. 而 $[E_p]^* = [-E_p]$, 故 $[-E_p]|_{E_p} = [H]$ 是 $E_p = CP^{n-1}$ 上的超平面线丛.

吹大技巧通常用于 $n \geqslant 2$ 的情形. 由于 $n = 1$ 时, 即 Riemann 曲面的情形, 其上的每一点都是这个 Riemann 曲面除子, 故都可以对应一个线丛. 而当 $n \geqslant 2$ 时, 流形上的点却不是除子, 通过吹大而得到的例外除子 E_p, 就像 Riemann 曲面上的点一样.

定义 12.19 设 $\lambda : N \longrightarrow M$ 是从复流形 N 到复流形 M 的全纯映射, 设 $\pi : E \longrightarrow M$ 是 M 上秩为 r 的全纯向量丛, 则可定义 N 上秩为 r 的全纯向量丛 λ^*E 如下:

设 $\{U_\alpha\}_\alpha$ 是一个包含于 E 的平凡化邻域的开覆盖, $\{\phi_{\alpha\beta}\}$ 是转换函数, 则 $\{\lambda^{-1}(U_\alpha)\}$ 是 λ^*E 的平凡化邻域, 且 $\{\phi_{\alpha\beta} \circ \lambda\}$ 是 λ^*E 的转换函数.

命题 12.20 $K_{\tilde{M}_p}, K_M$ 分别是复流形 $\tilde{M}_p$ 与 M 的典则线丛, 则

$$K_{\tilde{M}_p} = [E_p]^{n-1} \otimes \pi^* K_M.$$

证明: 设 $\{U, U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 M 的开覆盖, 使得 $p \in U$, $p \notin U_\alpha$; $\forall \alpha \in I$. 这里 U, U_α; $\alpha \in I$ 是其局部坐标邻域. 设 $(z^1, \cdots, z^n)$ 为 U 的局部坐标且 $z^1(p) = \cdots = z^n(p) = 0$, $\{\tilde{V}_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ 为 $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ 的开覆盖, 其局部坐标是

$$(z^1_{(i)}, \cdots, z^n_{(i)}) = \left(\frac{l^1}{l^i}, \cdots, \frac{l^{i-1}}{l^i}, z^i, \frac{l^{i+1}}{l^i}, \cdots, \frac{l^n}{l^i}\right); \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

$\tilde{U}_\alpha = \pi^{-1}(U_\alpha)$, 它的局部坐标与 U_α 是一样的, 其局部坐标用 $(z^1_{(\alpha)}, \cdots, z^n_{(\alpha)})$ 表示. 在 $\tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j$ 上,

$$\begin{aligned} dz^1_{(i)} \wedge \cdots \wedge dz^n_{(i)} &= d\left(\frac{l_1}{l_i}\right) \wedge \cdots \wedge d\left(\frac{l_{i-1}}{l_i}\right) \wedge dz_i \wedge d\left(\frac{l_{i+1}}{l_i}\right) \wedge \cdots \wedge d\left(\frac{l_n}{l_i}\right) \\ &= \left(\frac{z^j}{z^i}\right)^{n-1} dz^1_{(j)} \wedge \cdots \wedge dz^n_{(j)}, \end{aligned}$$

$\phi_{ij} = \left(\dfrac{z^i}{z^j}\right)^{n-1}$ 是 $K_{\tilde{M}_p}$ 在 $\tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j$ 上的转换函数.

又因为 $z^1_\alpha = \dfrac{l^1}{l^i} z^i_\alpha, \cdots, z^i_\alpha = z^i_\alpha, z^{i+1}_\alpha = \dfrac{l^{i+1}}{l^i} z^i_\alpha, \cdots, z^n_\alpha = \dfrac{l^n}{l^i} z^i_\alpha$, 故

$$dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n = (z^i)^{n-1} dz^1_{(i)} \wedge \cdots \wedge dz^n_{(i)},$$

$$\phi_{i\alpha} = (z^i)^{n-1}; \quad 在 \tilde{V}_i \cap \tilde{U}_\alpha 上,$$

$$\phi_{\alpha\beta} = \pi^* \phi'_{\alpha\beta}; \quad 在 \tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta 上,$$

这里 $\phi'_{\alpha\beta}$ 是 K_M 在 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上的转换函数. 而 $[E_p]$ 的转换函数是

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_{ij} = \dfrac{z^i}{z^j}, & z \in \tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j, \\ \tilde{\phi}_{i\alpha} = z^i, & z \in \tilde{V}_i \cap \tilde{U}_\alpha, \\ \tilde{\phi}_{\alpha\beta} = 1, & z \in \tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta. \end{cases} \tag{12.26}$$

因此, $K_{\tilde{M}_p} \otimes [E_p]^{-n+1}$ 的转换函数为

$$\begin{cases} f_{ij} \equiv 1; & z \in \tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j, \\ f_{i\alpha} \equiv 1; & z \in \tilde{V}_i \cap \tilde{U}_\alpha, \\ f_{\alpha\beta} \equiv \pi^*\phi'_{\alpha\beta}; & z \in \tilde{U}_\alpha \cap \tilde{U}_\beta, \end{cases} \tag{12.27}$$

这里 $f_{ij}, f_{i\alpha}, f_{\alpha\beta}$ 是 $\pi^* K_M$ 的转换函数, 所以,

$$K_{\tilde{M}_p} = \pi^* K_M \otimes [E_p]^{n-1}.$$

设 L, L_1 是复流形 M 上的两个线丛, h, h_1 分别是 L 与 L_1 的 Hermite 度量. 显然, $h \cdot h_1$ 是 $L \otimes L_1$ 的 Hermite 度量, 根据曲率形式矩阵的定义,

$$\Theta_{L\otimes L_1} = \Theta_L + \Theta_{L_1}.$$

为了计算 $\Theta_{K_{\tilde{M}_p}}$, 只需计算 $\Theta_{[E_p]}$ 与 $\Theta_{[-E_p]}$. 而由于 $-[E_p]$ 是 $[E_p]$ 的对偶线丛, 故 $\Theta_{[-E_p]} = -\Theta_{[E_p]}$.

设 $\tilde{U}$ 与 $\tilde{V}_i$; $1 \leqslant i \leqslant n$ 的定义如上所述. 令 $\eta : \tilde{U} = \pi^{-1}(U) = \{(z,l) \in U \times CP^{n-1} \mid z^i l^j = z^j l^i;\ 1 \leqslant i,j \leqslant n\} \longrightarrow CP^{n-1}$ 为一个投射, 使得 $\tau((z,l)) = l \in CP^{n-1}$. 设 $U_i = \{l \in CP^{n-1} \mid l^i \neq 0\}$; $1 \leqslant i \leqslant n$ 是 CP^{n-1} 中的开集, 且 $\tau^{-1}(U_i) = \tilde{V}_i$; $1 \leqslant i \leqslant n$, 则 $[H]$ 在 $U_i \cap U_j$ 上的转换函数为

$$\phi_{ij} = \frac{l_j}{l_i}.$$

在 $\tilde{V}_i \cap \tilde{V}_j$ 上, $(\phi_{ij}) = (\tilde{\phi}_{ij})^{-1}$.

故在 $\tilde{U}$ 上 $\eta^*[H] = [-E_p]$, 即 $\eta^*[-H] = [E_p]$. 用 h_0 来表示 $[-H]$ 的典则度量, 则 $h_1 = h_0 \circ \eta$ 是 $[E_p]$ 定义在 $\tilde{U}$ 上的 Hermite 度量. 选取足够小的 ϵ, 使得 $B(0,2\epsilon) = \{z \in \mathbf{C}^n \,|\, |z| < 2\epsilon\} \subset U$. 这里 $z = (z^1, \cdots, z^n)$ 是 U 上的局部坐标, 使得 $z^i(p) = 0; 1 \leqslant i \leqslant n$.

$\{B(0,2\epsilon); M\backslash\overline{B(0,\epsilon)}\}$ 是 M 的开覆盖, 则 $\{\pi^{-1}(B(0,2\epsilon)); \pi^{-1}(M\backslash B(0,\epsilon))\}$ 是 $\tilde{M}_p$ 的开覆盖. 设 $\{\rho_1, \rho_2\}$ 是其关于 $\{\tilde{U}_{2\epsilon}, \tilde{M}_p\backslash\overline{\tilde{U}_\epsilon}\}$ 的单位分解, 而且 $\rho_1 \mid_{\tilde{U}_\epsilon} \equiv 1$, $\rho_2 \mid_{\tilde{M}_p\backslash\tilde{U}_{2\epsilon}} \equiv 1$, 这里 $\tilde{U}_{2\epsilon} = \pi^{-1}(B(0,2\epsilon))$ 且 $\tilde{U}_\epsilon = \pi^{-1}(B(0,\epsilon))$.

设 $\sigma \in H^0(\tilde{M}_p, \mathcal{O}(E_p)) = \Gamma(\tilde{M}_p, \mathcal{O}(E_p))$, 使得 σ 的零点集就是 E_p. 那么这样的截形一定存在, 如 $[E_p]$ 的定义函数就是满足零点为 E_p 的截形, 故 σ 在 $\tilde{M}_p \backslash E_p$ 上没有零点. 所以, 我们可在 $\tilde{M}_p \backslash \overline{\tilde{U}_\epsilon}$ 上定义 $[E_p]$ 的 Hermite 度量 h_2, 使得当 $\tilde{M}_p \backslash \overline{\tilde{U}_\epsilon}$ 时,

$$\|\sigma\|^2 = 1.$$

进一步, 又可定义 $[E_p]$ 的 Hermite 度量 h,

$$h = \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2.$$

现在我们来计算 $[-E_p]$ 关于度量 h^{-1} 的曲率形式, 只需考虑如下三种情形:

1. 在 $\tilde{M} \backslash \tilde{U}_{2\epsilon}$ 上, $\rho_2 \equiv 1$, 故 $\|\sigma\|^2 \equiv 1$. 那么,

$$\Theta_{[E]} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial}\partial \log\ \|\sigma\|^2 = 0 = \Theta_{[-E_p]}.$$

2. 在 $\tilde{U}_\epsilon \backslash E_p \cong U_\epsilon \backslash \{x\}$ 上, $\rho_1 \equiv 1$, 故

$$\Theta_{[E]_p} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial}\partial \log h_1 = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \bar{\partial}\partial \log \eta^* h_0 = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \eta^* \bar{\partial}\partial \log h_0 \leqslant 0.$$

则在 $\tilde{U}_\epsilon \backslash E_p$ 上,

$$\Theta_{-[E_p]} = -\Theta_{[E_p]} \geqslant 0.$$

3. 由于 $\eta^*([H])$ 同构于 $[-E_p]\,|_{E_p}$, 故在 E_p 上,

$$\Theta_{[-E_p]}\,|_{E_p} = -\Theta_{[E_p]}\,|_{E_p} = \Theta_{[H]} > 0.$$

综上所述, 我们知道

$$\Theta_{[-E_p]} = -\Theta_{[E_p]} = \begin{cases} 0, & z \in \tilde{M} - \tilde{U}_{2\epsilon}, \\ \geqslant 0, & z \in \tilde{U}_\epsilon, \\ > 0, & z \in E_p. \end{cases} \tag{12.28}$$

命题 12.21 设 L 是紧复流形 M 上的正线丛, 则存在 $m_0 \in \mathbf{Z}^+$ 使得 $\forall m \geqslant m_0$,

$$\pi^* L^m \otimes [E_p]^{-1} \otimes K_{\tilde{M}_p}^{-1} > 0. \tag{12.29}$$

证明: 根据命题 12.20, 可知

$$K_{\tilde{M}_p} = [E_p]^{n-1} \otimes \pi^* K_M,$$

故 (12.29) 等价于

$$\pi^* L^m \otimes [E_p]^{-n} \otimes \pi^* K_M^{-1} > 0. \tag{12.30}$$

由于 $\Theta_{\pi^*L}=\pi^*\Theta_L\geqslant 0$, 且若 $\pi:\tilde{M}_p\backslash E_p\longrightarrow M\backslash\{p\}$ 是双全纯的, 那么在 $\tilde{M}_p\backslash E_p$ 上就有 $\pi^*\Theta_L>0$. 根据 (12.28), 对 $\forall m\in\mathbf{Z}^+$, 在 $\tilde{M}_p\backslash\tilde{U}_{2\epsilon}\cup(\tilde{U}_\epsilon\backslash E_p)$ 上,

$$m\pi^*\Theta_L+n\Theta_{[-E_p]}>0. \tag{12.31}$$

由于在 E_p 上 $\Theta_{-[E_p]}>0$, 故 (12.30) 在 E_p 上也成立. 又因为 $\tilde{U}_{2\epsilon}\backslash\tilde{U}_\epsilon$ 是相对紧集合, 故 $n\Theta_{-[E_p]}$ 具有下界, 且 $\pi^*\Theta_L$ 在 $\tilde{U}_{2\epsilon}\backslash\tilde{U}_\epsilon$ 上是正的. 所以, 存在 $m_1\in\mathbf{Z}^+$ 使得在 $\tilde{U}_{2\epsilon}\backslash\tilde{U}_\epsilon$ 上,

$$m_1\pi^*\Theta_L+n\Theta_{[-E_p]}>0.$$

进而由 $m\geqslant m_1$, 可知在整个 $\tilde{M}_p$ 上, 都有

$$m_1\pi^*\Theta_L+n\Theta_{[-E_p]}>0.$$

另一方面, K_m^{-1} 在紧复流形 M 上具有下界, 故存在 $m_2\in\mathbf{Z}^+$ 使得在 M 上,

$$m_2\Theta_L+\Theta_{K_m^{-1}}>0.$$

由于

$$m_2\Theta_{\pi^*L}+\Theta_{\pi^*K_M^{-1}}=\pi^*(m_2\Theta_L+\Theta_{K_M^{-1}})\geqslant 0,$$

且 $\pi:M_p\backslash E_p\longrightarrow M\backslash\{p\}$ 是双全纯的, 故 $\pi^*(m_2\Theta_L+\Theta_{K_M^{-1}})>0$ 在 $\tilde{M}_p\backslash E_p$ 上都成立. 设 $v\in T_x^{1,0}(\tilde{M}_p)$, $x\in E_p$, $\langle\pi^*(m_2\Theta_L+\Theta_{K_M^{-1}}),v\wedge\bar{v}\rangle=0$. 由于 $\langle\pi^*(m_2\Theta_L+\Theta_{K_M^{-1}}).v\wedge\bar{v}\rangle=\langle m_2\Theta_L+\Theta_{K_M^{-1}},\pi^*v\wedge\overline{\pi^*v}\rangle=0$, 且 $m_2\Theta_L+\Theta_{K_M^{-1}}>0$, 故 $\pi^*v=0$, 即 $v\in T_x(E_p)$. 但是 $\langle\Theta_{[-E_p]},v\wedge\bar{v}\rangle>0$, 取 $m_0=m_1+m_2$, 那么当 $m\geqslant m_0$ 时, (12.30) 成立. □

根据命题的证明, 可得如下的推论.

(1) 设 L 是紧复流形 M 上的正线丛, $k_1,k_2\in\mathbf{Z}^+$, 则存在 $m_0\in\mathbf{Z}^+$ 使得对 $\forall m\geqslant m_0$,

$$\pi^*L^m\otimes[E_p]^{-k_1}\otimes K_{\tilde{M}_p}^{-k_2}>0.$$

(2) 设 L 是紧复流形 M 上的正线丛, $s=\{p_1,\cdots,p_t\}$ 是 M 上的有限点集, $\widetilde{M}_s$ 是对 s 的每个点 $p_i,1\leqslant i\leqslant t$ 吹大所成的紧复流形, $\pi:\widetilde{M}_s\to M$ 是投影映射, $k_0,\cdots,k_t\in\mathbf{Z}^+,E=k_1E_{p_1}+\cdots+k_tE_{p_t}$ 是 $\widetilde{M}_s$ 上的除子, 则存在 $m_0\in\mathbf{Z}^+$, 当 $m\geqslant m_0$ 时,

$$\pi^*L^m\otimes[E]^{-1}\otimes K_{\widetilde{M}_s}^{-k_0}>0.$$

现在我们开始证明 Kodaira 嵌入定理.

定理 12.22　*若紧复流形 M 存在一个正定的线丛 L, 则 M 是一个代数流形, 即可嵌入到射影空间中.*

证明: 我们将证明存在 $k_0 \in \mathbf{Z}^+$ 使得若 $k \geqslant k_0$, M 通过基 $\Gamma(M, L^k)$ 被嵌入到射影空间中.

假设 $N+1 = \dim_C H^0(M, \mathcal{O}(L^k)) = \dim_C \Gamma(M, \mathcal{O}(L^k))$, $(s_1, \cdots, s_{N+1})$ 是 $H^0(M, \mathcal{O}(L^k))$ 的一组基, 则可定义全纯映射

$$\tau_k : M \longrightarrow CP^N,$$

$$x \mapsto (s_1(x), s_2(x), \cdots, s_N(x)).$$

首先要验证上述的定义是有意义的, 即 $s_1, \cdots, s_{N+1}$ 没有公共零点. 其次, 要证明:

1. 对任意的 $x, y \in M$, $k \geqslant k_0$, 限制映射

$$H^0(M, \mathcal{O}(L^k)) \xrightarrow{r_{x,y}} L_x^k \otimes L_y^k$$

是满射.

2. 对任意的 $x \in M$, $k \geqslant k_0$, 微分映射

$$H^0(M, \mathcal{I}_x(L^k)) \xrightarrow{d_x} \varepsilon_x^{1,0} \otimes L_x^k$$

是满射.

这里的断言 1 表明映射 τ_k 是有意义的, 且存在将点 x 和 y 分离的截形 $s \in H^0(M, \mathcal{O}(L^k))$.

断言 2 表明 τ_k 的 Jacobi 矩阵的秩是 n, 故 τ_k 是一个局部嵌入.

为证明断言 1, 设 $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ 为 x 与 y 的吹大, $E_x = \pi^{-1}(x)$ 与 $E_y = \pi^{-1}(y)$ 是这个吹大的例外除子. 令 $E = E_x + E_y$, $\tilde{L} = \pi^* L$, 考虑截形间映射的拉回

$$\pi^* : H^0(M, \mathcal{O}_M(L^k)) \longrightarrow H^0(\tilde{M}, \mathcal{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k)). \tag{12.32}$$

那么对 $\forall \tilde{\sigma} \in H^0(\tilde{M}, \mathcal{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k))$, 存在截形 $\sigma \in H^0(M, \mathcal{O}_M(L^k))$ 使得 $\pi^*\sigma = \tilde{\sigma}$. 由于 $\pi : \tilde{M}\backslash E \longrightarrow M\backslash\{x, y\}$ 是双全纯的, 故存在 $\sigma \in \Gamma(M\backslash\{x, y\}, \mathcal{O}_M(L^k))$ 使得 $\pi^*(\sigma) = \tilde{\sigma}$. 根据连续性定理, σ 可延拓至截形 $\sigma \in H^0(M, \mathcal{O}_M(L^k))$. 再由唯一性定理, $\pi^*\sigma = \tilde{\sigma}$, 故 (12.32) 是一个同构. 进一步, 根据定义 $\tilde{L}^k = \pi^* L^k$ 沿 E_x 和 E_y 是平凡的, 即

$$(\tilde{L}^k)\mid_{E_x} = E_x \times L_x^k, \quad (\tilde{L}^k)\mid_{E_y} = E_y \times L_y^k.$$

因此,

$$H^0(E, \mathcal{O}_E(\tilde{L}^k)) \cong L_x^k \oplus L_y^k.$$

考虑如下图表

$$
\begin{array}{ccc}
H^0(M,\mathcal{O}(L^k)) & \xrightarrow{r_{x,y}} & L^k_x \oplus L^k_y \\
\pi^* \downarrow & & \| \\
H^0(\tilde{M},\mathcal{O}(\tilde{L}^k)) & \xrightarrow{r_E} & H^0(E,\mathcal{O}_E(\tilde{L}^k))
\end{array} \tag{12.33}
$$

可知它是交换的, 故若能证明 r_E 是满射, 则断言 1 就成立了.

在 $\tilde{M}$ 上, 存在层的正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k - [E]) \longrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k) \longrightarrow \mathcal{O}_E(\tilde{L}^k) \longrightarrow 0.$$

若 $H^1(\tilde{M},\mathcal{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k - [E])) = 0$, 则 (12.33) 中的 r_E 是满射, 这是因为

$$\mathcal{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^K - [E]) = \mathcal{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k - [E] + K^*_{\tilde{M}} + K_{\tilde{M}}).$$

根据命题 12.21, 存在 $k_0 \in \mathbf{Z}^+$, 使得当 $k \geqslant k_0$ 时, $\tilde{L}^k - [E] + K^*_{\tilde{M}} = \tilde{L}^k - [E] - K_{\tilde{M}}$ 是正的. 将 Kodaira 消灭定理 12.12 应用在 $H^q(\tilde{M},\mathcal{O}_{\tilde{M}}(\tilde{L}^k - [E]))$ 上, 即得断言 1 是成立的.

断言 2 的证明与断言 1 是类似的.

对 $\forall x \in M$, 设 $\pi : \tilde{M}_x \longrightarrow M$ 表示 M 在点 x 的吹大, $E = \pi^{-1}(x)$ 是例外除子.

$$\pi^* : H^0(M,\mathcal{O}_M(L^k)) \longrightarrow H^0(\tilde{M}_x,\mathcal{O}_{\tilde{M}_x}(\tilde{L}^k)) \tag{12.34}$$

是一个同构. 若 $\sigma \in H^0(M,\mathcal{O}_M(L^k))$, 使得 $\sigma(x) = 0$ 当且仅当 $\tilde{\sigma} = \pi^*(\sigma)$ 在 E 上为零, 故我们可诱导一个同构

$$\pi^* : H^0(M,\mathcal{I}_x(L^k)) \longrightarrow H^0(\tilde{M}_x,\mathcal{O}_{\tilde{M}_x}(\tilde{L}^k - [E])).$$

这里 $\mathcal{I}_x$ 是在 x 点为零的全纯函数芽层. 类似前面的做法, 我们可得到

$$H^0(E,\mathcal{O}_E(L^k - [E])) = L^k_x \otimes H^0(E,\mathcal{O}_E([-E])) = L^k_x \otimes \varepsilon^{1,0}_x(M)$$

和交换图表

$$
\begin{array}{ccc}
H^0(M,\mathcal{I}_x(L^k)) & \xrightarrow{d_x} & \varepsilon^{1,0}_x \otimes L^k_x \\
\downarrow \pi^* & & \| \\
H^0(\tilde{M}_x,\mathcal{O}(\tilde{L}^k - [E])) & \xrightarrow{r_E} & H^0(E,\mathcal{O}_E(\tilde{L}^k - [E]))
\end{array}
$$

为证明 d_x 是满射, 我们只需证明 r_E 是满射. 由于 $\tilde{L}^k - [E] + K^*_{\tilde{M}_x} + K_{\tilde{M}_x} = \tilde{L}^k - [E]$, 根据命题 12.21, 存在 k_0 使得 $k \geqslant k_0$ 时, $\tilde{L}^k - [E] + K^*_{\tilde{M}_x} > 0$. 那么根据 Kodaira 消灭定理, $H^q(\tilde{M},\mathcal{O}(\tilde{L}^k - [E]) = 0; q \geqslant 1$, 故 r_E 是满的.

我们余下的工作就是找出一个 k_0 使得断言 1 和断言 2 对 x 与 y 的任意选取都成立. 断言 1 表示对 $\forall x, y \in M, x \neq y$, 则存在 $k \in \mathbf{Z}^+$ 使 $\tau_k(x) \neq \tau_k(y)$. 由连续性知道存在 $U_x \in \mathcal{U}_x$ 与 $U_y \in \mathcal{U}_y$, 使得对任意 $(x', y') \in \mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_y$, $\tau_k(x') \neq \tau_k(y')$, 这里的 k 是依赖于 $(x, y) \in M \times M$ 的. 断言 2 表示对 $(x, x) \in M \times M$, 则存在 $k \in \mathbf{Z}^+$ 使得对任意 $(x', y') \in \mathcal{U}_x \times \mathcal{U}_x$, $U_x \in \mathcal{U}_x$ 且 $x' \neq y'$ 时, $\tau_k(x') \neq \tau_k(y')$, 这里的 k 是依赖于 $x \in M$ 的. 现在对所有的 $(x, y) \in M \times M$, 存在用上面方法找到的 $U_x \times U_y$, 则 $U_x \times U_y$ 是 $M \times M$ 上的一个开覆盖. 因为 $M \times M$ 依旧是一个紧复流形, 因此存在有限个 $U_{x_1} \times U_{y_1}, \cdots, U_{x_s} \times U_{y_s}$ 覆盖 $M \times M$, 每个 $U_{x_i} \times U_{y_i}, 1 \leqslant i \leqslant s$ 都对应有一个 k_i, 取 $k_0 = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant s} k_i$, 则对 $\forall (x, y) \in M \times M, x \neq y$, 必有 $\tau_{k_0}(x) \neq \tau_{k_0}(y)$.

最后, 我们对等式 $H^0(E, \mathcal{O}_E([-E])) \cong \varepsilon_x^{1,0}$ 做一个说明. 根据例外除子 E 的定义, 可知 $P(T_x^{1,0}(M)) = CP^{n-1}$. 设 $(l_1, \cdots, l_n)$ 为 CP^{n-1} 的齐次坐标, $U_i = \{l \in CP^{n-1} \mid l^i \neq 0\}$, 则 $[-E]$ 的转换函数 $\phi_{ij} = \dfrac{l_j}{l_i}$; $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

当 $s = (s_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in H^0(E, O_E([-E]))$; $s_i \in \Gamma(U_i, O_E([-E]))$; $1 \leqslant i \leqslant n$ 时,

$$s_i = \phi_{ij} s_j = \frac{l_j}{l_i} s_j.$$

故在 $U_i \cap U_j$ 上, $s_i l_i = s_j l_j$. 令 $\sigma |_{U_i} = s_i l_i$ 是 $T_x^{1,0}(M)$ 上的线性泛函, 因此每个 $s \in H^0(E, \mathcal{O}_E([-E]))$ 可视为 $T_x^{1,0}(M)$ 上相应的线性泛函. □

参考文献

[1] A. Andreotti and H. Grauert, Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 193-259.

[2] A. Andreotti and R. Narasimhan, A topolopical property of Runge pairs, Ann. Math. 76 (1962), 499-509.

[3] A. Andreotti and R. Narasimhan, Oka's Heftungslemma and the Levi probles for complex spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 111 (1964), 345-366, Zbl. 134.60.

[4] A. Andreotti and W. Stoll, Extension of holomorphic maps, Ann. Math. 72 (1960), 312-348.

[5] A. Andreotti and E. Vesentini, On the pseudo-rigidity of Stein manifolds, Ann. Scuola Norm. Pisa 16 (1962), 213-255.

[6] A. Andreotti and E. Vesentini, Carleman estimats for the Laplace-Beltrami equations on complex manifolds, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. 25 (1965), 81-130.

[7] M. E. Ash, The basic estimate of the $\overline{\partial}$-Neumann problem in the non- Kählerian case, Amer. J. Math. 86 (1964), 247-254.

[8] H. Behnke, Generalisations du théoréme de Runge pour des functions multiformes de variables complexes, Coll. sur les fonct. de plus. var., Brussels, 1953.

[9] H. Behnke and H. Holmann, Der rungesche approximationssatz and seine Verallgmeinerungen in der funktionentheorie mehrerer komplexer Verämderlichen, Jahr. d. DMV 64 (1961), 87-99.

[10] H. Behnke and F. Sommer, Über die Vorausssetzungen des Kontinuit ätsatzes, Math. Ann. 121 (1950).

[11] H. Behnke and K. Stein, Konvergente folgen von regularitätsbereiche, Math. Ann. 116 (1938), 204-216.

[12] H. Behnke and K. Stein, Approximation analytischer functionen in Vorgegeben Gebieten des Raumes von n komplexen Veränderlichen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1 (1939), 15.

[13] H. Behnke and K. Stein, Die Konvexität in der funktionentheorie mehrerer Veränderlichen, Mitt. Math. Ges. Hamburg VIII (1940).

[14] H. Behnke and K. Stein, Die Singulariaritäten der analytischen Functionen mehrer Veränderlichen (1951), 227-242.

[15] H. Behneke and K. Stein, Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete, Math. Ann. 124 (1951), 1-16.

[16] S. Bergman, Geometric and potential-theoretical methods in the theory of functions of several comples variables, Proc. of the Int. Cong. of Math. 2 (1950), 165-173.

[17] S. Bergman, The kernel function and conformal mapping, Math. Surv. Amer. Math. Soc. 5 (1950).

[18] S. Bergman, Kernel Function and Extended Classes in the Theorey of Functions of Complex Variables, Coll. sur les fonct. de plus. var., Brussels, 1953.

[19] S. Bergman, Bounds for analytic function in domains with a distinguished boundary surface, Math. Z. 63 (1955), 173-194.

[20] E. Bishop, Some global problem in the theory of functions of several complex variables, Amer. J. Math. 83 (1961), 479-498.

[21] E. Bishop, Analytic functions with values in a Frechet space, Pacific J. Math. 12 (1962), 1177-1192.

[22] E. Bishop, Holomorphic completion; analytic continuation; and the interpolation of semi-norms, Ann. Math. 78 (1963), 468-500.

[23] A. Blanchard, Sur les variétés analytuques complexes, Ann. Sci. École Norm. Super. 73 (1956), 157-202.

[24] S. Bochner, A theorem on analytic continuation of function in sevral variables, Ann. Math. 44 (1938), 14-19.

[25] S. Bochner, Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula, Ann. Math. 44 (1943), 652-673.

[26] S. Bochner, Hartogs' theorem in Euclidean space and a related theorem on the torus, Contributions to Function Theory (Tata Institute, Bombay, 1960), pp. 79-113.

[27] S. Boncher and W. T. Martin, Functions of Several Complex Variables (Princeton Univ. Press, 1948).

[28] S. Boncher and W. T. Martin, Complex spaces with singularities, Ann. Math. 57 (1953), 490-519.

[29] H. J. Bremermann, Die Holomorphie hullen der Tuben-und Halbtubengebiete, Math. Ann. 127 (1954), 406-423.

[30] H. J. Bremermann, Über die Äquivalenz der pseudo-konvexen Gegiete und der Holomorphic-gebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen, Math. Ann. 128 (1954), 63-91.

[31] H. J. Bremermann, Complex convexity, Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), 17-51.

[32] H. J. Bremermann, Die characterisierung Rungescher Gebiete durch plurisubharmonische funktionen, Math. Ann. 136 (1958), 173-186.

[33] H. J. Bremermann, On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudoconvex domains, Trans. Amer. Math. Soc. 91 (1959), 246-276.

[34] A. Browder, Cohomollgy of maximal ideal spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 515-516.

[35] E. Calabi and B. Eckmann, A class of compact complex manifolds; which are not algebraic, Ann. Math. 58 (1953), 494-500.

[36] H. Cartan, Determination des points exceptionnels d'un systeme de p functions analytiques de n variables complexes, Bull. Sci. Math. France 57 (1933), 334-344.

[37] H. Cartan, Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, J. Math. Pures Appl. 19 (1940), 1-26.

[38] H. Cartan, Idéaux de fonctions analytiques de variables complexes, Ann. Sci. École Norm. Sup. 61 (1944), 149-197.

[39] H. Cartan, Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes, Bull. Soc. Math. France 78 (1950), 28-64.

[40] H. Cartan, Probl émes globaux dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complesex, Proc. Int. Congr. Math. 1950, I, pp. 152-164.

[41] H. Cartan, Séminaire E.N.S.; 1951-1952, École Normale Supérieure, Paris.

[42] H. Cartan, Etude des germs de sous variétés analytiques, Séminaire Cartan, t. 4, 1951-1952.

[43] H. Cartan, Variétés analytiques complexes et cohomologie, Coll. sur les Fonct. de Plus. Var., Brussels, 1953.

[44] H. Cartan, Séminaire E.N.S.; 1953-1954, École Normale Supérieure, Paris.

[45] H. Cartan, Variétés analytiqueq réeles et variétés analytiques complexes, Bull. Soc. Math. France 85 (1957), 77-99.

[46] H. Cartan, Sur les fonctions de plusieurs complexes: les éspaces analtiques, Proc. Int. Congr. of Math. Edinburgh, 1958.

[47] H. Cartan, Prolongement des éspaces analytiques normaux, Math. Ann. 136 (1958), 97-110.

[48] H. Cartan, Quotients of complex analytic spaces, Contributions of Function Theory (Tata Institute, Bombay, 1960).

[49] H. Cartan and J. P. Serre, Un théoréme de finitude concernant les variétés analytiques compactes, C. R. Acad. Sci. Paris 237 (1953), 128-130.

[50] H. Cartan and P. Thullen, Zur theoreie der singulartäten der funktionen mehrerer veränderlichen: Regularitäts-und konvergenzbereiche, Math. Ann. 106 (1932), 617-647.

[51] S. S. Chern, Complex Manifolds (University of Chicago, 1956).

[52] W. L. Chow, On compact complex analytic varieties, Amer. J, Math. 71 (1949), 893-914.

[53] P. Cousin, Sur les fonctions de n variables complexes, Acta Math. 19 (1895).

[54] K. de Leeuw, A type of converxity in the space of n complex variables, Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), 193-204.

[55] K. de Leeuw, Functions on circular subsets of the space of n complex variables, Duke Math. J. 24 (1957), 417-432.

[56] G. de Rham, Variétés Différentiables, Paris, 1955.

[57] G. de Rham, Seminar on Several Complex Variables (Institute for Advanced Study, Princeton, 1958).

[58] F. Docquier and H. Grauert, Levisches probles und Rungescher Satz für Teilgébiete Steinscher mannigfaltigkeite, Math. Ann. 140 (1960), 94-123.

[59] P. Dolbeault, Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes, C. R. Acad. Sci. Paris 263 (1953), 175-177.

[60] P. Dolbeault, Formes differentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe; I, Ann. Math. 64 (1956), 83-130; II, Ann. Math. 65 (1957), 282-330.

[61] R. E. Edwards, Holomorphic vector-valued functions and Hartogs' theorem, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 507-509.

[62] L. Ehrenpreis, A new proof and an extension of Hartog's theorem, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 507-509.

[63] L. Ehrenpreis, A fundamental principle for systems of linear differential equations with constant coeffcients and some of its applications, Proc. Int. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem, 1961, pp. 161-174.

[64] B. A. Fuks, Natural Boundaries of Analytic Functions of Complex Variables, A.M.S. Transl. 93 (1953).

[65] P. R. Garabedian and D. C. Spencer, Complex boundary value problems, Trans. Amer. Math. Soc. 73 (1952), 223-242.

[66] S. G. Gindikin, Analytic functions in tude domains, Dokl. Akad. Nauk SSSR 145 (1962), 1205-1208.

[67] R. Godement, Topologie Algeébrique et Théorie des Faisceaux (Hermann, 1958).

[68] H. Grauert, Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume, Math. Ann. 129 (1955), 233-259.

[69] H. Grauert, Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch die vollst ändige Kählersche Metrik, Math. Ann. 131 (1956), 38-75.

[70] H. Grauert, Approximationssätze für holomorphe Funktionen mit Werten in komplexen Rämen, Math. Ann. 133 (1957), 139-159.

[71] H. Grauert, Holomorphe funktionen mit Werten in komplexen Lieschen Gruppen, Math. Ann. 133 (1957), 450-472.

[72] H. Grauert, Analytische Faserungen über holomorph vollständigen Rämen, Math. Ann. 135 (1958), 263-273.

[73] H. Grauert, On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds, Ann. Math. 68 (1958), 460-472.

[74] H. Grauert, Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulr äume komplexen Strukturen, Inst. Hautes átudes, 5 (1960).

[75] H. Grauert, Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen, Math. Ann. 146 (1962), 331-368.

[76] H. Grauert and R. Remmert, Zur Theorie der Modifikationen; I; Stetige und eigentliche Modifikationen komplexen Rämen, Math. Ann. 129 (1955), 274-296.

[77] H. Grauert and R. Remmert, Plurisubharmonische Functionen in komplexen Rämen, Math. Z. 65 (1956), 175-194.

[78] H. Grauert and R. Remmert, Singularitäten komplexen Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete, Math. Z. 67 (1957), 103-128.

[79] H. Grauert and R. Remmert, Bilder und Ürbilder analytischer Garben, Ann. Math. 68 (1958), 393-443.

[80] H. Grauert and R. Remmert, Komplexen Rämen, Math. Ann. 136 (1958), 245-318.

[81] H. Grauert and R. Remmert, Theory of Stein Space (Springer, 1979); Grundlehren der Mathematicschen Wissenschaften 236.

[82] H. Grauert and R. Remmert, Coherent Analytic Sheaves (Springer, 1979); Grundlehren der Mathematicschen Wissenschaften 265.

[83] A. Grothendieck, Sur la classification des fibrès holomorphes la sphère de Riemann, Am. J. Math. 79 (1957), 121-138.

[84] A. Grothendieck, Eléments de Géométrie Algébrique, Publ. Math. Inst. des Hautes Études Scientifiques (1960).

[85] R. C. Gunning, On Vital's theorem for complex spaces with singularities, J. Math. Mech. 8 (1959), 133-142.

[86] R. C. Gunning, On Cartan's theorems A and B in several complex variables, Ann. Mat. Pura Appl. 55 (1961), 1-12.

[87] R. C. Gunning, Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables I; II; III (Wadsworth and Books/Cole, 1990).

[88] F. Hartogs, Einige Folgerungen aus Cauchuschen Intergralformel bei Funktionen mehrer Veränderlichen, Sitzb. Miinchener Akad. 36 (1906), 223.

[89] F. Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mecher unabhängiger

Veränderlichen insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen; welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortshreiten, Math. Ann. 62 (1906), 1-88.

[90] F. R. Harvey and R. O. Wells, Holomorphic approximation and hyperfunction theory on a C^1 totally real submanifold of a complex manifold, Math. Ann. 197 (1972), 287-318.

[91] E. Heinz, Ein elementarer Beweis des Satzes von Radá-Behnke-Stein- Cartan über analytische Funktionen, Math. Ann. 131 (1956), 258-259.

[92] F. Hirzebruch, Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrice, Erg. d. Math. 9 (1956).

[93] F. Hirzebruch, Topological Methords in Algebraic Geometry (Springer, 1966).

[94] S. Hitotumatu and O. Kota, Ideals of meromorphic functions of several complex variables, Math. Ann. 125 (1952), 119-128.

[95] S. Hitotumatu, On some conjectures concerning pseudoconvex domains, J. Math. Soc. Jpn. 6 (1954), 177-195.

[96] K. Hoffman, Minimal boundaries for analytic polyhedra, Rend. Circ. Mat. Pal. 9 (1960), 147-160.

[97] K. Hoffman and H. Rossi, The minimum boundary for an analytic polyhedron, Pac. J. Math. 12 (1962), 1347-1354.

[98] H. Hopf, Zur Topologie der komplexen Mannigfaltigkeiten, Studies and Essays Presented to R. Courant (Intersciencence, 1948), pp. 167-185.

[99] H. Hopf, Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten, Ren. Mat. Ser. V10 (1951), Rome.

[100] H. Hopf, Schlichte Abbildunfen lokale Modifikationen 4-dimentsionaler komplexen Mannigfaltigkeiten, Comm. Math. Helv. 29 (1955), 132-156.

[101] L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators (Springer-Verlag and Academic Press, 1963).

[102] L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables (D. van Nostrand, 1966).

[103] L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables (North-Holland, 1973).

[104] L. Hörmander and J. Wermer, L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator, Acta. Math. 113 (1965), 89-152.

[105] L. Hörmander and J. Wermer, Uniform approximation on compact sets in $\mathbf{C}^n$, Math. Scand. 23 (1968), 5-21.

[106] A. E. Hurd, Maximum modules algebras and local approximation in $\mathbf{C}^n$, Pac. J. Math. 13 (1963), 597-602.

[107] J. Kajiwara, Equivalence of Steinness and validity of Oka's principle for subdomains with continuous boundaries of a Stein manifold, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser.

A33 (1979), 38-38.

[108] S. Kobayashi, Geometry of bounded domains, Trans. Amer. Math. Soc. 92 (1959), 267-290.

[109] S. Kobayashi, On complete Bergman metric, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 511-518.

[110] K. Kodaira, On cohomology groups of compact analytic variables with coeffcients in some analytic function, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 39 (1953), 865-868.

[111] K. Kodaira, On Kähler varieties of restricted type, Ann. Math. 60 (1954), 28-48.

[112] K. Kodaira and D. C. Spencer, Groups of complex line bundles over compact Kähler varieties: Divisor class groups on algebraic vaieties, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 39 (1953), 868-877.

[113] J. J. Kohn, Harmonic integrals on Strong pseudoconvex manifolds; I; II, Ann. Math. 78 (1963), 112-148, 206-213; III 79 (1964), 450-472.

[114] J. J. Kohn and L. Nirenberg, Non-coercive boundary problems, Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965), 443-492.

[115] J. J. Kohn and H. Rossi, On the extension of holomorphic functions from the boundary of a complex manifold, Ann. Math. 81 (1965), 451-472.

[116] J. J. Kohn and D. C. Spencer, Complex Neumann problems, Ann. Math. 66 (1957), 89-140.

[117] B. O. Koopman and A. B. Brown, On the covering of analytic loci by complexes, Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932), 231-251.

[118] E. Kreyszig, Steiige Modifikayionen komplexer Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 128 (1955), 479-492.

[119] N. Kuhlmann, Zur Theorie der Modifikationen algebraischer Varietäten, Math. Schr., Math. Inst. Univ. Münster, 14 (1959).

[120] N. Kuhlmann, Projektive Modifikationen komoplexen Rämen, Math, Ann. 139 (1960), 217-238.

[121] N. Kuhlmann, Die Normalisierung komplexer Rämen, Math. Ann. 144 (1961), 110-125.

[122] P. Lelong, La convexité et les fonctions analytiques de plusieur variables complxes, J. d'Anal. Math. Appl. 31 (1952), 191-219.

[123] P. Lelong, Domains convexes par rapport aux functions plursousharmoniques, J. d'Anal. Math. 2 (1952-1953), 178-208.

[124] P. Lelong, Fonctions plurisousharmoniques, Coll. sur. les fonct. de plus. var., Brussels (1953), 21-40.

[125] P. Lelong, Integration sur un ensemble analytique complexe, Bull. Soc. Math. France 85 (1957), 239-261.

[126] P. Lelong, Fonctions plurisousharmoniques et fonctions analytiques de variables

réeles, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 11 (1961), 515-562.

[127] J. Leray, Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (probléme de Cauchy III), Bull. Soc. Math. France 87 (1959), 81-180.

[128] E. E. Levi, Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analiriche di due o poù variavili complesse, Ann. Mat. Pura Appl. 17 (1910), 61-87.

[129] H. Levine, A theorem on holomorphic mappings into complex projective space, Ann. Math. 71 (1960), 529-535.

[130] N. Levision, Transformation of an analytic functions of several variables to a canonical form, Duke Math. J. 28 (1961), 345-354.

[131] H. Lewy, On the local character of the solutions of an typical linesr differential equation in three variables and a related theorem for regular functions of two complex variables, Ann. Math. 64 (1956), 514-522.

[132] B. Malgrange, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles des équations de concolution, Ann. Inst. Fourier 6 (1955), 271-354.

[133] B. Malgrange, Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques, Bull. Soc. Math. France 91 (1963), 113-127.

[134] W. T. Martin et al., Scientific report in the second summer institute; several complex variables, Bull. Amer. Math. Soc. 62 (1956), 79-141.

[135] A. Martineau, Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel, J. Anal. Math. 9 (1963), 1-164.

[136] E. Martinelli, Alcuni trorema integrali per le funzioi analytiche di piu variabli complesse, Rend. Accad. Ital. 9 (1939), 269-300.

[137] E. Martinelli, Sopra un teorema di F. Severi nella teoria delle funzione di più variabili complesse, Rend. Mat. Appl. 20 (1961), 81-96.

[138] Y. Matsusshima and A. Morimoto, Sur certains espaces fibrés holomorphes sur une variété de Stein, Bull. Soc. Math. France 88 (1960), 137-155.

[139] N. Mok, The Serre problem in Riemann surfaces. Math. Ann. 258 (1981), 145-168.

[140] S. Nakano, On complex analytic vector bundles, J. Math. Soc. Jpn. 7 (1955), 1-12.

[141] R. Narasimhan, Imbedding of holomorphically complete complex spaces, Amer. J. Math. 82 (1960), 917-934.

[142] R. Narasimhan, The Levi problem for complex spaces I, Math. Ann. 142 (1961), 355-365; II Math. Ann. 146 (1962), 195-216.

[143] R. Narasimhan, Holomorphically complete complex spaces, Amer. J. Math. 82 (1961), 917-934.

[144] R. Narasimhan, Levi problem for complex spaces II, Math. Ann. 146 (1962), 195-216.

[145] R. Narasimhan, A note on Stein spaces and their normalizations, Ann. Sci. Norm. Super. Pisa. Sci. Fis. Mat. III. Ser. 16 (1962), 327-333.

[146] A. Newlander and L. Nirenberg, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, Ann. Math. 65 (1957), 391-404.

[147] H. K. Nickerson, On the complex form of the Poincaré lemma, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 183-188.

[148] L. Nirenberg, Partial Differential Equations with Applications in Geometry; Lectures on Modern Mathematrics, Vol. II (John Wiley and Sons, 1964), pp. 1-41.

[149] F. Norguet, Sur les domains d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes (passsage du local au global), Bull. Soc. Math. France 82 (1954), 137-159.

[150] K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables (Tokyo, Iwanami Shoten, 1961). This is a collection of reprints of nine articles under the same general title, which have appeared in the following journals:

(I) Domaines convexes-par rapport aux fonctions rationelles, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A6 (1936), 245-255.

(II) Domaines d'holomorphie, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A7 (1937), 115-130.

(III) Deuxiùme-problème de Cousin, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A9 (1939), 7-19.

(IV) Domaines d'holomorphie et domains rationellement convexes, Jpn. J. Math. 17 (1941), 517-521.

(V) L'intégrale de Cauchy, Jpn. J. Math. 17 (1941), 523-531.

(VI) Domaines pseudoconvexes, Tohoku Math. J. 49 (1942), 15-52.

(VII) Sur quelques notions arithmétiques, Bull. Soc. Math. France 78 (1950), 1-27.

(VIII) Lemme fondamental, J. Math. Soc. Jpn. 3 (1951), 204-214; 259-278.

(IX) Domaines finis sans point critique intérieur, Jpn. J. Math. 23 (1953), 97-155.

Since then, the following paper in the series has also appeared:

(X) Une mode nouvelle engendrant les domaines pseudoconvexes, Jpn. J. Math. 32 (1962), 1-12.

[151] C. Okonek, M. Schneider and H. Spindler, Vector Bundles on Complex Projective Spaces (Birkhäuser, 1980).

[152] W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie II, Leipzig, 1924.

[153] A. A. Pankov, On analytic bundles which are continuous on the boundary of a domain (Russian), Sobshch. Akad. Nauk Gruz. SSR 81, 277-280.

[154] T. Radó, Subharmonic Functions (1937).

[155] K. J. Ramspott, Stetige und holomorphe Schnitte in Bündeln mit homofrner Faser, Math. Z. 89 (1965), 234-246.

[156] K. Reinhardt, Über Abbildungen durch analytische Functionen zweier Veränderlicher, Math. Ann. 83 (1921).

[157] K. Reinhardt, Analytisxhe Abbildungen im Gebiete zweier komplexer Veränderlicher, Jahr. DMV 30 (1921).

[158] R. Remmert, Projektionen analytischer Mengen, Math. Ann. 130 (1956), 410-441.

[159] R. Remmert, Meromorphe Funktionen in kompakten komplexen Rämen, Math. Ann. 132 (1956), 277-288.

[160] R. Remmert, Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Rämen, Math. Ann. 133 (1957), 328-370.

[161] R. Remmert, Analytic and algebraic dependence of meromorphic functions, Amer. J. Math. 82 (1960), 891-899.

[162] H. Röhle, Das Riemann-Hibertsche problem der Theorie der linearen Differentialtigkeiten, Math. Ann. 133 (1957), 1-25.

[163] H. Röhle, Lectures on Complex Analytic Fiber Spaces (Univ. of Cincinnati notes, 1958).

[164] H. Rossi, The local maximum modulus principle, Ann. Math. 72 (1960), 1-11.

[165] H. Rossi, Holomorphically convex sets in several complex variables, Ann. Math. 74 (1961), 470-493.

[166] H. Rossi, On envelopes of holomorphy, Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963), 9-19.

[167] H. Rossi, Vector fields on analytic spaces, Ann. Math. 78 (1963), 455-467.

[168] H. L. Royden, One-dimensional cohomology of domains of holomorphy, Ann. Math. 78 (1963), 197-200.

[169] W. Rückert, Zum Elimination Problem der Potenzreihenideale, Math. Ann. 107 (1932), 259-281.

[170] M. Sato, Theory of hyperfunctions, J. Fac. Sci. Tokyo 8 (1959/1960), 139-193; 387-437.

[171] G. Scheja, Riemannsche Hebbarkeitssätse für cohomologieklassen, Math. Ann. 144 (1961), 345-360.

[172] G. Scheja, Der Dunchschnittssatz für Holomorphiegebiete, Math. Ann. 142 (1961), 366-384.

[173] M. Schneider, Vollständige Durchschnitte in Steinschen Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 186 (1970), 191-200.

[174] L. Schwartz, Théorie des Distributions I, Paris, France, 1950.

[175] J. Sebastião e dilva, Les fonctions analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opératiommel, Math. Ann. 136 (1958), 58-96.

[176] J.-P. Serre, Quelques problémes globaux aux variétés de Stein, Coll. sur les fonctions de plusieurs variables 68 (1953), 57-58.

[177] J.-P. Serre, Une propriété topologique domaines de Runge, Proc. Amer. Math. Soc. 6 (1955), 133-134.

[178] J.-P. Serre, Faisceaux algébriques coherents, Ann. Math. 61 (1955), 197-278.

[179] J.-P. Serre, Une théoréme de daulité, Comm. Math. Helv. 29 (1955), 9-26.

[180] J.-P. Serre, Gémetrie algébriaues géometrie analytique, Ann. l'Inst. Founier VI (1955-1956).

[181] J.-P. Serre, Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier 6 (1956), 1-42.

[182] J.-P. Serre, Application de la théorie générale ä divers problémes globaux, Séminaire Henri Cartan (1951-1952) Exposé 20 (Benjamin, 1967).

[183] C. L. Siegel, Analytic Functions of Several Complex Variables (Institue for Advanced Study, Princeton, 1949).

[184] G. E. Silov, On the decomposition of a commutative normed ring into a direct sum of ideals, A.M.S. Transl. 1, 2 (1955).

[185] Y.-T. Siu, A proof plane domains are Banach-Stein, Manuscript Math. J. 20 (1968), 207-213.

[186] Y.-T. Siu, Holomorphic fiber bundles whose fiber are bounded Stein domains with zero first Betti number, Math. Ann. 219 (1976), 171-192.

[187] Y.-T. Siu, Every Stein subvariety admits a Stein neighborhood, Invent. Math. 38 (1976), 89-100.

[188] H. Skoda, Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans Cn, Bull. Soc. Math. France 100 (1972), 353-408.

[189] H. Skoda, Application des techniques L^2 ä la théorie des idéaux d'une algébre de fonctions holomorphes avec poid, Ann. Ec. Norm. Sup. 5 (1972), 545-579.

[190] H. Skoda, Fibrés holomorphes ä base et ä fiber de Stein, Invent. Math. 43 (1977), 97-107.

[191] H. Spindler, Der Satz von Grauert-Mülich für beliebige semistabile holomorphe Vektorbündel über dem n-dimensionalen komplex-projektiven Raum, Math. Ann. 243 (1979), 131-141.

[192] N. E. Steenrod, The Topology of Fiber Bundles (Princeton Univ. Press, 1951).

[193] K. Stein, Die Regularitätshullen niederdimendionaler Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 114 (1937), 543-569.

[194] K. Stein, Topologische Bedingungen für die Existenz analytischer Funktionen komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenflächen, Math. Ann. 117 (1941), 727-757.

[195] K. Stein, Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebe-

nen Periodizitätsmoduln und das zweite Couinsche Problem, Math. Ann. 123 (1951), 201-222.

[196] K. Stein, Analytische Projektion komplexer Mannigfaltigkeiten, Coll. sur les Fonct. de Plus Var. (1953).

[197] K. Stein, Analytische Zerlegungen komplexer Rämen, Math. Ann. 132 (1956), 68-93.

[198] K. Stein, Überlagerrungen holomorph-Vollständiger komplexer Rämen, Arch. Math. 7 (1956), 354-361.

[199] W. Stoll, Allgemeine Eigenschaften der Modifikationen, Math. Z. 61 (1954-1955), 206-234; 467-488.

[200] W. Stoll, Über meromorphe Abbildungen komplexer Rämen; I, Math. Ann. 136 (1958), 201-239; II, Math. Ann. 136 (1958), 393-429.

[201] W. Stoll, The growth of the area of transcendental analytic set of dimension one, Math. Z. 81 (1963), 76-98.

[202] G. Stolzenberg, Polynomially convex sets, Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), 382-387.

[203] N. P. Vekua, Systems of Singular Integral Equations (Russian) (Nauka, 1970).

[204] R. S. Ward, On self-dual gauge fields, Phys. Lett. A61 (1977), 81-82.

[205] A. Weil, L'intégral de Cauchy et les per plusieurs variables, Math. Ann. 111 (1935), 178-182.

[206] A. Weil, Sur les théorémes de Rham, Comm. Math. Helv. 26 (1952), 119-145.

[207] A. Weil, Introduction ä l'étude des Variëtés Kählérieenness (Hermann, 1958).

[208] J. Wermer, Polynominal approximation on an arc in $\mathbf{P}^3$, Ann. Math. 62 (1955), 269-270.

[209] J. Wermer, The hull of a curve in $\mathbf{C}^n$, Ann. Math. 68 (1958), 550-561.

[210] J. Wermer, An example concerning polynomial convexity, Math. Ann. 139 (1959), 147-150. Addendum to An example concerning polynomial convexity, Math. Ann. 140 (1960), 322-323.

[211] O. Zariski and P. Samuel, Commutative Algebra, Vol. I (D. Van Nostrand, 1958).